



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodziwe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

**Program zajęć rozszerzających z matematyki w ramach projektu**

**„Młodziwe Uniwersytety Matematyczne”**

**na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r**

**w szkole: II LO im. Emilii Plater**

**21-500 Biała Podlaska**

**ul. Narutowicza 39**



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

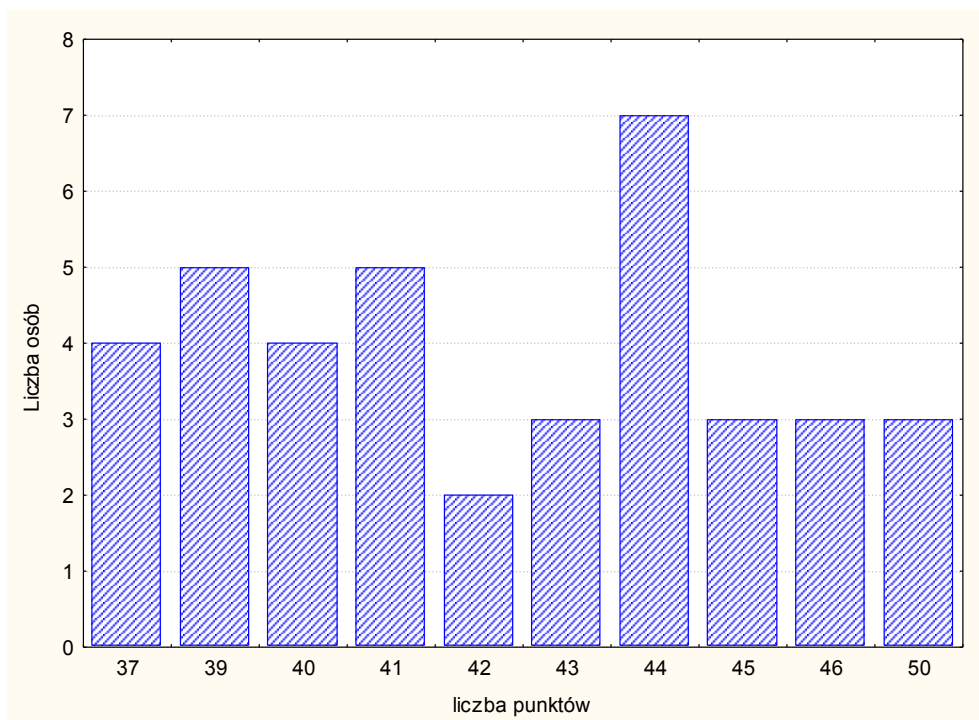
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w II Liceum Ogólnokształcącym im. Emilii Plater w Białej Podlaskiej wzięło udział 39 osób. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 42,36 punktu, co stanowi 84,72% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 42 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 37 punktów, a najwyższy to 50 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		II Liceum Ogólnokształcące w Białej Podlaskiej	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>41,94</b>	<b>83,88</b>
Mediana	23	46	42	84
Wynik najniższy	1	2	37	74
Wynik najwyższy	50	100	50	100
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	3,47	6,94

Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów II Liceum Ogólnokształcącego im. Emilii Plater w Białej Podlaskiej, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 37 do 50.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów II Liceum Ogólnokształcącego im. Emilii Plater w Białej Podlaskiej rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć wyrównawczych w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w II Liceum Ogólnokształcącym im. Emilii Plater w Białej Podlaskiej byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 5,23. Nie było uczniów z oceną dopuszczającą, dostateczną oraz dobrą. 30 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą i 9 uczniów uzyskało ocenę celującą.

Powyższa analiza wyników egzaminu gimnazjalnego uczestników zajęć, a także ocena końcoworoczna w trzeciej klasie gimnazjum spowodowała, iż zakwalifikowali się oni na zajęcia rozszerzające, ze względu na dużą ilość zdobytych punktów i wysokie oceny z matematyki.

Uczniowie zakwalifikowani do udziału w zajęciach rozszerzających deklarują chęć zdawanie matury z matematyki na poziomie rozszerzonym lub są świadomi, że kierunki kształcenia z którymi wiążą swoją przyszłość wymagają wiedzy matematycznej. Są to uczniowie, którym wcześniej matematyka nie sprawiała większych problemów. Zajęcia

rozszerzające pozwolą im na pogłębienie wiedzy oraz uzupełnienie jej o elementy, które nie pojawią na lekcjach matematyki.

Program zajęć opiera się na standardach wymagań egzaminacyjnych zamieszczonych w informatorze Centralnej Komisji Egzaminacyjnej o egzaminie maturalnym od 2010 roku i przewiduje kształcenie umiejętności w zakresie:

- I. Wykorzystania i tworzenia informacji (używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników);
- II. Wykorzystania i interpretowania reprezentacji (prawidłowe rozumienie i interpretacja pojęć matematycznych oraz posługiwanie się obiektami matematycznymi);
- III. Modelowania matematycznego (budowanie modelu matematycznego danej sytuacji, uwzględniającego ograniczenia i zastrzeżenia);
- IV. Użycia i tworzenia strategii (tworzenie strategii rozwiązania problemu);
- V. Rozumowania i argumentacji (tworzenie łańcucha argumentów i uzasadnianie jego poprawności).

## II. CELE EDUKACYJNE

### I. Cele ogólne:

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- Wyposażenie ucznia w umiejętności opisane w standardach egzaminacyjnych przewidzianych dla poziomu rozszerzonego.
- Poszerzenie wiedzy i umiejętności matematycznych z zakresu szkoły średniej.
- Wdrażanie ucznia do samodzielnego, logicznego i twórczego myślenia.
- Kształcenie umiejętności precyzyjnego wyrażania myśli, wyciągania wniosków, zadawania pytań i stawiania problemów oraz ich rozwiązywanie.
- Rozwijanie zainteresowań i uzdolnień matematycznych.
- Kształcenie nawyku systematycznej pracy.
- Kształcenie umiejętności planowania pracy.

### 2. Cele szczegółowe:

- **Elementy logiki.**

Uczeń:

- potrafi sprawnie posługiwać się funktorami logicznymi;
- potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne;
- potrafi wnioskować o wartości zdania złożonego, na podstawie informacji o wartościach logicznych innych wyrażen rachunku zdań;
- rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę;
- potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego;
- potrafi negować zdania złożone z wykorzystaniem poznanych praw logicznych;
- potrafi udowodnić poznane prawa logiczne;
- potrafi sprawdzić, czy dane wyrażenie rachunku zdań jest tautologią;
- potrafi określić dziedzinę bardziej złożonej formy zdaniowej jednej zmiennej;
- potrafi posługiwać się symbolami kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego;

- potrafi ocenić wartość logiczną zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym;
- potrafi podać negację zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym oraz określić jej wartość logiczną.
- potrafi stosować wiadomości z logiki do wnioskowania matematycznego.
- **Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory.**

Uczeń:

- potrafi sprawnie posługiwać się symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów;
- potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy zbiorami;
- potrafi wyznaczyć dopełnienie zbioru (w tym przedziału liczbowego);
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, w których jest mowa o własnościach liczb całkowitych;
- potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb całkowitych (np. dzielenie z resztą, podzielność liczb całkowitych itp.);
- potrafi stosować wzory skróconego mnożenia takie jak:
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , do usuwania niewymierności z mianownika ułamka;
- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej takie jak:  $|-x| = |x|$ ,  $|x| > 0$ ,  $|xy| = |x||y|$ ,  $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$  w rozwiązywaniu zadań;
- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.

- **Wektory.**

Uczeń:

- zna własności działań na wektorach i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań o średnim stopniu trudności;
- stosuje własności działań na wektorach w typowych zadaniach na dowodzenie.

- **Funkcje i ich własności.**

Uczeń:

- potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunktji warunków;
- potrafi wyznaczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (nie tylko w prostych przypadkach);
- potrafi określić zbiór wartości funkcji liczbowej (nie tylko wtedy, gdy dziedzina jest zbiorem skończonym);
- potrafi badać monotoniczność funkcji liczbowej na podstawie definicji;
- potrafi badać różnowartościowość funkcji na podstawie definicji;
- potrafi badać parzystość i nieparzystość na podstawie definicji;
- potrafi na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  sporządzić wykresy funkcji:  $y = |f(x)|$  oraz wykres funkcji  $y = f(|x|)$  oraz zapisać wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku tych przekształceń.

- **Funkcje trygonometryczne.**

Uczeń:

- zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- potrafi określić znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych;
- potrafi konstruować kąty w układzie współrzędnych w oparciu o wartości funkcji trygonometrycznych;
- potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich;
- potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne;
- potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych;
- potrafi rozwiązywać proste równania i nierówności trygonometryczne na podstawie wykresów funkcji trygonometrycznych;
- potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych (symetria względem osi  $OX$ , symetria względem osi  $OY$ , symetria względem punktu  $O(0, 0)$ ),

przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu;

- potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do przekształcania wyrażeń trygonometrycznych;
  - potrafi stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta do dowodzenia tożsamości trygonometrycznych;
  - potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z zastosowaniem wzorów na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzorów na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzorów na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta;
  - potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne z wartością bezwzględną z zastosowaniem poznanych wzorów;
  - potrafi określić zbiór wartości funkcji trygonometrycznej;
  - potrafi wyznaczyć okres podstawowy funkcji trygonometrycznej;
  - potrafi rozwiązywać równania trygonometryczne z parametrem;
  - potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych z wartością bezwzględną;
  - potrafi rozwiązywać różne zadania z innych działów matematyki, w których wykorzystuje się wiadomości i umiejętności z trygonometrii.
- **Funkcje liniowe.**

Uczeń:

- potrafi rozwiązać równanie liniowe z parametrem;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań równania liniowego z parametrem;
- potrafi rozwiązać równanie liniowe oraz nierówność liniową z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;
- potrafi przeprowadzić dyskusję liczby rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem;



- potrafi rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną oraz zinterpretować go graficznie;
- potrafi wykreślać w prostokątnym układzie współrzędnych zbiory punktów opisane równaniem, nierównością, układem równań lub nierówności z dwiema niewiadomymi z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi.
- **Wielomiany i funkcje wymierne.**

Uczeń:

- potrafi naszkicować wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną i na jego podstawie omówić własności funkcji;
- potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych;
- potrafi stosować wzory Viete'a do rozwiązywania równań i nierówności z parametrem;
- potrafi rozwiązywać różne zadania, w których występuje parametr, dotyczące własności funkcji kwadratowej;
- potrafi algebraicznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną;
- potrafi graficznie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności pierwiastkowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- potrafi przeprowadzić dyskusję nad liczbą rozwiązań równania kwadratowego z parametrem i wartością bezwzględną na podstawie interpretacji graficznej rozważanego problemu;
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności stopnia drugiego z wartością bezwzględną;
- potrafi sprawnie wykonywać działania na wielomianach;
- potrafi udowodnić twierdzenie Bezouta;
- zna i potrafi stosować twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych;

- potrafi sprawnie rozkładać wielomiany na czynniki (w tym stosując “metodę prób”);
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów, w których występują parametry;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe z parametrem;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych;
- potrafi sprawnie wykonywać działania łączne na wyrażeniach wymiernych;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać układy równań i nierówności wymiernych (w tym z wartością bezwzględną);
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem;
- potrafi narysować wykres funkcji homograficznej z wartością bezwzględną i na podstawie wykresu funkcji opisać jej własności;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.
- **Elementy geometrii analitycznej.**

Uczeń:

- potrafi wyznaczyć równanie stycznej do okręgu;
- potrafi napisać równanie okręgu opisanego na trójkącie, gdy dane ma współrzędne wierzchołków trójkąta;
- potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych, w których konieczne jest zastosowanie wiadomości z różnych działów matematyki;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące okręgów i kół w układzie współrzędnych;
- potrafi rozwiązywać proste zadania z wykorzystaniem wiadomości o prostych, trójkątach, parabolach i okręgach.

### III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU

Program przeznaczony jest do realizowania w czasie zajęć rozszerzających z matematyki. Adresowany jest do uczniów liceum ogólnokształcącego, którzy wykazują uzdolnienia matematyczne i przede wszystkim są zainteresowani pogłębieniem oraz rozszerzeniem swojej wiedzy z zakresu matematyki. Kolejność omawiania poszczególnych tematów, powinna być skorelowana z materiałem opracowywanym w czasie lekcji.

Program zajęć przewiduje, że w czasie zajęć uczniowie będą poszerzali i pogłębiali wiedzę oraz umiejętności nabyte w czasie lekcji matematyki. Realizowane będzie to poprzez poznawanie nowych (wykraczających poza podstawę programową) treści oraz poprzez rozwiązywanie trudniejszych problemów związanych z tematami omawianymi w ramach lekcji. W zajęciach biorą udział uczniowie uczący się matematyki na poziomie rozszerzonym.

### IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH

#### I. Organizacja zajęć

Zajęcia odbywać się będą raz w tygodniu - dwie godziny, w sali wyposażonej w komputery z dostępem do Internetu.

#### 2. Pomoce naukowe:

Do realizacja programu potrzebne są tradycyjne środki dydaktyczne takie jak: przyrządy geometryczne i kalkulator z czterema podstawowymi działaniami. Jednak bardzo przydatny byłby kalkulator graficzny, który umożliwiłby np. graficzne rozwiązywanie równań i nierówności bardzo trudnych do rozwiązania metodą „kartka-ołówek” lub rozwiązywanie niektórych równań i nierówności z parametrem. Przewidywana jest praca z komputerem z wykorzystaniem programów edukacyjnych, płyt CD z prezentacjami matematycznymi i platformą **e-learningową**.

### 3. Procedury osiągnięcia celów

Nauczyciel powinien tak organizować zajęcia, aby uczniowie mieli jak najwięcej okazji do „odkrywania” matematyki. Zwiększy to ich zainteresowanie.

Realizacja programu polegać będzie przede wszystkim na rozwiązywaniu różnorodnych zadań. Taka metoda nauczania ma dużo zalet: wyrabia odpowiednie umiejętności i nawyki oraz dociekliwość, rozwija twórcze myślenie i pamięć, kształtuje matematyczną intuicję, zachęca do wytrwałości. Nie można jednak ograniczać się tylko do rozwiązywania zadań. Uczeń powinien umieć samodzielnie zdobywać wiedzę i ją prezentować

W trakcie realizacji całego programu wskazane są przede wszystkim metody nauczania wyzwalające aktywność uczniów, takie jak:

- pogadanka problemowa,
- burza mózgów,
- metoda problemowa ( rozwiązywanie problemów ),
- rozwiązywanie ciągu zadań.

Ponadto uczniowie jak najczęściej powinni pracować samodzielnie lub w małych ( 2-4-osobowych ) grupach. Taka forma pracy przyzwyczaja do samodzielnego poszukiwania odpowiedzi na postawione pytania, zwiększa zaangażowanie i motywację, uczy pracy w zespole.

## 1. TREŚCI NAUCZANIA

### Klasa pierwsza

I. Elementy logiki	4 godz.
II. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory	9 godz.
III. Wektory	2 godz.
IV. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie, cz.I	5 godz.
V. Niektóre przekształcenia płaszczyzny	2 godz.
VI. Funkcja i jej własności	8godz.
VII. Elementy równań funkcyjnych	2 godz.
VIII. Przekształcanie wykresów funkcji	2 godz.
IX. Trygonometria	6 godz.
X. Funkcja liniowa	8 godz.

<b>Dział programowy</b>	<b>Zakres tematyczny</b>	<b>Liczba godzin</b>
1. Elementy logiki	Prawa negacji koniunkcji, alternatywy i implikacji wraz z dowodami oraz ich zastosowanie. Inne prawa logiczne.	1
	Zastosowanie poznanych praw w rozwiązywaniu zadań z logiki.	1
	Własności działań na zbiorach – z dowodami.	1
	Forma zdaniowa jednej zmiennej. Dziedzina formy zdaniowej jednej zmiennej. Zbiór elementów spełniających formę zdaniową jednej zmiennej. Forma zdaniowa dwóch zmiennych Kwantyfikator ogólny i szczegółowy. Negacja zdania z kwantyfikatorem.	1

2. Zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory	Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych (liczby pierwsze, liczby złożone, największy wspólny dzielnik, najmniejsza wspólna wielokrotność, cechy podzielności). Zadania na dowodzenie.	2
	Zbiór liczb wymiernych i niewymiernych. Dowód, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Zadania na dowodzenie.	1
	Przekształcanie wyrażeń zawierających wzory skróconego mnożenia.	1
	Potęga o wykładniku wymiernym.	1
	Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej i jej interpretacja geometryczna. Własności wartości bezwzględnej wraz z dowodami.	2
	Równania i nierówności z wartością bezwzględną.	2
3. Wektory	Wektor w prostokątnym układzie współrzędnych; współrzędne wektora. Długość wektora. Wektory równe i przeciwne. Współrzędne środka odcinka. Działania na wektorach.	2
4. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie	Pojęcie odległości. Różne rodzaje metryk.	1
	Twierdzenia o środkowych w trójkącie wraz z dowodami. Dwie proste równoległe przecięte trzecią.	1
	Suma kątów w trójkącie i w wielokącie (z dowodami).	1
	Twierdzenie o symetralnych boków trójkąta oraz twierdzenie o dwusiecznych trójkąta.	1
	Twierdzenie o wysokościach w trójkącie wraz z dowodem.	1
5. Niektóre przekształcenia płaszczyzny	Przekształcenie geometryczne-izometria: translacja o wektor, symetrie, obrót. Przekształcenia nieizometryczne. Rzut równoległy na prostą.	2

6. Funkcja i jej własności	Równość funkcji. Różnowartościowość funkcji. Monotoniczność funkcji. Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste. Funkcje okresowe. Funkcje ograniczone; największa i najmniejsza wartość funkcji.	3
	Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu oraz rysowanie wykresów funkcji o zadanych własnościach.	2
	Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania oraz interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci wykresu.	3
7.Elementy równań funkcyjnych		2
8.Przekształcanie wykresów funkcji	Symetria osiowa względem osi $OX$ i $OY$ ; symetria środkowa względem punktu $(0, 0)$ . Przesunięcie równoległe o wektor. Wykres funkcji $y = k \times f(x)$ oraz $y = f(kx)$ . Wykres funkcji $y =  f(x) $ oraz $y = f( x )$ .	2
9.Trygonometria	Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta.	2
	Tożsamości trygonometryczne.	1
	Wzory redukcyjne.	1
	Wykresy funkcji trygonometrycznych i ich przekształcanie. Własności funkcji trygonometrycznych.	1
	Równania i nierówności trygonometryczne.	1
10. Funkcja liniowa	Równoległość i prostopadłość wykresów funkcji liniowych.	1
	Badanie własności funkcji liniowej – dowodzenie własności na podstawie definicji.	1
	Funkcja liniowa we wzorze której występuje parametr.	1
	Szkicowanie wykresów funkcji kawałkami liniowych oraz z wartością bezwzględną.	1
	Zastosowanie funkcji liniowych do opisywania zjawisk z życia codziennego.	1

	Równania i nierówności z wartością bezwzględną. Interpretacja graficzna.	1
	Równania liniowe z parametrem.	1
	Równania liniowe z parametrem i wartością bezwzględną.	1

### Klasa druga

I.	Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie cz II	4 godz.
II.	Funkcja kwadratowa	10 godz.
III.	Okrąg i koło w układzie współrzędnych	3 godz.
IV.	Wielomiany	7 godz.
V.	Funkcje wymierne	6 godz.
VI.	Indukcja matematyczna	2 godz.
VII.	Ciągi	12 godz.
VIII.	Twierdzenie sinusów i cosinusów. Pola figur. Twierdzenie Talesa	4 godz.

Dział programowy	Zakres tematyczny	Liczba godzin
1. Podstawowe własności figur geometrycznych na płaszczyźnie	Czworokąty i ich klasyfikacja, własności trapezów i równoległoboków.	1
	Trójkąty wpisane w okrąg i opisane na okręgu.	1
	Czworokąt opisany na okręgu.	1
	Czworokąt wpisany w okrąg.	1



2. Funkcja kwadratowa	Badanie trójmianu kwadratowego .	1
	Wzory Viete'a i ich zastosowanie.	2
	Równania prowadzące do równań kwadratowych (w tym równania pierwiastkowe).	1
	Równania kwadratowe z parametrem.	1
	Równania i nierówności kwadratowe z wartością bezwzględną.	2
	Wykresy funkcji kwadratowych z wartością bezwzględną.	1
	Równania kwadratowe z wartością bezwzględną i parametrem.	2
3. Okrąg i koło w układzie współrzędnych	Równanie okręgu. Koło w układzie współrzędnych. Odległość punktu od prostej.	1
	Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu.	1
	Wzajemne położenie dwóch okręgów	1
4. Wielomiany	Dzielenie wielomianów (w tym za pomocą schematu Hornera).	1
	Pierwiastek wielomianu, pierwiastek wielokrotny, twierdzenie Bezouta.	1
	Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych i jego zastosowanie	1
	Równania i nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną.	2
	Równania wielomianowe z parametrem.	2
5. Funkcje wymierne	Równania wymierne z wartością bezwzględną.	1
	Równania wymierne z parametrem.	2
	Nierówności wymierne z wartością bezwzględną.	1
	Funkcja homograficzna i jej własności.	2
6. Indukcja matematyczna		2

7. Ciągi	Ciągi zdefiniowane rekurencyjnie.	1
	Ciągi monotoniczne.	1
	Granica ciągu liczbowego.	1
	Własności ciągów zbieżnych.	1
	Ćwiczenia w obliczaniu granic ciągów zbieżnych (w tym liczba e).	2
	Ciągi rozbieżne do nieskończoności.	1
	Ciąg arytmetyczny i geometryczny – zadania łączne.	3
	Szereg geometryczny.	2
8. Twierdzenie sinusów i cosinusów.	Rozwiązywanie zadań z zastosowaniem twierdzenia sinusów i cosinusów.	1
Pola figur.	Iloczyn skalarny wektorów i jego własności.	1
Twierdzenie Talesa	Pola figur.	1
	Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa. Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego i zewnętrznego trójkąta.	1

### Klasa trzecia

I. Jednokładność i podobieństwo	2 godz.
II. Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna	6 godz.
III. Trygonometria	6 godz.
IV. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa	9 godz.
V. Elementy statystyki opisowej	3 godz.
VI. Stereometria	8godz.
VII. Ciągłość i pochodna funkcji	14 godz.

<b>Dział programowy</b>	<b>Zakres tematyczny</b>	<b>Liczba godzin</b>
1. Jednokładność i podobieństwo.	Zastosowanie własności jednokładności i podobieństwa w rozwiązywaniu zadań	2
2. Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna	<p>Równania i nierówności potęgowe .</p> <p>Równania wykładnicze. Nierówności wykładnicze. Układy równań i nierówności wykładniczych.</p> <p>Własności logarytmów.</p> <p>Równania logarytmiczne. Nierówności logarytmiczne. Układy równań i nierówności logarytmicznych.</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>2</p>
3. Trygonometria	<p>Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.</p> <p>Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta. Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych.</p> <p>Tożsamości trygonometryczne.</p> <p>Równania i nierówności trygonometryczne.</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>2</p>
4. Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa.	<p>Zadania kombinatoryczne.</p> <p>Prawdopodobieństwo klasyczne.</p> <p>Prawdopodobieństwo warunkowe.</p> <p>Prawdopodobieństwo całkowite.</p> <p>Niezależność zdarzeń.</p> <p>Schemat Bernoulliego.</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>2</p>
5. Elementy statystyki opisowej.	<p>Średnia arytmetyczna; średnia ważona (z próby). Mediana z próby.</p> <p>Wariancja i odchylenie standardowe z próby.</p>	<p>2</p> <p>1</p>

6. Stereometria.	<p>Graniastosłupy – własności, pola powierzchni i objętości.</p> <p>Ostrosłupy – własności, pola powierzchni i objętości.</p> <p>Wielościiany foremne.</p> <p>Przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów.</p> <p>Bryły obrotowe – walec, stożek, kula; pola powierzchni i objętości brył obrotowych.</p>	<p>2</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>2</p>
Ciągłość i pochodna funkcji	<p>Definicja Heinego granicy funkcji w punkcie. Granice jednostronne. Obliczanie granic funkcji w punkcie.</p> <p>Granica funkcji w nieskończoności. Granica niewłaściwa funkcji. Asymptoty wykresu funkcji.</p> <p>Ciągłość funkcji w punkcie i w zbiorze. Badanie ciągłości funkcji. Własności funkcji ciągłych. Iloraz różnicowy funkcji. Pojęcie pochodnej funkcji w punkcie. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie.</p> <p>Obliczanie pochodnej funkcji w punkcie na podstawie definicji.</p> <p>Funkcja pochodna. Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych. Styczna do wykresu funkcji.</p> <p>Monotoniczność funkcji a znak pochodnej. Ekstrema lokalne funkcji. Warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji. Wyznaczanie najmniejszej oraz największej wartości funkcji na przedziale domkniętym.</p> <p>Zadania optymalizacyjne.</p> <p>Badanie przebiegu zmienności wielomianów i funkcji wymiernych</p>	<p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>2</p> <p>2</p> <p>4</p>

## **VI. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW**

Postępy czynione przez uczniów w czasie zajęć nie podlegają ocenie szkolnej. Należy jednak śledzić je systematycznie, by po wykryciu luk móc w porę podjąć środki zaradcze. Jednym z możliwych sposobów sprawdzania wiedzy i umiejętności jest organizowanie wśród uczestników zajęć mini-konkursów. Mogą mieć one różne formy, np. testu rozwiązywanego przez wszystkich w określonym czasie lub pojedynku drużyn, które zadawać będą sobie nawzajem pytania z pewnego tematu. Innym miernikiem wiedzy i umiejętności uczniów będą wyniki osiągnięte przez nich w różnego rodzaju konkursach wykraczających poza ramy zajęć rozszerzających.

## **VII. EWALUACJA PROGRAMU**

Po wdrożeniu programu wskazane jest przeprowadzenie ewaluacji w celu uzyskania informacji zwrotnej o tym w jakim stopniu zaproponowane treści umożliwią realizację zadań edukacyjnych. Dzięki ewaluacji nie tylko oceniamy, kontrolujemy czy zbieramy dane, ale dowiadujemy się, jakie potrzeby i oczekiwania mają uczniowie odnośnie proponowanych zajęć.

### **Przedmiotem ewaluacji będzie:**

- -osiąganie celów edukacyjnych,
- -skuteczność metod i form aktywności,
- -przyrost wiedzy,
- -kształtowanie umiejętności i postaw.

### **W trakcie realizacji treści programowych uczniowie będą oceniani na podstawie:**

- -obserwacji uczniów w czasie zajęć,
- -szacowania wytworów ich pracy,
- -sprawdzianów i quizów,
- -aktywności przy omawianiu problemów matematycznych.

## **IX. BIBLIOGRAFIA**

- Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku matematyka - Warszawa 2008
- Program nauczania matematyki autorstwa K. Kłaczkowa, M. Kurczaba, E. Świdry (nr dop. DKOS-4015-12/02)
- Plan wynikowy nauczania matematyki w liceach i technikach na podstawie wyżej wymienionego programu.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodziżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Mirosława Górka

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

