



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

Program zajęć rozszerzających z matematyki  
w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”  
na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r  
w Liceum Ogólnokształcącym im. Organizacji Narodów  
Zjednoczonych w Biłgoraju.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

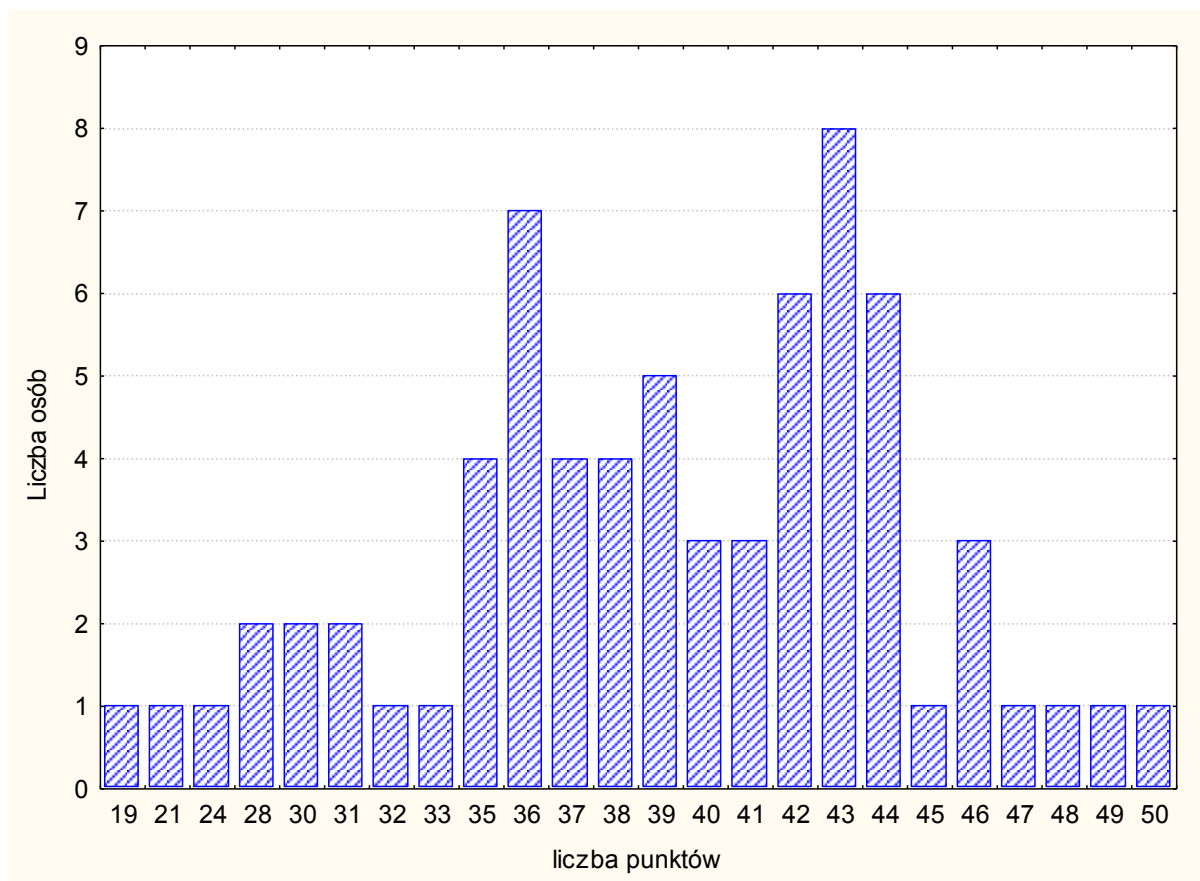
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w Liceum Ogólnokształcącym im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju wzięło udział 69 osób. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 38,75 punktów, co stanowi 77,5% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 39 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 19 punktów, a najwyższy to 50 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		Liceum Ogólnokształcące w Biłgoraju	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>38,75</b>	<b>77,5</b>
Mediana	23	46	39	78
Wynik najniższy	1	2	19	38
Wynik najwyższy	50	100	50	100
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	6,19	12,38

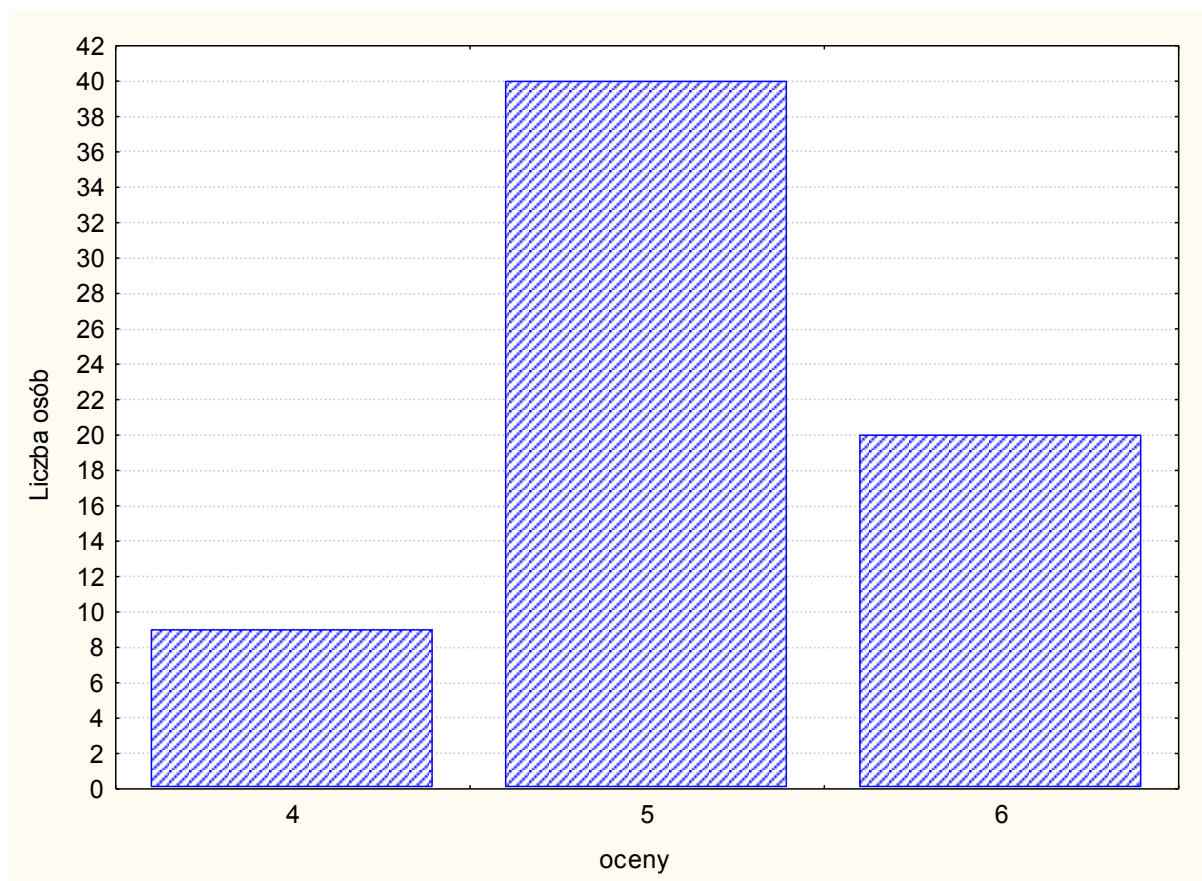
Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów Liceum Ogólnokształcącego im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 19 do 50.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów Liceum Ogólnokształcącego im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju rozwiązujących arkusz GM-1-102.

Rozkład wyników uczniów z Liceum Ogólnokształcącego im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju jest jednomodalny z modalną wynoszącą 43 punktów.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w Liceum Ogólnokształcącym im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 5,16. Nie było uczniów z oceną dopuszczającą oraz dostateczną. 9 uczniów uzyskało ocenę dobrą, 40 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą i 20 uczniów uzyskało ocenę celującą.



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów Liceum Ogólnokształcącego im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju.

Rozkład końcowych ocen gimnazjalnych uczniów z Liceum Ogólnokształcącego im. Organizacji Narodów Zjednoczonych w Biłgoraju jest symetryczny, jednomodalny, z modalną wynoszącą 5 (Rysunek 2).

Powyższa analiza wyników egzaminu gimnazjalnego pozwoliła wyłonić 30 uczestników do dwóch grup zajęć rozszerzających z matematyki. Uczniowie zakwalifikowani do Projektu odniosą szereg korzyści. Najważniejsze spośród nich to:

- bezpłatne i solidne przygotowanie do rozszerzonej matury z matematyki,
- pozyskanie bezpłatnych podręczników i materiałów dydaktycznych,
- możliwość udziału w zajęciach prowadzonych przez nauczycieli akademickich
- dostęp do Platformy Edukacyjnej zawierającej kursy e-learningowe i testy,
- możliwość udziału w konkursach,
- dla wyróżniających możliwość udziału w bezpłatnych letnich obozach w atrakcyjnych miejscach turystycznych,
- udział uczniów w Projekcie jest bezpłatny.

## **II. CELE EDUKACYJNE**

### **1. Cele ogólne:**

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- rozwijanie zainteresowań matematycznych;
- rozwijanie wyobraźni ucznia, umiejętności twórczego i logicznego myślenia;
- wdrażanie ucznia do samodzielnej pracy i doskonalenie własnych metod uczenia się ;
- zapoznanie ucznia z zastosowaniami matematyki;
- ukierunkowanie edukacji uczniów uzdolnionych;

Opracowany program zajęć rozszerzających ma na celu :

- a) podniesienie kompetencji matematycznych;
- b) solidne przygotowanie do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym;
- c) zwiększenie motywacji do wzięcia udziału w konkursach matematycznych;

### **2. Cele szczegółowe:**

Szczegółowe cele edukacyjne (uczeń wie, umie, potrafi) powinny być zbliżone do celów określonych w standardach egzaminacyjnych z rozbiciem na działy

#### **1. Liczby rzeczywiste:**

- a) planuje i wykonuje obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności oblicza pierwiastki, w tym pierwiastki nieparzystego stopnia z liczb ujemnych,
- b) bada, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną,
- c) wyznacza rozwinięcia dziesiętne; znajduje przybliżenia liczb; wykorzystuje pojęcie błędu przybliżenia,
- d) stosuje pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach,
- e) posługuje się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznacza przedziały na osi liczbowej,
- f) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności;
- g) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych,
- h) zna definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym,
- i) stosuje twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze; wyznacza największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność pary liczb naturalnych,

- j) stosuje wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu,
- k) oblicza współrzędne i długość wektorów,
- l) stosuje zasadę indukcji matematycznej.

## 2. Wielomiany i funkcje wymierne:

- a) posługuje się wzorami skróconego mnożenia
- b) rozkłada wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias,
- c) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany,
- d) wyznacza dziedzinę wyrażenia wymiernego z jedną zmienną,
- e) oblicza wartość liczbowa wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej,
- f) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; skraca i rozszerza wyrażenia wymierne,
- g) wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian  $x-a$ ; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian  $x-a$ ,
- h) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- i) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów,
- j) rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych,
- k) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych,
- l) rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki,
- m) rozwiązuje równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych
- n) stosuje wzory Viète'a,
- o) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski,
- p) rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe,
- q) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.

## 3. Funkcje trygonometryczne:

- a) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych,
- b) rozwiązuje równania trygonometryczne,
- c) stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego,
- d) znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego,
- e) stosuje miarę łukową i miarę stopniową kąta,
- f) wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego,
- g) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych przy rozwiązywaniu nierówności.

#### 4. Ciągi liczbowe:

- a) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym,
- b) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny,
- c) stosuje wzory na n-ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym,
- d) wyznacza wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie,
- e) zna definicję granicy ciągu,
- f) zna pojęcia: ciąg zbieżny, ciąg rozbieżny,
- g) podaje przykłady ciągów zbieżnych oraz rozbieżnych,
- h) umie obliczać granice ciągów,
- i) rozumie warunek zbieżności i rozbieżności ciągu geometrycznego,
- j) określa zbieżność oraz rozbieżność ciągu na podstawie jego wykresu.

#### 5. Ciągłość i pochodna funkcji:

- a) zna pojęcie funkcji ciągłej;
- b) zna pojęcie pochodnej, jej interpretację geometryczną i fizyczną;
- c) wykorzystuje wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych;
- d) wykorzystuje związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji,
- e) zna jednostronne granice funkcji w punkcie,
- f) oblicza granice funkcji,
- g) zna pojęcie ekstremum funkcji.

#### 6. Planimetria:

- a) korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu,
- b) wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym,
- c) znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii,
- d) określa wzajemne położenie prostej i okręgu,
- e) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu,
- f) stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych,
- g) stosuje własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach, także umieszczonych w kontekście praktycznym,
- h) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

#### 7. Stereometria:

- a) wskazuje i oblicza kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości,
- b) wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii,
- c) wyznacza przekroje wielościanów płaszczyzną,
- d) stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych.

### **8. Rachunek prawdopodobieństwa:**

- a) oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych,
- b) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosuje zasadę mnożenia,
- c) wykorzystuje sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń,
- d) wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń,
- e) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.

### **9. Liczby zespolone:**

- a) zna podstawowe definicje i własności,
- b) zna postać algebraiczną i sprzężenie liczby zespolonej,
- c) stosuje postać trygonometryczną liczby zespolonej,
- d) pierwiastkuje liczby zespolone.

### **10. Macierze:**

- a) zna podstawowe definicje i własności,
- b) stosuje działania na macierzach,
- c) oblicza wyznaczniki.

## **III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU**

1. Utrwalenie i poszerzenie wiedzy zdobytej w szkole oraz przekazanie uczniom w nowy, atrakcyjny sposób treści matematycznych spoza podstawy programowej.
2. Wdrożenie uczniów do samodzielnego, logicznego myślenia, rozwijanie ich zdolności i zainteresowań matematycznych.
3. Przygotowanie do dalszej edukacji matematycznej, a także, udziału i osiągnięcia sukcesów w konkursach matematycznych.



#### IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH

##### 1. Organizacja zajęć

Grupę docelową stanowią uczniowie rozpoczynający naukę w klasach pierwszych w roku szkolnym 2010/11. Uczniowie zakwalifikowani do udziału w projekcie uczestniczyć będą w nim przez 3 lata szkolne do roku 2013. Przewidywany wymiar zajęć to: 2 godziny w tygodniu. W ramach projektu w szkole utworzone zostaną 2 grupy 15 osobowe do zajęć rozszerzających.

##### 2. Pomoce naukowe:

- zbiór zadań „Matematyka” Eugeniusza Śmietany, poziom rozszerzony;
- dostęp do Platformy Edukacyjnej zawierającej kursy e-learningowe i testy;
- dodatkowe materiały dydaktyczne przygotowywane przez nauczycieli prowadzących zajęcia;

##### 3. Procedury osiągnięcia celów

Program będzie realizowany podczas:

- a) zajęć lekcyjnych w formie dwóch godzin tygodniowo przez okres trzech lat,
- b) zajęć pozalekcyjnych – konsultacji dla uczniów,

#### V. TREŚCI NAUCZANIA

Dział programowy	Forma kształcenia	Zakres tematyczny	Liczba godzin
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	a) zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów; b) podstawowe prawa rachunku zdań; c) zbiór liczb rzeczywistych i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej; d) prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych; e) definicja potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym; f) oś liczbowa i układ współrzędnych na płaszczyźnie; g) definicja przedziału	36

		<p>liczbowego na osi oraz definicja sumy, iloczynu i różnicy przedziałów,</p> <p>h) definicja wartości bezwzględnej;</p> <p>i) zasada indukcji matematycznej;</p> <p>j) metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną;</p> <p>k) prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;</p>	
2. Wielomiany i funkcje wymierne	konwersatoria	<p>a) definicja i własności funkcji liniowej;</p> <p>b) definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe;</p> <p>c) wzory Viète'a;</p> <p>d) sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem;</p> <p>e) definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie;</p> <p>d) sposoby rozkładu wielomianu na czynniki;</p> <p>e) twierdzenie Bézouta;</p> <p>f) definicja funkcji homograficznej i jej własności;</p> <p>g) zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych;</p> <p>h) sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną;</p> <p>i) definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych;</p> <p>j) dwumian Newtona</p>	23
3. Funkcje trygonometryczne	konwersatoria	<p>a) definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;</p> <p>b) pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;</p> <p>c) tożsamości trygonometryczne;</p> <p>d) wzory redukcyjne;</p> <p>e) sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych.</p>	13
4. Ciągi liczbowe	konwersatoria	<p>a) definicję ciągu liczbowego;</p> <p>b) definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na <math>n</math>-ty wyraz, wzór na sumę</p>	10

		<p><math>n</math> początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;</p> <p>c) procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów;</p> <p>d) przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie;</p> <p>e) definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów;</p> <p>f) pojęcie sumy szeregu geometrycznego.</p>	
5. Ciągłość i pochodna funkcji	konwersatoria	<p>a) pojęcie funkcji ciągłej;</p> <p>b) pojęcie pochodnej, jej interpretacje geometryczna i fizyczna;</p> <p>c) wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych;</p> <p>d) związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji.</p>	17
6. Planimetria	konwersatoria	<p>a) własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;</p> <p>b) związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>c) pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury;</p> <p>d) twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem;</p> <p>e) cechy podobieństwa trójkątów,</p> <p>f) twierdzenie sinusów i cosinusów;</p> <p>g) pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń;</p> <p>h) definicję wektora, sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę;</p> <p>i) definicję i własności jednokładności.</p>	10
7. Stereometria	konwersatoria	<p>a) graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule;</p> <p>b) pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego;</p> <p>c) związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>a) przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</p> <p>b) pojęcie wielościanu foremnego.</p>	8

8. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	a) pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń; b) pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności; c) elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe,	18
9. Liczby zespolone:		a) zna podstawowe definicje i własności, b) zna postać algebraiczną i sprzężenie liczby zespolonej, c) stosuje postać trygonometryczną liczby zespolonej, d) pierwiastkuje liczby zespolone.	2
10. Macierze:		a) zna podstawowe definicje i własności, b) stosuje działania na macierzach, c) oblicza wyznaczniki.	3

### **Tematyka zajęć:**

#### **Klasa 1**

1. Lekcja organizacyjna.
2. Język i symbole logiki w matematyce.
3. Prawa rachunku zdań.
4. Kwantyfikatory.
5. Twierdzenie i jego dowód.
6. Zbiór i podzbiór.
7. Działania na zbiorach.
8. Relacje.
9. Liczby naturalne i całkowite.
10. O podzielności liczb.
11. Liczby wymierne i niewymierne.

12. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych.
13. Oś liczbowa i przedziały liczbowe.
14. Wartość bezwzględna.
15. Równania z wartością bezwzględną.
16. Nierówności z wartością bezwzględną.
17. Równania i nierówności z wartością bezwzględną- ćwiczenia.
18. Błąd przybliżenia. Szacowanie wartości.
19. Pojęcie funkcji i sposoby jej określania.
20. Dziedzina funkcji, zbiór wartości funkcji.
21. Odczytywanie własności funkcji z jej wykresu.
22. Własności funkcji liniowej i jej wykres.
23. Funkcja kwadratowa i jej własności.
24. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej.
25. Miejsce zerowe funkcji kwadratowej i jej postać iloczynowa.
26. Wzory Viete'a.
27. Nierówności kwadratowe.
28. Funkcja kwadratowa z parametrem.
29. Działania na wektorach.
30. Przekształcenia w układzie współrzędnych.
31. Wektory w układzie współrzędnych.
32. Równanie prostej.
33. Figury w układzie współrzędnych.
34. Proste i okręgi.

35. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.
36. Kąty o miarach dodatnich i ujemnych.
37. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.
38. Związki między funkcjami trygonometrycznymi.
39. Wykres funkcji sinus.
40. Wykres funkcji cosinus.
41. Wykresy funkcji tangens i cotangens.
42. Miara łukowa kąta.
43. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej.
44. Funkcje typu  $y=asinx$ ,  $y=sinax$  ...
45. Przekształcanie wykresów funkcji.
46. Równania trygonometryczne.
47. Nierówności trygonometryczne.
48. Podsumowanie pracy – ćwiczenia powtórzeniowe.

## **Klasa 2**

1. Lekcja organizacyjna.
2. Przykłady wielomianów.
3. Rozkład wielomianu na czynniki.
4. Równania wielomianowe.
5. Równania wielomianowe (cd.)
6. Dzielenie wielomianów.
7. Twierdzenie Bezout.
8. Rozwiązania wymierne równań wielomianowych.

9. Funkcje wielomianowe.
10. Nierówności wielomianowe.
11. Funkcja wymierna.
12. Równania wymierne.
13. Rozwiązywanie nierówności wymiernych.
14. Powtórzenie wiadomości.
15. Przykłady ciągów.
16. Ciągi arytmetyczne.
17. Ciągi geometryczne.
18. Ciągi arytmetyczne i geometryczne – zadania.
19. Procent składany.
20. Utrwalenie wiadomości.
21. Indukcja matematyczna.
22. Indukcja matematyczna – ćwiczenia.
23. Granica ciągu.
24. Obliczanie granic.
25. Obliczanie granic- ćwiczenia.
26. Szeregi geometryczne.
27. Potęgi o wykładnikach rzeczywistych.
28. Logarytmy.
29. Własności logarytmów.
30. Funkcja wykładnicza.
31. Funkcja logarytmiczna.

32. Równania wykładnicze.
33. Nierówności wykładnicze.
34. Równania logarytmiczne.
35. Nierówności logarytmiczne.
36. Zastosowania funkcji wykładniczych i logarytmicznych.
37. Funkcja homograficzna.
38. Wielokąty wpisane w okrąg.
39. Wielokąty opisane na okręgu.
40. Twierdzenie sinusów.
41. Twierdzenie cosinusów.
42. Twierdzenie sinusów i cosinusów – zadania.
43. Jednokładność.
44. Wielokąty podobne.
45. Cechy podobieństwa trójkątów.
46. Twierdzenie Talesa.
47. Pola figur podobnych.
48. Podsumowanie pracy – ćwiczenia powtórzeniowe

### **Klasa 3**

1. Lekcja organizacyjna.
2. Granica funkcji w punkcie.
3. Granica funkcji w nieskończoności.
4. Działania arytmetyczne na granicach funkcji.
5. Obliczanie granic.



6. Obliczanie granic – ćwiczenia.
7. Ciągłość funkcji w punkcie i w przedziale.
8. Działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych.
9. Badanie ciągłości funkcji.
10. Własności funkcji ciągłych.
11. Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacje.
12. Działania arytmetyczne na funkcjach różniczkowalnych.
13. Obliczanie pochodnych wielomianów.
14. Obliczanie pochodnych wielomianów- ćwiczenia.
15. Obliczanie pochodnych funkcji wymiernych.
16. Obliczanie pochodnych funkcji wymiernych (cd.)
17. Monotoniczność funkcji różniczkowalnych.
18. Ekstrema funkcji różniczkowalnych.
19. Rodzaje graniastosłupów.
20. Rodzaje ostrosłupów.
21. Wzajemne położenie krawędzi i ścian w graniastosłupach i ostrosłupach.
22. Związki miarowe w graniastosłupach.
23. Związki miarowe w ostrosłupach.
24. Bryły obrotowe: walec, stożek, kula.
25. Związki miarowe w bryłach obrotowych.
26. Zadania różne z geometrii przestrzennej.
27. Pojęcie silni. Permutacje zbioru skończonego.

28. Symbol Newtona. Kombinacje zbioru skończonego.
29. Wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń.
30. Rozwiązywanie zadań z kombinatoryki.
31. Zdarzenia elementarne.
32. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności.
33. Zastosowanie klasycznej definicji prawdopodobieństwa.
34. Prawdopodobieństwo warunkowe.
35. Prawdopodobieństwo całkowite.
36. Zdarzenia niezależne.
37. Schemat Bernoulliego.
38. Prawdopodobieństwo – rozwiązywanie zadań.
39. Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta.
40. Średnia ważona.
41. Wariancja i odchylenie standardowe.
42. Elementy matematyki finansowej.
43. Liczby zespolone.
44. Liczby zespolone (cd.)
45. Macierze.
46. Działania na macierzach.
47. Wyznaczniki.
48. Podsumowanie pracy – ćwiczenia powtórzeniowe.

## VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczeń powinien umieć :

- wykonywać obliczenia na liczbach rzeczywistych; w szczególności,
- badać, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną,
- wyznaczać rozwinięcia dziesiętne; znajdować przybliżenia liczb; wykorzystywać pojęcie błędu przybliżenia,
- stosować pojęcie procentu i punktu procentowego w obliczeniach,
- posługiwać się pojęciem osi liczbowej i przedziału liczbowego; zaznaczać przedziały na osi liczbowej,
- wykorzystywać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności,
- obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych,
- znać definicję logarytmu i stosować w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym,
- stosować twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze; wyznaczać największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność pary liczb naturalnych,
- stosować wzór na logarytm potęgi i wzór na zamianę podstawy logarytmu,
- posługiwać się wzorami skróconego mnożenia,
- rozkładać wielomian na czynniki stosując wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów, wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias,
- dodawać, odejmować i mnożyć wielomiany,
- wyznaczać dziedzinę wyrażenia wymiernego,
- obliczać wartość liczbową wyrażenia wymiernego dla danej wartości zmiennej,
- dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne; skracać i rozszerzać wyrażenia wymierne,

- wykonywać dzielenie wielomianu przez dwumian  $x-a$ ; stosować twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian  $x-a$ ,
- stosować twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych,
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe,
- rozwiązywać układy równań, prowadzące do równań kwadratowych,
- rozwiązywać równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki,
- rozwiązywać równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych
- stosować wzory Viète'a,
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z parametrem, przeprowadza dyskusję i wyciąga z niej wnioski,
- rozwiązywać równania i nierówności wielomianowe,
- rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną,
- wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych,
- rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne,
- stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego,
- stosować miarę łukową i miarę stopniową kąta,
- wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta, przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego,
- posługiwać się wykresami funkcji trygonometrycznych przy rozwiązywaniu nierówności,
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym,
- badać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny,
- wyznaczać wyrazy ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie,
- stosować wzory na  $n$ -ty wyraz i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego,
- znać pojęcie funkcji ciągłej,
- znać pojęcie pochodnej, jej interpretację geometryczną i fizyczną,

- wykorzystywać wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych,
- wykorzystywać związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji,
- korzystać ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu,
- wykorzystywać własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym,
- znajdować związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii,
- określać wzajemne położenie prostej i okręgu,
- stosować twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu,
- stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych,
- stosować własności figur podobnych i jednokładnych w zadaniach,
- znajdować związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów,
- wskazywać i obliczać kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości,
- wyznaczać związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii,
- wyznaczać przekroje wielościanów płaszczyzną,
- stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych,
- obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych,
- zliczać obiekty w sytuacjach kombinatorycznych, stosować zasadę mnożenia,
- wykorzystywać sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń,

- wykorzystywać własności prawdopodobieństwa i stosować twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń,
- znać i umieć stosować wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.

## **VII. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW**

W ramach Internetowej Ekstraklasy Matematycznej uczniowie 3 razy w roku szkolnym będą rozwiązywać testy sprawdzające przygotowane i ujednolicone przez Uniwersytet Rzeszowski, Uniwersytet Jagielloński i Państwową Wyższą Szkołę Zawodową w Chełmie. Wyniki testów będą stanowić kryterium rekrutacji do konkursów matematycznych „Zostań Euklidesem” oraz będą podstawą do przygotowania dla nauczycieli zaleceń metodycznych do dalszej pracy.

## **VIII. EWALUACJA PROGRAMU**

Miernikiem oceny zakładanych osiągnięć uczniów objętych projektem będzie coraz aktywniejszy udział uczniów zdolnych w codziennych zajęciach lekcyjnych, osiąganie coraz wyższych wyników z matematyki oraz udział i ewentualne sukcesy w konkursach matematycznych.

Istotną sprawą w ewaluacji programu będzie pozyskiwanie informacji zwrotnych od uczestników w formie obserwacji zaangażowania, frekwencji czy wywiadu.

## **IX. BIBLIOGRAFIA**

- M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech – „Matematyka I”
- M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech – „Matematyka II”
- M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech – „Matematyka III”
- T. Jurliewicz, Z. Skoczylas - „Algebra liniowa 1”



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Beata Furmanek

Andrzej Łokaj

Zbigniew Taczała

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

