



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

Program zajęć rozszerzających z matematyki  
w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”  
na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r  
w szkole:  
III Liceum Ogólnokształcące im. Unii Lubelskiej w Lublinie



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

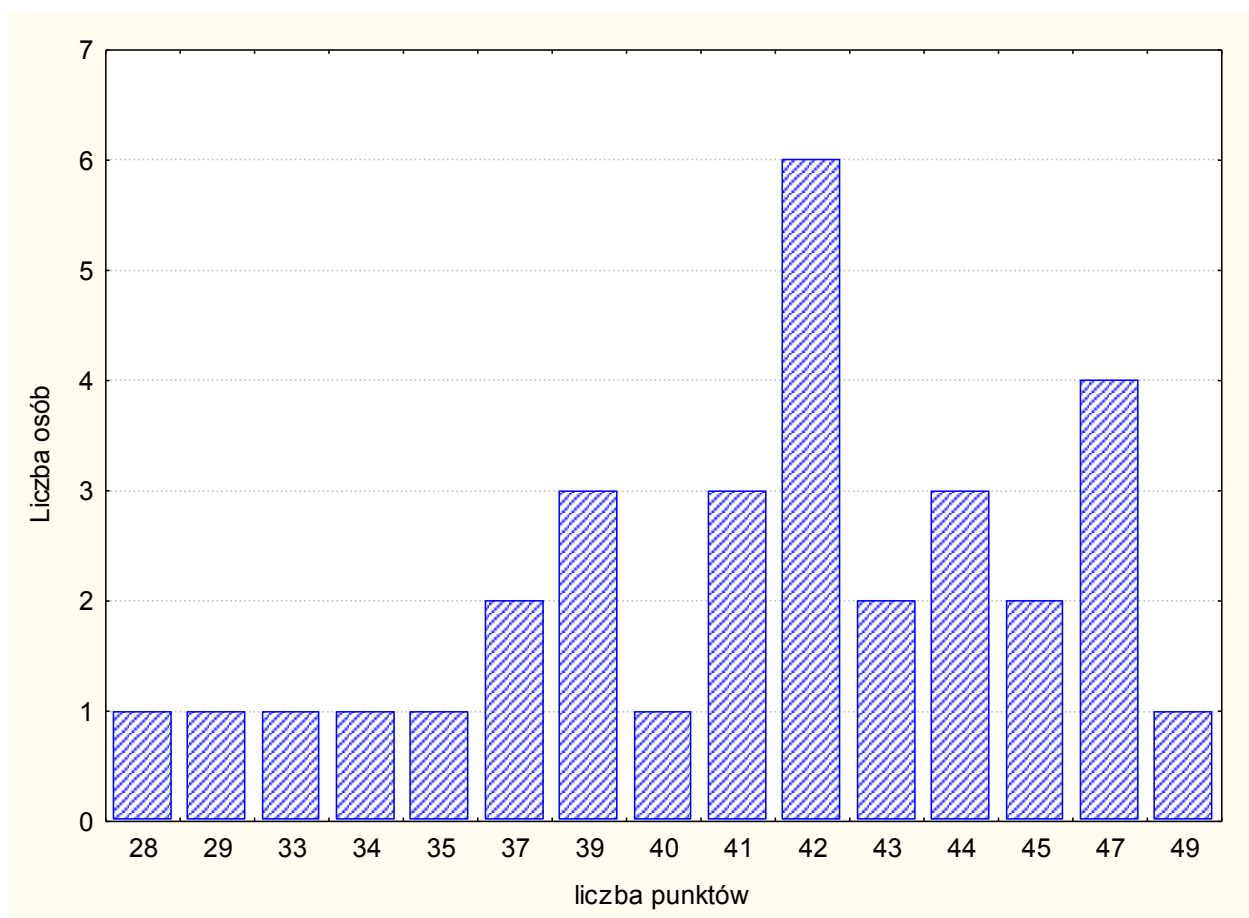
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w III Liceum Ogólnokształcącym w Lublinie wzięło udział 32 osoby. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 40,93 punktów, co stanowi 81,86% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik znacznie wyższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 42 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 28 punktów, a najwyższy to 49 punktów.

Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		III Liceum Ogólnokształcące w Lublinie	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>40,93</b>	<b>81,86</b>
Mediana	23	46	42	84
Wynik najniższy	1	2	28	56
Wynik najwyższy	50	100	49	98
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	5,04	10,08

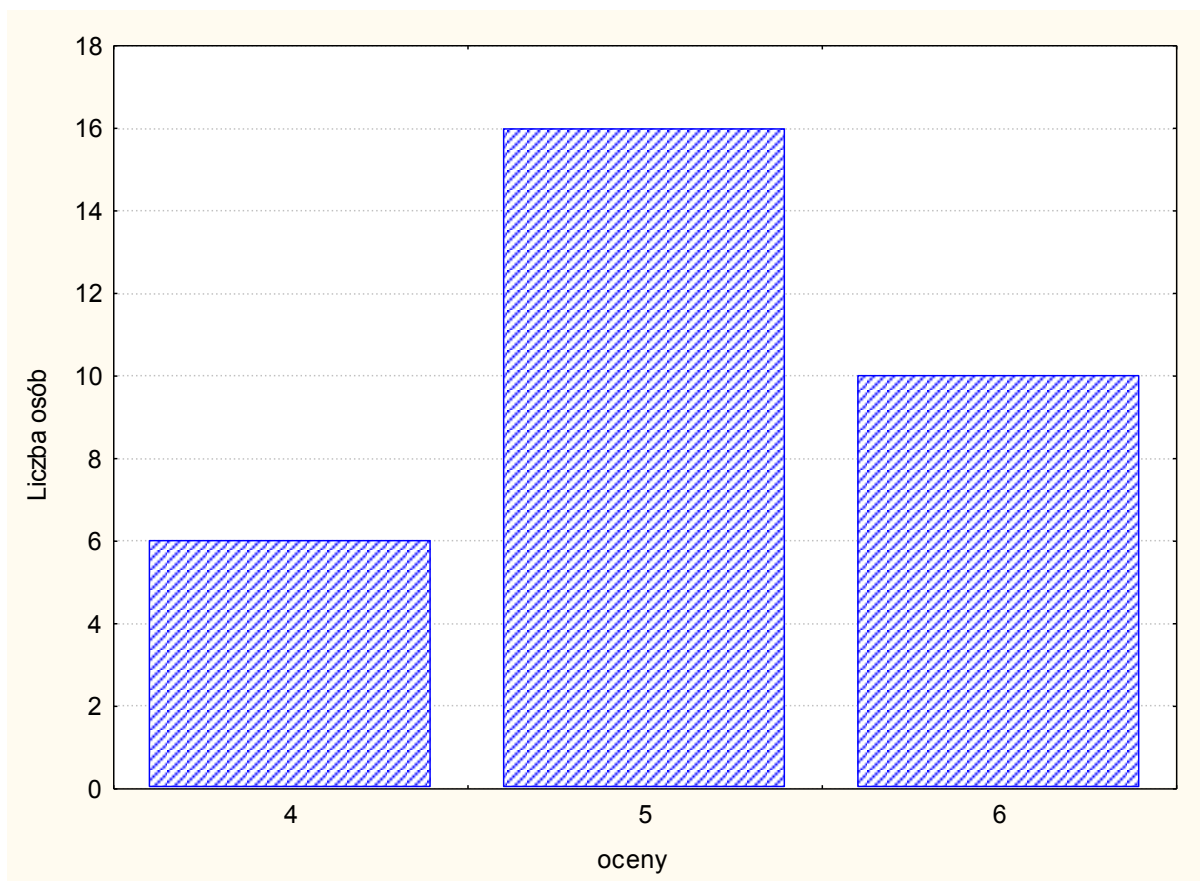
Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów III Liceum Ogólnokształcącego w Lublinie, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 28 do 49.



Rysunek 1. **Rozkład wyników gimnazjalistów III Liceum Ogólnokształcącego w Lublinie rozwiązujących arkusz GM-1-102.**

Rozkład wyników uczniów z III Liceum Ogólnokształcącego w Lublinie jest jednomodalny z modalną wynoszącą 42 punktów.

Uczniowie biorący udział w rekrutacji do zajęć wyrównawczych w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w III Liceum Ogólnokształcącym w Lublinie byli oceniani także pod względem ocen końcowych z matematyki w gimnazjum. Średnia ocena dla tych uczniów to 5,125. Nie było uczniów z oceną dopuszczającą oraz dostateczną. 6 uczniów uzyskało ocenę dobrą, 16 uczniów uzyskało ocenę bardzo dobrą i 10 uczniów uzyskało ocenę celującą.



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów III Liceum Ogólnokształcącego w Lublinie.

Analiza wyników egzaminu gimnazjalnego uczestników programu wskazuje na duży potencjał grupy. Należy zatem oczekiwać, iż skierowanie do tej grupy programu zajęć rozszerzających w takiej formie przyniesie duże korzyści i wydatnie podniesie poziom kompetencji matematycznych uczniów.

## **II. CELE EDUKACYJNE**

### **1. Cele ogólne:**

Zajęcia rozszerzające z matematyki mają za zadanie:

- podniesienie kompetencji matematycznych uczniów, którzy w roku szkolnym 2010/11 rozpoczęli naukę w klasie pierwszej w III LO w Lublinie.
- wsparcie merytoryczne dla uczniów uzdolnionych matematycznie,

Opracowany program zajęć rozszerzających ma na celu:

- a) podwyższanie kompetencji matematycznych uczniów
- b) zainteresowanie uczniów matematyką jako dziedziną opisującą świat
- c) kształcenie u uczniów umiejętności logicznego myślenia, poprawnego argumentowania, precyzji w formułowaniu myśli
- d) kształcenie umiejętności dyskusji
- e) przygotowanie do konkursów matematycznych
- f) przygotowanie do egzaminu maturalnego w zakresie rozszerzonym
- g) stworzenie mocnych podstaw do podjęcia studiów w zakresie nauk ścisłych

### **2. Cele szczegółowe:**

Szczegółowe cele edukacyjne (uczeń wie, umie, potrafi) są zbliżone do celów określonych w standardach egzaminacyjnych z rozbiorem na działy. Cele szczegółowe określone są przez oczekiwane osiągnięcia ucznia opisane w punkcie VI niniejszego programu.

### **III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU**

1. Program skierowany jest do uczniów, którzy w roku szkolnym 2010/2011 rozpoczęli naukę w klasie pierwszej w III LO w Lublinie wybierając naukę matematyki w zakresie rozszerzonym
2. Program realizowany będzie w okresie XII 2010- VI 2013.
3. Program stanowi rozszerzenie i uzupełnienie programu realizowanego na lekcjach ( Program nauczanie matematyki w liceach i technikach. Zakres rozszerzony. Autorzy: Kłaczko, Kurczab, Świda). Poznane treści będą pogłębiane, wzbogacone o nietypowe problemy oraz uzupełnione i rozszerzone – w szczególności dotyczy to działów dotyczących teorii liczb oraz analizy matematycznej.

### **IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH**

#### **1. Organizacja zajęć**

Zajęcia o charakterze konwersatoriów będą odbywały się w liczbie 48 godz. w roku szkolnym (w roku szkolnym 2010/2011 2 godz. tygodniowo w I semestrze oraz 3 godz. tygodniowo w II semestrze). Dodatkowo przewidziane są konsultacje z nauczycielami prowadzącymi.

Zajęcia prowadzone przez dwóch nauczycieli z podziałem na 2 grupy konwersatoryjne (po 15 osób).

#### **2. Pomoce naukowe:**

- zbiory zadań
- podręczniki matematyczne
- materiały dydaktyczne przygotowane przez prowadzących
- komputer z oprogramowaniem, tablica interaktywna lub projektor

### 3. Procedury osiągania celów

Forma zajęć – konwersatoria – oraz stosunkowo mała liczebność grup dają możliwość aktywnego uczestnictwa uczniów w otwartej dyskusji dotyczącej stawianych problemów, szukania różnych metod ich rozwiązania. Omawianie tematów dotyczących bardziej abstrakcyjnych obiektów matematycznych i rozwiązywanie zadań z tych działów (np. teoria liczb, metryki nieeuklidesowe, zadania z parametrem) kształtują umiejętność abstrakcyjnego myślenia, rozumowania matematycznego oraz sprawnego posługiwania się obiektami matematycznymi i poprawnego stosowania języka matematycznego. Inne tematy nawiązują do bardziej życiowych sytuacji ( np. zagadnienia optymalizacyjne, kombinatoryka, prawdopodobieństwo). Uczeń może zauważyć, że matematyka daje możliwość modelowania świata, dostarczając zarazem narzędzia do rozwiązywania zagadnień zaczerpniętych z życia codziennego (analiza matematyczna, pochodne, całki). Rozszerzenie szkolnego programu czyni wiedzę matematyczną bardziej spójną i umożliwia spojrzenie na problemy i obiekty matematyczne z różnych perspektyw, pokazując piękno ich precyzji, wszechstronność i wszechobecność.

### V. TREŚCI NAUCZANIA

<b>Dział programowy</b>	<b>Forma kształcenia</b>	<b>Zakres tematyczny</b>	<b>Liczba godzin</b>
1. Logika matematyczna	konwersatoria	a) zdania logiczne, funktory logiczne, wartości logiczne zdań złożonych b) układy zupełne funkcji logicznych (NOR, NAND) c) zadania logiczne	6
2. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	a) zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów; b) zbiór liczb rzeczywistych	18

		<p>i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej;</p> <p>c) prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych;</p> <p>d) definicja potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym;</p> <p>e) oś liczbowa i układ współrzędnych na płaszczyźnie;</p> <p>f) definicja przedziału liczbowego na osi oraz definicja sumy, iloczynu i różnicy przedziałów,</p> <p>g) definicja wartości bezwzględnej;</p> <p>h) zasada indukcji matematycznej;</p> <p>i) metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną;</p> <p>j) prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;</p> <p>k) podzielność w zbiorze <math>C</math>, kongruencje</p> <p>l) równania diofantyczne</p> <p>ł) układy równań liniowych – metoda wyznaczników</p> <p>m) przestrzenie metryczne</p> <p>n) mantysa i cecha</p>	
--	--	--	--



<p>3. Wielomiany i funkcje wymierne</p>	<p>konwersatoria</p>	<p>a) definicja i własności funkcji liniowej;  b) definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe;  c) wzory Viéte'a;  d) sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem;  e) definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie;  d) sposoby rozkładu wielomianu na czynniki;  e) twierdzenie Bézouta;  f) definicja funkcji homograficznej i jej własności;  g) zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych;  h) sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną;  i) definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych;  j) dwumian Newtona  k) elementy równań funkcyjnych</p>	<p>15</p>
<p>4. Funkcje trygonometryczne</p>	<p>konwersatoria</p>	<p>a) definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;  b) pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i</p>	<p>14</p>

		<p>wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;  c) tożsamości trygonometryczne;  d) wzory redukcyjne;  e) sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych.</p>	
5. Ciągi liczbowe	konwersatoria	<p>a) definicję ciągu liczbowego;  b) definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na n-ty wyraz, wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;  c) procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów;  d) przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie;  e) definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów;  f) pojęcie sumy szeregu geometrycznego.</p>	15
6. Ciągłość i pochodna funkcji, całki	konwersatoria	<p>a) pojęcie funkcji ciągłej;  b) pojęcie pochodnej, jej interpretacja geometryczna i fizyczna;  c) wzory do obliczania pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych;  d) związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji.  h) pojęcie całki nieoznaczonej i oznaczonej  i) interpretacja geometryczna całki oznaczonej</p>	24

7. Planimetria	konwersatoria	<p>a) własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;</p> <p>b) związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>c) pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury;</p> <p>d) twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem;</p> <p>e) cechy podobieństwa trójkątów,</p> <p>f) twierdzenie sinusów i cosinusów;</p> <p>g) pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń;</p> <p>h) definicję wektora, sumy wektorów</p> <p>i) iloczynu wektora przez liczbę;</p> <p>j) definicję i własności jednokładności.</p>	25
8. Stereometria	konwersatoria	<p>a) graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule;</p> <p>b) pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego;</p> <p>c) związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p>a) przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</p> <p>b) pojęcie wielościanu foremnego.</p>	12

9. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	a) pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń; b) pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności; c) prawdopodobieństwo warunkowe, całkowite d) schemat Bernoulliego e) elementy statystyki opisowej: średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).	15
--------------------------------	---------------	--	----

## VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczeń powinien umieć:

rozwiązywać typowe i nietypowe zadania z zakresu wymienionych w punkcie V treści nauczania. Powinien opanować umiejętności pozwalające na spełnienie wymagań określonych w standardach egzaminu maturalnego dla zakresu rozszerzonego (standardy wymagań egzaminacyjnych zawarte w załączniku nr 3 do Rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 10 sierpnia 2001 r. w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów (DzU nr 92, poz. 1020, z późn. zm.), w brzmieniu nadanym Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 10 kwietnia 2003 r. zmieniającym rozporządzenie w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów (DzU nr 90, poz. 846) oraz Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 28 sierpnia 2007 r. zmieniającym rozporządzenie w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów (DzU Nr 157, poz. 1102).

## **W zakresie treści rozszerzających uczeń powinien umieć:**

### logika matematyczna:

- Posługiwać się funkcjami NOR i NAND ;
- Rozwiązywać zadania logiczne
- Przeprowadzić dowód twierdzenia logicznego
- Wykorzystywać metody wnioskowania logicznego w dowodzeniu twierdzeń, przeprowadzić dowód „nie wprost”

### Liczby i ich zbiory

- Zbadać (udowodnić) podzielność liczby całkowitej o podanych własnościach przez inną liczbę (w wybranych typach zadań), również z zastosowaniem kongruencji
- Umie rozwiązać równania i nierówności z cechą oraz mantysą
- Umie zastosować zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń
- Potrafi wykorzystać metodę wyznaczników w rozwiązywaniu układów równań liniowych oraz przeprowadzić analizę ich rozwiązalności
- Zna przykłady nieeuklidesowych przestrzeni metrycznych i potrafi wyznaczyć odległość punktów i koła w tej przestrzeni;

### Funkcje

- Rozwiązuje proste równania funkcyjne
- Potrafi naszkicować wykresy pewnych funkcji złożonych również z cechą i mantysą (przekształcenia wykresów funkcji);

### ciągi liczbowe

- Potrafi wyznaczyć granicę ciągów liczbowych
- Potrafi wykorzystać def. Cauchyego i Heinego w dowodach dotyczących granic ciągów
- Potrafi określić zbieżność i znaleźć sumę szeregu geometrycznego
- Umie zastosować szereg liczbowy w zadaniach geometrycznych

### ciągłość, pochodna, całki

- Umie obliczyć granicę funkcji w punkcie właściwym i niewłaściwym
- Potrafi zbadać ciągłość funkcji w punkcie
- Potrafi wyznaczyć wartość pochodnej w punkcie na podstawie definicji
- Potrafi zastosować wzory do wyznaczania funkcji pochodnej
- Potrafi wykorzystać pochodną do wyznaczania stycznej
- Potrafi zinterpretować pochodną w odniesieniu do wielkości fizycznych typu: droga, szybkość, czas, przyspieszenie
- Umie określić monotoniczność i wyznaczyć ekstremum funkcji z wykorzystaniem pochodnej
- Zna pojęcie całki nieoznaczonej
- Potrafi wyznaczyć całkę nieoznaczoną (proste przypadki)
- Zna pojęcie całki oznaczonej i wykorzystuje jej interpretację geometryczną

### kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa

- Rozwiązuje zadania z zastosowaniem prawdopodobieństwa warunkowego, całkowitego i wzoru Bayesa
- Potrafi rozwiązać zadania z zastosowaniem schematu Bernoulliego

## **VII. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW**

Ocenianie uczestników programu pełni funkcję motywującą. Uczniowie wyróżniający się aktywnością są nagradzani bardzo dobrymi ocenami. Oceny uzyskane na zajęciach są brane pod uwagę przy wystawianiu ocen końcoworocznych z matematyki.

## VIII. EWALUACJA PROGRAMU

Ewaluacja programu opiera się na wynikach uczniów – uczestników programu uzyskiwanych na sprawdzianach oraz wynikach w konkursach matematycznych. Dodatkowo ewaluacja możliwa będzie po przeanalizowaniu wyników maturalnych uczniów objętych programem.

## IX. BIBLIOGRAFIA

- „Matematyka-podręczniki klasa I, II, III” K. Kłaczkow , M. Kurczab
- „Zbiory zadań-klasy I, II, III” K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda
- „Kącik olimpijski cz. I, II, III, IV” Lev Kurlyandchik
- „Przed konkursem matematycznym” P. Cholewik
- „Zadania z matematyki dla olimpijczyków” H. Pawłowski, W. Tomalczyk
- „O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych” W. Sierpiński
- „Liga zadaniowa – zbiór zadań” Z. Bobiński
- „Matematyka elementarna w zadaniach tom I i II” Lev Kurlyandchik
- „Zadania z olimpiad matematycznych trygonometria i geometria” H. Pawłowski
- „Zadania z olimpiad matematycznych planimetria i stereometria” H. Pawłowski
- „Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata” H. Pawłowski
- „Złote rybki w oceanie matematyki” Lev Kurlyandchik
- „Wędrowki po krainie nierówności” Lev Kurlyandchik
- „Impresje matematyczne tom I i II” Lev Kurlyandchik
- „Impresje liczbowe” Lev Kurlyandchik
- „Szkice o liczbach, funkcjach i figurach” W. Bednarek
- „Tajemnicza hipoteza Riemanna” W. Bednarek
- „Przygotowanie do Olimpiad Matematycznych” D. Musztari
- „Rachunek różniczkowy i całkowy z zastosowaniami” W. Leksiński
- „Analiza matematyczna w zadaniach” W. Krysicki, L. Włodarski
- „Zadania z analizy matematycznej” W. Kaczor, M. Nowak
- „Matematyka” – czasopismo dla nauczycieli
- „Delta matematyka – fizyka - astronomia-informatyka” - miesięcznik



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

mgr Urszula Kalita – nauczyciel matematyki w III LO w Lublinie

mgr Józef Tymicki - nauczyciel matematyki w III LO w Lublinie

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

