



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

**Program zajęć rozszerzających z matematyki**  
**w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”**  
**na okres od 14.12.2010r. do 30.06.2013r**  
**Liceum Ogólnokształcącym im. ks. Stanisława Staszica**  
**w Zespole Szkół Nr 2 w Hrubieszowie**



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

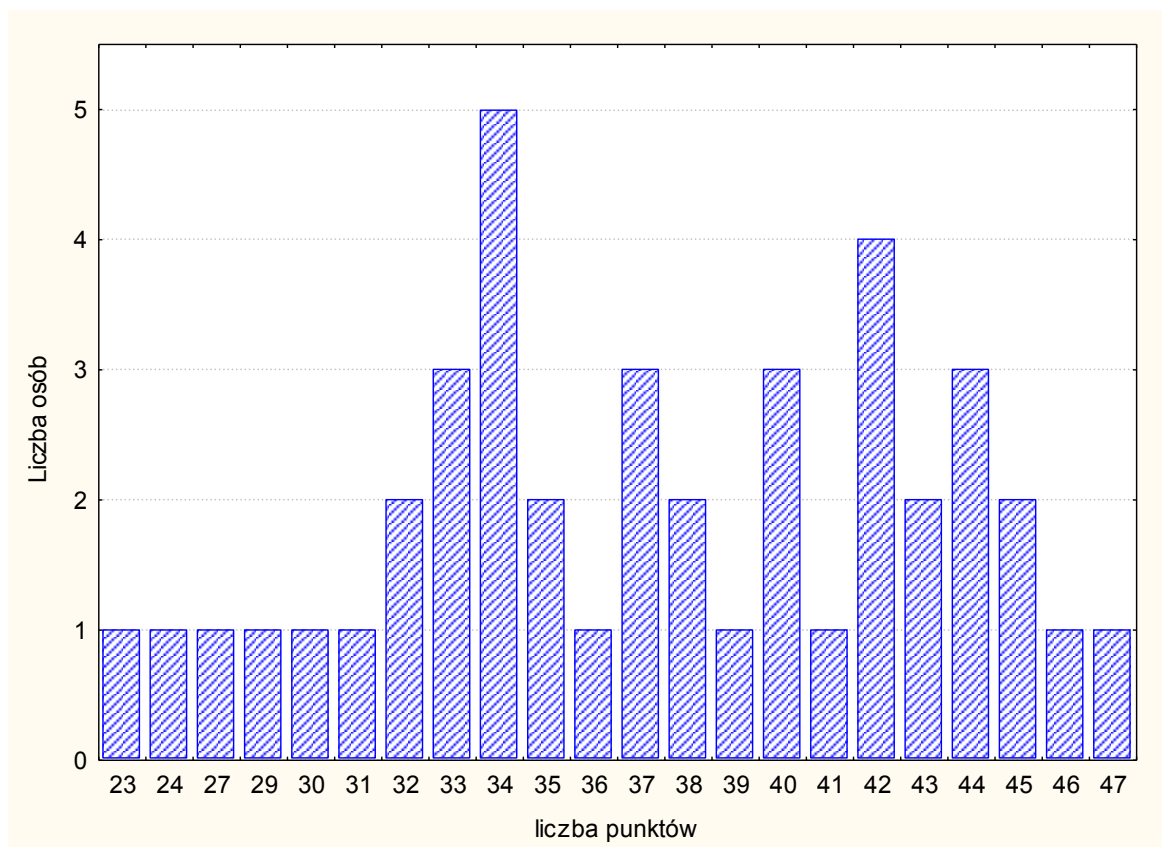
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w Liceum Ogólnokształcącym im. ks. Stanisława Staszica w Hrubieszowie wzięło udział 42 osoby. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 37,12 punktu, co stanowi 74,24% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 37 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 23 punktów, a najwyższy to 47 punktów.

Tabela. **Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.**

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		Liceum Ogólnokształcące w Hrubieszowie	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>37,12</b>	<b>74,24</b>
Mediana	23	46	37	74
Wynik najniższy	1	2	23	46
Wynik najwyższy	50	100	47	94
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	5,93	11,86

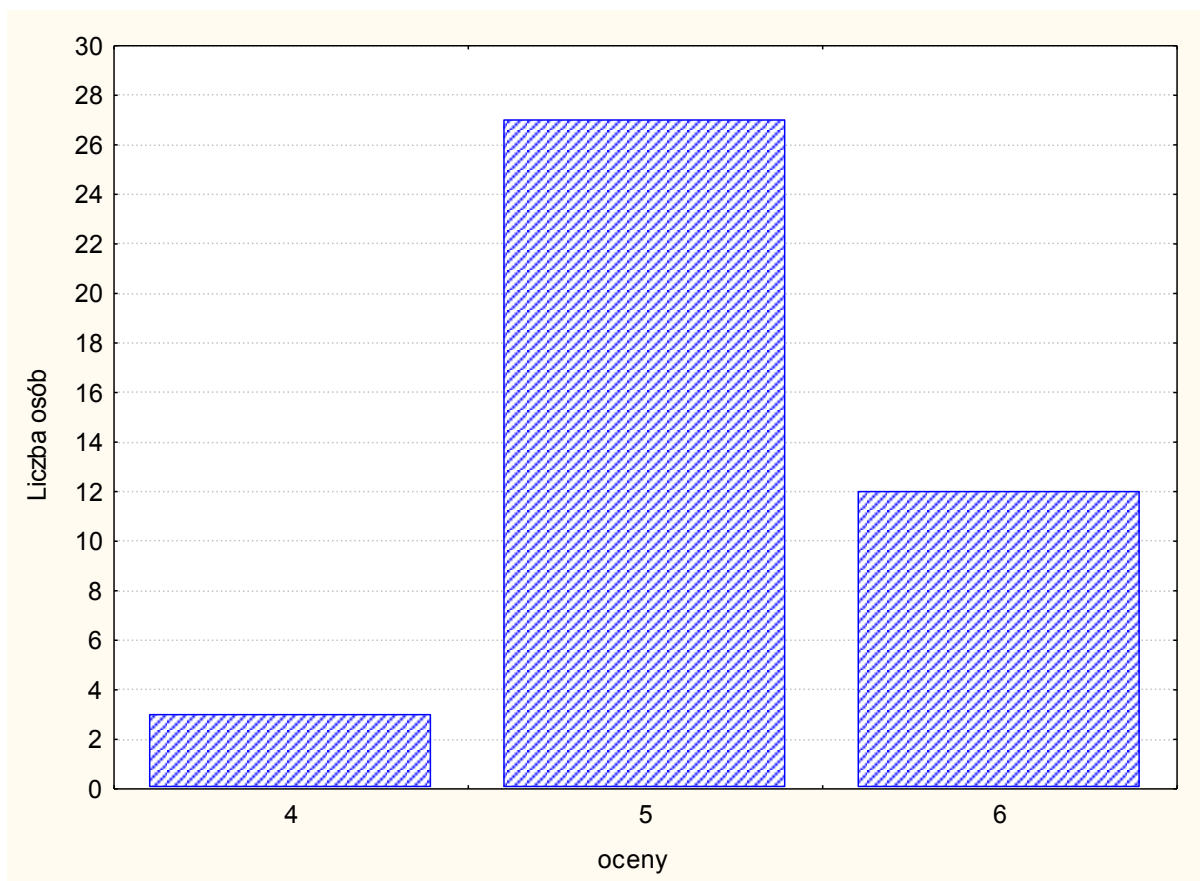
Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Stanisława Staszica w Hrubieszowie, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 23 do 47.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów w Liceum Ogólnokształcącym im. ks. Stanisława Staszica w Hrubieszowie rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Rozkład wyników uczniów z Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Stanisława Staszica w Hrubieszowie jest lewo skośny, jednomodalny, z modalną wynoszącą 34 punktów.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w Liceum Ogólnokształcącym im. ks. Stanisława Staszica w Hrubieszowie byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki jakie otrzymali kończąc gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 5,21. Nie było uczniów, którzy otrzymali ocenę dopuszczającą oraz ocenę dostateczną. 3 uczniów uzyskało ocenę dobrą, 27 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą i 12 uczniów otrzymało ocenę celującą.



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów Liceum Ogólnokształcącego im. ks. Stanisława Staszica w Hrubieszowie.

Na podstawie analizy wyników egzaminu gimnazjalnego uczestników zajęć, ocen końcowych z gimnazjum oraz podań uczniów chętnych do wzięcia udziału w projekcie „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” został opracowany program zajęć rozszerzających z matematyki.

Realizacja tego programu umożliwi utrwalenie i rozszerzenie wiadomości opisanych w podstawie programowej i standardach wymagań egzaminacyjnych.

## **II. CELE EDUKACYJNE**

### **1. Cele ogólne:**

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- wyrównanie i poszerzenie poziomu wiedzy i umiejętności uczniów;
- przygotowanie uczniów do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym;
- przygotowanie uczniów do udziału w konkursach matematycznych;
- motywowanie uczniów do podnoszenia poziomu wiedzy.

### **2. Cele szczegółowe:**

**Uczeń wie, zna i rozumie:**

#### **1. liczby i ich zbiory:**

- 1.1. co to jest zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów,
- 1.2. podstawowe prawa rachunku zdań,
- 1.3. co to jest zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczb rzeczywistych,
- 1.4. prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych,
- 1.5. definicję potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym,
- 1.6. co to jest oś liczbowa i co to jest układ współrzędnych na płaszczyźnie,
- 1.7. definicję przedziału liczbowego na osi oraz definicję sumy, iloczynu i różnicy przedziałów,
- 1.8. definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną,
- 1.9. pojęcie błędu przybliżenia oraz zasady szacowania wartości liczbowych,
- 1.10. co to jest procent i jak wykonuje się obliczenia procentowe,
- 1.11. zasadę indukcji matematycznej,
- 1.12. metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną,
- 1.13. prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym,

## **2. funkcje i ich własności:**

- 2.1. definicję funkcji oraz definicję wykresu funkcji liczbowej,
- 2.2. pojęcia: dziedzina funkcji, miejsce zerowe, zbiór wartości, wartość najmniejsza i największa funkcji w danym przedziale, monotoniczność funkcji,
- 2.3. jak wykonać przesunięcia wykresu funkcji wzdłuż osi  $x$  oraz osi  $y$ ,
- 2.4. definicję i własności funkcji różnowartościowej,
- 2.5. definicję i własności funkcji parzystej, nieparzystej i okresowej,
- 2.6. definicję przekształcenia wykresu funkcji przez zamianę skali i przez symetrię względem osi,

## **3. wielomiany i funkcje wymierne:**

- 3.1. definicję i własności funkcji liniowej,
- 3.2. definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe,
- 3.3. definicję wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie
- 3.4. sposoby rozkładu wielomianu na czynniki,
- 3.5. twierdzenie Bézouta,<sup>7</sup>
- 3.6. definicję funkcji homograficznej i jej własności,
- 3.7. zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych,
- 3.8. sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną,
- 3.9. wzory Viéte'a,
- 3.10. sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem,
- 3.11. definicję funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych,
- 3.12. co to jest dwumian Newtona

## **4. funkcję wykładniczą i logarytmiczną:**

- 4.1. definicję, własności i wykresy funkcji logarytmicznej i wykładniczej,
- 4.2. metody rozwiązywania równań i nierówności wykładniczych i logarytmicznych,

## **5. funkcje trygonometryczne:**

- 5.1. definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym
- 5.2. pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta
- 5.3. co to są tożsamości trygonometryczne
- 5.4. wzory redukcyjne
- 5.5. sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych,

## **6. ciągi liczbowe:**

- 6.1. definicję ciągu liczbowego,
- 6.2. definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na  $n$ -ty wyraz, wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- 6.3. co to jest procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów,
- 6.4. przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie
- 6.5. definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów
- 6.6. pojęcie sumy szeregu geometrycznego

## **7. ciągłość i pochodną funkcji:**

- 7.1. pojęcie funkcji ciągłej,
- 7.2. pojęcie pochodnej, jej interpretację geometryczną i fizyczną,
- 7.3. wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych,
- 7.4. związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji,

## **8. planimetrię:**

- 8.1. własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie,
- 8.2. związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii,
- 8.3. pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury,
- 8.4. twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem,

- 8.5. cechy podobieństwa trójkątów,
- 8.6. twierdzenie sinusów i cosinusów,
- 8.7. pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń,
- 8.8. definicję wektora, sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę,
- 8.9. definicję i własności jednokładności,

## **9. geometrię analityczną:**

- 9.1. różne typy równania prostej na płaszczyźnie oraz opis półpłaszczyzny za pomocą nierówności,
- 9.2. pojęcie odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej,
- 9.3. równanie okręgu i nierówność opisująca koło,
- 9.4. wzajemne położenie prostej i okręgu oraz pary okręgów na płaszczyźnie,

## **10. stereometrię:**

- 10.1. rozróżnia: graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule,
- 10.2. pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego,
- 10.3. związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii,
- 10.4. co to są przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów,
- 10.5. pojęcie wielościanu foremego,

## **11. rachunek prawdopodobieństwa:**

- 11.1. pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń,
- 11.2. pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności,
- 11.3. elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).
- 11.4. pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego oraz twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym
- 11.5. co to są zdarzenia niezależne
- 11.6. schemat Bernoulliego.



### **III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU**

1. Zdobyć wiadomości i umiejętności opisanych w podstawie programowej i w standardach wymagań egzaminacyjnych dla zakresu rozszerzonego.
2. Poszerzenie wiadomości o zagadnienia i tematy wykraczające poza zakres podstawy programowej
3. Powtórzenie i utrwalenie przez uczniów wiadomości i umiejętności nabytych w gimnazjum i liceum.
4. Wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowania metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych.

### **IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH**

#### **1. Organizacja zajęć**

Zajęcia będą odbywały się według wcześniej ustalonego harmonogramu zajęć rozszerzających dla poszczególnych grup. Dopuszczalne są zmiany wynikające ze zmiany planu zajęć lekcyjnych lub przyczyn niezależnych od prowadzących zajęcia.

#### **2. Pomoce naukowe:**

Nauczyciele prowadzący zajęcia będą korzystać z dostępnej literatury i opracowanych przez siebie materiałów dydaktycznych.

#### **3. Procedury osiągania celów**

Na zajęciach rozszerzających z matematyki będą stosowane różnorodne metody nauczania (metody aktywizujące, praca z tekstem matematycznym) i odpowiednio dobrane formy organizacji lekcji (praca z całą grupą, praca w zespołach kilkuosobowych, praca indywidualna).

Praca uczniów będzie podlegała kontroli i ocenie.

## V. TREŚCI NAUCZANIA

Dział programowy	Forma kształcenia	Zakres tematyczny	Liczba godzin
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie zdania w sensie logiki</li> <li>• Zaprzeczenie zdania</li> <li>• Prawa rachunku zdań</li> <li>• Formy zdaniowe</li> <li>• Kwantyfikator ogólny i szczegółowy</li> </ul>	2
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elementy algebry zbiorów</li> <li>• Wykonywanie działań na zbiorach</li> </ul>	1
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych</li> <li>• Działania w zbiorze liczb całkowitych</li> <li>• Działania w zbiorze liczb wymiernych</li> <li>• Obliczenie procentowe. Punkty procentowe</li> <li>• Potęga o wykładniku całkowitym i jej własności</li> <li>• Pierwiastek arytmetyczny i jego własności</li> <li>• Potęga o wykładniku wymiernym i jej własności</li> </ul>	8
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Działania na wyrażeniach algebraicznych</li> <li>• Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej i jej własności, równania i nierówności z wartością bezwzględną</li> <li>• Średnia arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna</li> </ul>	4

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Liczby zespolone: def, wzory deMoivra</li> <li>• pierwiastki wielokrotne</li> <li>• liczby sprzężone</li> <li>• równania kwadratowe</li> </ul>	6
2. Wielomiany i funkcje wymierne	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie funkcji i sposoby jej określania</li> <li>• Wyznaczanie dziedziny i zbioru wartości funkcji</li> <li>• Wykres funkcji</li> <li>• Miejsce zerowe funkcji, równość funkcji, różnowartościowość funkcji , monotoniczność funkcji</li> <li>• Funkcje parzyste i nieparzyste</li> <li>• Odczytywanie własności funkcji z wykresu</li> <li>• Funkcja wzajemnie jednoznaczna i odwrotna</li> <li>• Przekształcenia wykresów funkcji</li> <li>• Wykres funkcji z wartością bezwzględną</li> </ul>	3
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funkcja liniowa</li> <li>• Układy równań i nierówności liniowych</li> <li>• Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą wyznacznikową</li> <li>• Układy o większej niż dwa liczbie równań lub niewiadomych</li> <li>• Układy równań z parametrem ,układy równań z wartością bezwzględną</li> </ul>	5

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Postać ogólna i kanoniczna funkcji kwadratowej</li> <li>• Wykres i własności funkcji kwadratowej</li> <li>• Pierwiastki funkcji kwadratowej</li> <li>• Wykres funkcji kwadratowej z wartością bezwzględną</li> <li>• Równania i nierówności kwadratowe</li> <li>• Równania i nierówności kwadratowe z parametrem</li> <li>• Wzory Viete'a i ich zastosowania</li> </ul>	5
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Równanie kwadratowe z dwiema niewiadomymi</li> <li>• Układy równań i nierówności kwadratowych z dwiema niewiadomymi</li> </ul>	3
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie wielomianu i działania na wielomianach</li> <li>• Równość wielomianów</li> <li>• Iloraz wielomianów</li> <li>• Twierdzenie Bezout i jego zastosowanie</li> <li>• Rozkład wielomianu na czynniki</li> <li>• Rozwiązywanie równań stopnia <math>n</math></li> <li>• Rozwiązywanie nierówności stopnia <math>n</math></li> </ul>	4
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie funkcji wymiernej</li> <li>• Wykonywanie działań na wyrażeniach wymiernych</li> <li>• Rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych</li> <li>• Funkcja homograficzna jej wykres i własności</li> </ul>	5

3. Funkcje trygonometryczne	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym</li> <li>• Zastosowanie funkcji trygonometrycznych w geometrii</li> </ul>	3
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Miara stopniowa i łukowa kąta</li> <li>• Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta</li> <li>• Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu</li> <li>• Tożsamości trygonometryczne</li> <li>• Wzory redukcyjne i ich zastosowania</li> </ul>	4
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funkcje trygonometryczne liczby rzeczywistej</li> <li>• Wykresy i własności funkcji trygonometrycznej</li> <li>• Przekształcenia wykresów funkcji trygonometrycznych</li> <li>• Równania i nierówności trygonometryczne</li> <li>• Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów</li> <li>• Funkcje trygonometryczne wielokrotności argumentu</li> <li>• Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych</li> </ul>	4
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy argumentów</li> <li>• Funkcje trygonometryczne wielokrotności argumentu</li> <li>• Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych</li> </ul>	4
4. Funkcja potęgowa i wykładnicza	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funkcja potęgowa i jej własności</li> <li>• Funkcja wykładnicza i jej własności</li> <li>• Równania i nierówności wykładnicze</li> </ul>	3
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Logarytm i jego własności</li> <li>• Funkcja logarytmiczna i jej własności</li> </ul>	3

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Równania i nierówności logarytmiczne</li> </ul>	
5. Ciągi liczbowe	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zasada indukcji matematycznej</li> <li>• Silnia, symbol i dwumian Newtona, trójkąt</li> </ul>	3
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie ciągu i sposoby jego opisywania</li> <li>• Monotoniczność ciągu</li> </ul>	2
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ciąg arytmetyczny jego własności</li> <li>• Ciąg geometryczny i jego własności</li> <li>• Procent składany i jego zastosowania</li> </ul>	5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie ciągu zbieżnego</li> <li>• Twierdzenia o ciągach zbieżnych i ich zastosowania</li> <li>• Obliczanie granic ciągów zbieżnych</li> <li>• Liczba e</li> </ul>	5
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pojęcie ciągu rozbieżnego</li> <li>• Obliczanie granic ciągów rozbieżnych</li> </ul>	2
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Szereg geometryczny i jego zastosowania</li> </ul>	2
6. Ciągłość i pochodna funkcji	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Granica funkcji w punkcie</li> <li>• Granica niewłaściwa funkcji w punkcie</li> <li>• Granica jednostronna funkcji w punkcie</li> <li>• Granica funkcji w nieskończoności</li> <li>• Asymptoty wykresu funkcji</li> </ul>	4
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ciągłość funkcji w punkcie</li> <li>• Ciągłość funkcji w zbiorze</li> <li>• Twierdzenia o funkcjach ciągłych i ich zastosowania</li> </ul>	2

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Iloraz różnicowy funkcji</li> <li>• Pochodna funkcji w punkcie</li> <li>• Pochodna jako funkcja</li> <li>• Obliczanie pochodnej funkcji</li> <li>• Pochodna funkcji złożonej</li> <li>• Styczna do wykresu funkcji różniczkowalnej</li> <li>• Monotoniczność funkcji różniczkowalnej</li> <li>• Ekstrema funkcji różniczkowalnej</li> </ul>	6
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Druga pochodna funkcji i jej zastosowania</li> <li>• Badanie kształtu wykresu funkcji za pomocą drugiej pochodnej</li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• symbole nieoznaczone; reguła de l'Hospitala</li> <li>• twierdzenie Rolle'a, twierdzenie Lagrange'a</li> <li>• pochodne wyższych rzędów</li> <li>• wzór Taylora</li> </ul>	3
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Badanie przebiegu zmienności wielomianu</li> <li>• Badanie przebiegu zmienności funkcji wymiernej</li> <li>• Badanie przebiegu zmienności funkcji niewymiernej</li> <li>• Badanie przebiegu zmienności funkcji z wartością bezwzględną</li> <li>• Badanie przebiegu zmienności funkcji trygonometrycznych, wykładniczej i logarytmicznej</li> </ul>	6

		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funkcja Pierwotna: całka nieoznaczona, metody całkowania</li> <li>• Całka Riemanna funkcji jednej zmiennej: interpretacja geometryczna; funkcje całkowlne w sensie Riemanna</li> <li>• podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego</li> <li>• twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Riemanna</li> <li>• długość krzywej</li> <li>• obliczanie pól powierzchni i objętości brył obrotowych</li> </ul>	8
7. Planimetria	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie</li> <li>• okrąg opisany na trójkącie i wpisany w trójkąt</li> <li>• związki miarowe w figurach płaskich</li> <li>• pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury</li> <li>• twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem</li> <li>• cechy podobieństwa trójkątów</li> <li>• twierdzenie sinusów i cosinusów;</li> </ul>	4
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• wektor, suma wektorów ,iloczyn wektora przez liczbę</li> <li>• Iloczyn skalarny wektorów i jego własności</li> <li>• wyznacznik pary wektorów i jego własności</li> </ul>	3



		<ul style="list-style-type: none"> <li>• definicja i własności jednokładności</li> <li>• równanie prostej na płaszczyźnie</li> <li>• wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie</li> <li>• odległości punktu od prostej, odległość prostych równoległych</li> <li>• równanie okręgu</li> <li>• wzajemne położenie prostej i okręgu na płaszczyźnie</li> <li>• wzajemne położenie pary okręgów na płaszczyźnie</li> <li>• okrąg opisany na wielokącie i wpisany w wielokąt</li> </ul>	4
8. Stereometri a	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule</li> </ul>	3
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego</li> <li>• związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii</li> <li>• przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</li> <li>• pojęcie wielościanu foremnego.</li> </ul>	3
9. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń</li> </ul>	4
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności</li> </ul>	3
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie</li> </ul>	3
razem			144

## **VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW**

### **Uczeń powinien umieć (tylko wymagania dopełniające i wykraczające):**

- potrafi sprawnie posługiwać się funktorami logicznymi;
- potrafi budować zdania złożone i oceniać ich wartości logiczne;
- potrafi wnioskować o wartości zdania złożonego, na podstawie informacji o wartościach logicznych innych wyrażen rachunku zdań;
- rozumie budowę twierdzenia matematycznego; potrafi wskazać jego założenie i tezę;
- potrafi zbudować twierdzenie odwrotne do danego oraz ocenić prawdziwość twierdzenia prostego i odwrotnego;
- zna prawo negacji implikacji i potrafi je stosować;
- potrafi negować zdania złożone z wykorzystaniem poznanych praw logicznych;
- potrafi udowodnić poznane prawa logiczne;
- potrafi sprawdzić, czy dane wyrażenie rachunku zdań jest tautologią;
- potrafi określić dziedzinę bardziej złożonej formy zdaniowej jednej zmiennej;
- potrafi wskazać wszystkie elementy z dziedziny formy zdaniowej jednej zmiennej, które spełniają tę formę zdaniową;
- potrafi określić zbiór wszystkich elementów spełniających koniunkcję lub alternatywę form zdaniowych;
- potrafi posługiwać się symbolami kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego;
- potrafi ocenić wartość logiczną zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym;
- potrafi podać negację zdania złożonego poprzedzonego kwantyfikatorem ogólnym lub szczegółowym oraz określić jej wartość logiczną;
- potrafi dowodzić własności działań na zbiorach w oparciu o poznane definicje (np. prawa De Morgana dla zbiorów, prawo rozdzielności dodawania zbiorów względem mnożenia itp.) oraz innymi metodami;
- potrafi oceniać wartości logiczne zdań, w których występują zależności pomiędzy zbiorami
- potrafi przeprowadzić dowód twierdzenia;
- potrafi dowodzić nie wprost;

- potrafi zanegować równoważność zdań;
- potrafi wyznaczyć zbiór wszystkich elementów spełniających podaną implikację form zdaniowych.
- potrafi wyznaczyć dopełnienie zbioru (w tym przedziału liczbowego);
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe o podwyższonym stopniu trudności, w których jest mowa o własnościach liczb całkowitych;
- potrafi dowodzić twierdzenia dotyczące własności liczb całkowitych (np. dzielenie z resztą, podzielność liczb całkowitych itp.);
- potrafi stosować wzory skróconego mnożenia takie jak:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

do usuwania niewymierności z mianownika ułamka;

- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej takie jak:

$$|-x| = |x|, |x| \geq 0, |xy| = |x| |y|, \frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$$

w rozwiązywaniu zadań;

- potrafi stosować własności wartości bezwzględnej do rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną.
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów;
- potrafi usunąć niewymierność z mianownika ułamka w przykładach o podwyższonym stopniu trudności;
- posługuje się takimi własnościami wartości bezwzględnej jak:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \text{ oraz } ||x| - |y|| \leq |x + y|$$

w rozwiązywaniu zadań i dowodzeniu twierdzeń.

- potrafi określić dziedzinę funkcji liczbowej danej wzorem w przypadku, gdy wyznaczenie dziedziny funkcji wymaga rozwiązania koniunkcji warunków;
- potrafi wyznaczyć miejsce zerowe funkcji liczbowej (nie tylko w prostych przypadkach);
- potrafi określić zbiór wartości funkcji liczbowej (nie tylko wtedy, gdy dziedzina jest zbiorem skończonym);
- potrafi badać monotoniczność funkcji liczbowej na podstawie definicji;

- potrafi badać różnowartościowość funkcji na podstawie definicji;
- potrafi badać parzystość, nieparzystość oraz okresowość funkcji na podstawie definicji;
- potrafi na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  sporządzić wykresy funkcji:  $y = |f(x)|$  oraz wykres funkcji  $y = f(|x|)$  oraz zapisać wzory funkcji, których wykresy otrzymano w wyniku tych przekształceń.
- potrafi rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące funkcji i ich własności
- potrafi narysować wykres funkcji kawałkami liniowej i na jego podstawie omówić jej własności;
- potrafi wyznaczyć algebraicznie miejsca zerowe funkcji kawałkami liniowej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś OY;
- potrafi wyznaczyć algebraicznie zbiór tych argumentów dla których funkcja kawałkami liniowa przyjmuje wartości dodatnie (ujemne);
- potrafi obliczyć wartość funkcji kawałkami liniowej dla podanego argumentu;
- potrafi opisać daną figurę geometryczną w prostokątnym układzie współrzędnych, za pomocą odpowiedniego układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi;
- potrafi narysować w prostokątnym układzie współrzędnych figurę geometryczną zapisaną za pomocą układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą;
- potrafi stworzyć model matematyczny zjawisk z życia codziennego – podać opis zjawiska w postaci wzoru, odczytać informacje z wykresu, interpretować je i przetwarzać;
- potrafi zastosować własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania prostych zadań optymalizacyjnych;
- potrafi przekształcać wykresy funkcji kwadratowej (symetria względem osi OX, symetria względem osi OY, symetria względem punktu  $O(0, 0)$ ,

przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu.

- potrafi wyprowadzić wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego;
- potrafi wyprowadzić wzory na współrzędne wierzchołka paraboli;
- potrafi rozwiązywać różne problemy dotyczące funkcji kwadratowej, które wymagają niestandardowych metod pracy oraz niekonwencjonalnych pomysłów
- potrafi sprawnie dzielić wielomian przez wielomian;
- potrafi korzystać z twierdzenia Bezouta przy rozkładaniu wielomianów na czynniki;
- potrafi rozkładać wielomian na czynniki korzystając ze wzorów skróconego mnożenia:  
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$
- potrafi rozwiązywać równania dwukwadratowe;
- zna twierdzenie o reszcie i potrafi je stosować w rozwiązywaniu zadań;
- potrafi wyznaczyć wielomian, który jest resztą z dzielenia wielomianu o danych własnościach przez wielomian stopnia drugiego;
- potrafi rozwiązywać niestandardowe zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wielomianowych.
- zna definicję funkcji homograficznej  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ , gdzie  $c \neq 0$  i  $ad - cb \neq 0$ ;
- potrafi odróżnić funkcję homograficzną od innej funkcji wymiernej;
- potrafi przekształcić wzór funkcji  $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ , gdzie  $x \neq -c$  tak, by znany był wzór proporcjonalności odwrotnej  $y = \frac{a}{x}$  i współrzędne wektora przesunięcia równoległego;
- potrafi narysować wykres funkcji  $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ , gdzie  $x \neq -c$ ;
- potrafi opisać własności funkcji homograficznej  $f(x) = \frac{ax + b}{x + c}$ , gdzie  $x \neq -c$ , na podstawie jej wykresu;

- potrafi obliczyć miejsce zerowe funkcji homograficznej oraz współrzędne punktu, w którym wykres przecina oś  $OY$ ;
- potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji homograficznej;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności związane z funkcją homograficzną;
- potrafi przekształcić wykres funkcji homograficznej w symetrii względem osi  $OX$ , symetrii względem osi  $OY$ , symetrii względem punktu  $(0,0)$ , w przesunięciu równoległym o dany wektor oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w wyniku tego przekształcenia;
- potrafi rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności wymiernych.
- zna definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- potrafi określić znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych;
- potrafi konstruować kąty w układzie współrzędnych w oparciu o wartości funkcji trygonometrycznych;
- potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich;
- potrafi dowodzić różne tożsamości trygonometryczne;
- potrafi rysować wykresy funkcji trygonometrycznych i na ich podstawie określać własności funkcji trygonometrycznych;
- potrafi rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne
- potrafi przekształcać wykresy funkcji trygonometrycznych (symetria względem osi  $OX$ , symetria względem osi  $OY$ , symetria względem punktu  $O(0, 0)$ , przesunięcie równoległe o wektor) oraz napisać wzór funkcji, której wykres otrzymano w danym przekształceniu.
- potrafi rysować i przekształcać wykresy funkcji wykładniczych ( $S_{OX}$ ,  $S_{OY}$ ,  $S_{(0,0)}$ , przesunięcie równoległe o dany wektor);
- potrafi rozwiązywać równania oraz nierówności wykładnicze
- potrafi rysować i przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych ( $S_{OX}$ ,  $S_{OY}$ ,  $S_{(0,0)}$ , przesunięcie równoległe o dany wektor);
- potrafi rozwiązywać równania oraz nierówności logarytmiczne

- potrafi sprawnie przekształcać wyrażenia zawierające logarytmy, stosując poznane twierdzenia o logarytmach
- zna i potrafi stosować wzór na zamianę podstawy logarytmu
- potrafi zbadać na podstawie definicji monotoniczność ciągu określonego wzorem ogólnym;
- potrafi zbadać na podstawie definicji czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest arytmetyczny;
- potrafi zbadać na podstawie definicji czy dany ciąg określony wzorem ogólnym jest geometryczny;
- potrafi wykorzystać średnią arytmetyczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu arytmetycznego;
- potrafi wykorzystać średnią geometryczną do obliczenia wyrazu środkowego ciągu geometrycznego;
- potrafi rozwiązywać różne zadania dotyczące ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego, które wymagają rozwiązania układów równań o podwyższonym stopniu trudności;
- potrafi rozwiązywać zadania mieszane dotyczące ciągu arytmetycznego i geometrycznego
- zna definicję Heinego granicy (właściwej) funkcji w punkcie; potrafi zastosować tę definicję do obliczenia granicy funkcji w punkcie;
- umie obliczać granice funkcji (wielomianowych i wymiernych) w punkcie, z zastosowaniem odpowiednich twierdzeń;
- zna pojęcie granicy niewłaściwej funkcji w punkcie i potrafi obliczać takie granice w przypadku funkcji wymiernych;
- zna pojęcie granicy funkcji w nieskończoności i potrafi obliczać tego typu granice (właściwe i niewłaściwe) w przypadku funkcji wielomianowych i wymiernych;
- zna pojęcie granic jednostronnych funkcji w punkcie i potrafi obliczać takie granice w przypadku funkcji wielomianowych i wymiernych;
- wyznaczać asymptoty pionowe i poziome wykresów funkcji wymiernych;

- zna pojęcie ciągłości funkcji (ciągłości jednostronnej) w punkcie oraz ciągłości funkcji w zbiorze;
- zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto wzorów funkcji wymiernych (wielomianowych) jest ciągła;
- zna własności funkcji ciągłych;
- uzasadnić (powołując się na definicję Heinego), że nie istnieje granica funkcji w punkcie;
- umie obliczać granice funkcji (w punkcie, w nieskończoności) z zastosowaniem wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów;
- wyznaczać asymptoty ukośne wykresów funkcji;
- obliczać granice jednostronne funkcji innych niż wielomianowe i wymierne;
- rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic;
- zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest ciągła;
- wykorzystać własności funkcji ciągłych do przybliżonego rozwiązywania równań;
- zna pojęcie ilorazu różnicowego funkcji; potrafi wyznaczyć iloraz różnicowy w danym punkcie odpowiadający danemu przyrostowi argumentu;
- zna określenie pochodnej funkcji w punkcie (pochodnej jednostronnej funkcji w punkcie); potrafi – korzystając z definicji – obliczyć pochodną funkcji w punkcie;
- potrafi zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto wzorów funkcji wymiernych (wielomianowych) jest różniczkowalna;
- zna i rozumie geometryczną interpretację pochodnej funkcji w punkcie;
- zna i potrafi stosować własności pochodnej funkcji w punkcie;
- zna określenie funkcji pochodnej; potrafi wyznaczyć pochodną funkcji stałej liniowej, kwadratowej; zna pochodną funkcji  $y = x^n$ ;
- zna i potrafi stosować własności pochodnej funkcji;
- zna określenie stycznej; potrafi wyznaczyć styczną do wykresu funkcji różniczkowalnej;
- wykorzystując pochodną potrafi wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji wielomianowych i wymiernych;
- zna pojęcie maksimum (minimum) lokalne funkcji;



- zna i potrafi zastosować warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji;
- zna i potrafi zastosować warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego funkcji;
- wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji wielomianowych i wymiernych;
- wyznaczyć ekstrema globalne funkcji ciągłej w przedziale domkniętym;
- rozwiązywać proste zadania optymalizacyjne prowadzące do badania funkcji wielomianowej lub wymiernej;
- badać przebieg zmienności funkcji wielomianowych i wymiernych.
- zbadać, czy funkcja, do określenia której użyto kilku wzorów jest różniczkowalna;
- potrafi rozwiązywać proste zadania optymalizacyjne prowadzące do badania funkcji wielomianowej lub wymiernej;
- potrafi badać przebieg zmienności funkcji wielomianowych i wymiernych.
- potrafi badać przebieg zmienności funkcji wielomianowych i wymiernych.
- potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji wielomianowej (wymiernej) z wartością
- potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji trygonometrycznej, wykładniczej i logarytmicznej
- potrafi zbadać przebieg zmienności funkcji wielomianowej (wymiernej) z wartością bezwzględną;
- potrafi rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące obliczania granic, badania ciągłości, stosowania pochodnych funkcji.
- zna twierdzenia o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie;
- zna pojęcie kąta zewnętrznego wielokąta, umie uzasadnić, że suma kątów zewnętrznych w wielokącie jest stała;
- zna i umie zastosować w zadaniach własność wysokości w trójkącie prostokątnym poprowadzonej na przeciwprostokątną;
- potrafi udowodnić twierdzenie o części wspólnej figur wypukłych;
- potrafi udowodnić twierdzenie o dwusiecznych kątów przyległych;
- potrafi udowodnić twierdzenie o liczbie przekątnych w wielokącie;

- potrafi udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie;
- potrafi uzasadnić, że symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka;
- potrafi udowodnić twierdzenie o sumie kątów w trójkącie (wielokącie);
- potrafi udowodnić twierdzenia o symetralnych boków i dwusiecznych kątów w trójkącie;
- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- zna i rozumie aksjomatyczną definicję odległości. Zna przykłady metryk nieeuklidesowych;
- potrafi udowodnić twierdzenie o środkowych w trójkącie;
- potrafi udowodnić twierdzenia mówiące o zależnościach między kątami i bokami w trójkącie;
- potrafi udowodnić twierdzenia o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą;
- potrafi udowodnić twierdzenie o wysokościach w trójkącie;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące odcinków, prostych, półprostych, kątów i trójkątów, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- umie udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych;
- wie co to jest kąt dopisany do okręgu, wie, że miara tego kąta jest równa mierze kąta wpisanego w okrąg opartego na tym samym łuku;
- umie na podstawie własności czworokąta podanych w zadaniu wywnioskować, jaki to jest czworokąt;
- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów, stycznych, kątów środkowych, wpisanych i dopisanych, z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- umie udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu;
- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące czworokątów, w tym trapezów i równoległoboków;

- potrafi rozwiązywać zadania o średnim stopniu trudności dotyczące okręgów wpisanych w trójkąt i opisanych na trójkącie;
- potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie w rozwiązaniu złożonych zadań o średnim stopniu trudności;
- potrafi zastosować twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie do rozwiązania zadań o średnim stopniu trudności dotyczących trapezów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu;
- umie udowodnić twierdzenia o kątach środkowych i wpisanych;
- umie udowodnić twierdzenie o kącie dopisanym do okręgu;
- umie udowodnić twierdzenia o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące okręgów, czworokątów, wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu, w tym z zastosowaniem poznanych twierdzeń;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzorów na pola figur i innych twierdzeń;
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne o średnim stopniu trudności z zastosowaniem twierdzenia Talesa, twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa, oraz innych twierdzeń.
- zna i umie stosować twierdzenie o trzech prostopadłych;
- zna i rozumie określenie kąta trójściennego (wielościennego);
- umie znajdować przekroje brył;
- umie zaznaczać kąty w bryłach (np. kąt między ścianami bocznymi ostrosłupa);
- rozumie określenie przekrój wielościanu (przekrój bryły obrotowej); potrafi je stosować w rozwiązaniach zadań o średnim stopniu trudności;
- zna i umie stosować twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy;
- rozumie, co to znaczy, że graniastosłup jest wpisany w walec lub opisany na walcu;

- rozumie, co to znaczy, że kula jest wpisana w wielościan (walec, stożek) lub opisana na wielościanie (walcu, stożku);
- potrafi rozwiązywać zadania geometryczne dotyczące brył o średnim stopniu trudności z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń;
- umie udowodnić wybrane twierdzenia charakteryzujące położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- zna określenie i własności rzutu równoległego na płaszczyznę;
- potrafi wykorzystać własności rzutu równoległego na płaszczyznę w rysowaniu figur płaskich;
- zna określenie rzutu prostokątnego na płaszczyznę i potrafi go stosować np. w określaniu odległości między dwiema płaszczyznami równoległymi lub w określeniu kąta między prostą a płaszczyzną;
- umie udowodnić twierdzenie o przekątnych równoległościanu;
- potrafi udowodnić twierdzenia charakteryzujące ostrosłup prosty i prawidłowy;
- potrafi udowodnić twierdzenie o trzech prostopadłych;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania geometryczne dotyczące brył o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń;
- zna pojęcie permutacji i umie stosować wzór na liczbę permutacji;
- zna pojęcie wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń i umie stosować wzory na liczbę takich wariacji;
- zna pojęcie kombinacji i umie stosować wzór na liczbę kombinacji;
- umie rozwiązywać proste zadania kombinatoryczne z zastosowaniem poznanych wzorów;
- zna terminy: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenia wykluczające się;
- zna i rozumie aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa;
- zna własności prawdopodobieństwa i umie je stosować w rozwiązaniach prostych zadań;

- umie określić (skończoną) przestrzeń zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego i obliczyć jej moc;
- umie określić jakie zdarzenia elementarne sprzyjają danemu zdarzeniu;
- zna i umie stosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa;
- umie uzasadnić wzory na liczbę permutacji, wariacji (z powtórzeniami i bez) oraz kombinacji;
- umie rozwiązywać zadania kombinatoryczne o średnim stopniu trudności;
- umie udowodnić twierdzenie mówiące o własnościach prawdopodobieństwa;
- umie rozwiązywać zadania dotyczące rachunku prawdopodobieństwa o średnim stopniu trudności, z wykorzystaniem wcześniej poznanych twierdzeń;
- potrafi rozwiązywać nietypowe zadania dotyczące kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa o podwyższonym stopniu trudności, z wykorzystaniem poznanych twierdzeń.

## **VII. BIBLIOGRAFIA**

- I. Podręcznik do liceów i techników. Klasa I. Zakres podstawowy i rozszerzony Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda.
- II. Podręcznik do liceów i techników. Klasa II. Zakres podstawowy i rozszerzony Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda.
- III. Podręcznik do liceów i techników. Klasa III. Część 1. Zakres podstawowy i rozszerzony Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda.
- IV. Podręcznik do liceów i techników. Klasa III. Część 2. Elementy analizy matematycznej. Zakres podstawowy i rozszerzony Krzysztof Kłaczkow, Marcin Kurczab, Elżbieta Świda.
- V. Analiza matematyczna w zadaniach (Części I i II). Krysicki Włodzimierz, Włodarski Lech.
- VI. Matematyka dla ambitnych. Leon Gulgowski
- VII. Przed konkursem matematycznym. Część I. Paulina Cholewik, Maria Dębska, Łukasz Drwięga, Bogusław Gardaś, Tomasz Szymczyk, Magdalena Węgrzyn
- VIII. Zadania z matematyki dla olimpijczyków - gimnazjalistów i licealistów. Henryk Pawłowski, Wojciech Tomalczyk



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Jarosław Grzeszczuk

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

