



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

Program zajęć rozszerzających z matematyki

w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”

na okres od 01.12.2010r. do 30.06.2013r

w Zespole Szkół Zawodowych im. Ks. Stanisława Staszica w Chełmie



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

## I. WSTĘP

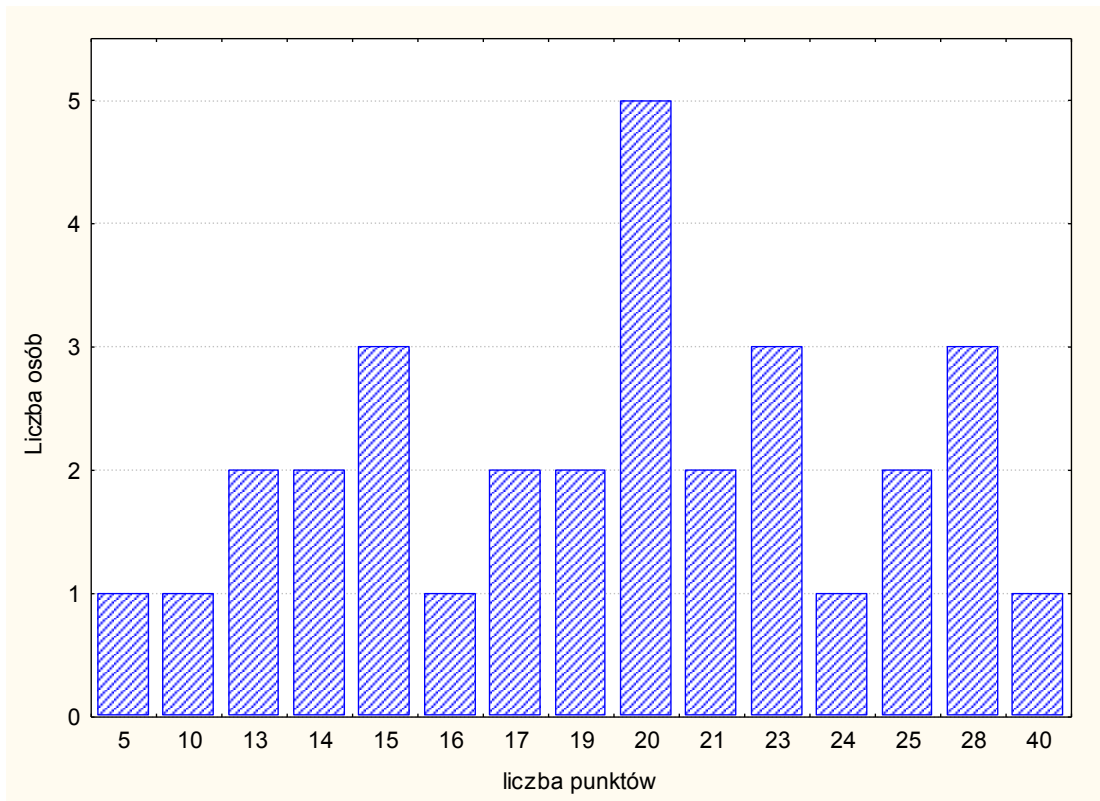
Statystyczny uczeń klasy trzeciej gimnazjum z województwa lubelskiego rozwiązujący arkusz standardowy uzyskał na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej 23,85 punktu, co stanowi 47,70% punktów możliwych do uzyskania. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 23 punkty (mediana). Najczęstszy wynik (modalna) to 19 punktów. Najniższy wynik na egzaminie to 1 punkt, a najwyższy to 50 punktów.

W rekrutacji do zajęć rozszerzających w ramach projektu „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” w Zespół Szkół Zawodowych nr 5 im. Stanisława Staszica w Chełmie wzięło udział 31 osób. Uczniowie ci uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej średnio 19,71 punktów, co stanowi 39,42% punktów możliwych do uzyskania. Jest to wynik nieznacznie niższy od wyniku województwa lubelskiego. Środkowy uczeń rozkładu uporządkowanego rosnąco uzyskał 20 punkty (mediana). Najniższy wynik na egzaminie to 5 punktów, a najwyższy to 40 punktów.

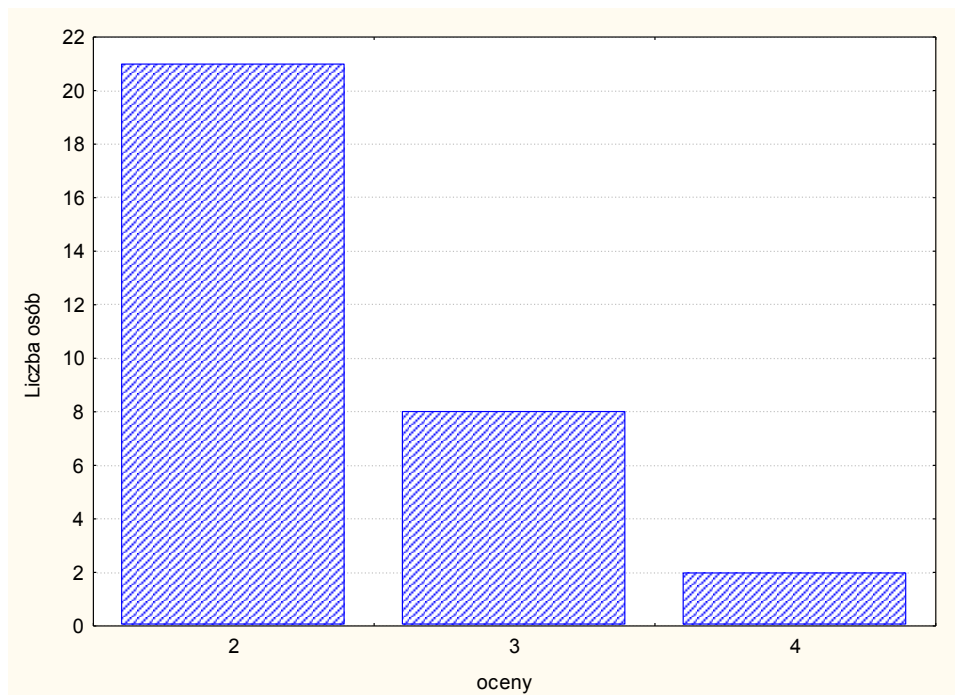
Tabela 1. Podstawowe miary statystyczne dotyczące części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego.

Podstawowe miary statystyczne	Województwo lubelskie		Zespół Szkół Zawodowych nr 5 w Chełmie	
	punkty	procent	punkty	procent
<b>Średni wynik</b>	<b>23,85</b>	<b>47,70</b>	<b>19,71</b>	<b>39,42</b>
Mediana	23	46	20	40
Wynik najniższy	1	2	5	10
Wynik najwyższy	50	100	40	80
Odchylenie standardowe	9,59	19,19	6,56	13,12

Rysunek 1 przedstawia liczbę uczniów Zespołu Szkół Zawodowych nr 5 im. Stanisława Staszica w Chełmie, którzy uzyskali na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej określoną liczbę punktów, od 5 do 40.



Rysunek 1. Rozkład wyników gimnazjalistów Zespołu Szkół Zawodowych nr 5 im. Stanisława Staszica w Chełmie rozwiązujących arkusz GM-1-102.



Rysunek 2. Rozkład ocen końcowych z gimnazjum uczniów Zespołu Szkół Zawodowych nr 5 im. Stanisława Staszica w Chełmie.

## **II. CELE EDUKACYJNE**

### **I. Cele ogólne:**

Matematyka jest obok języka polskiego głównym przedmiotem w szkole ponadgimnazjalnej.

Celem zajęć rozszerzających w ramach projektu jest:

- ~ Rozwój intelektualny ucznia.
- ~ Wdrażanie ucznia do samodzielnego, logicznego i twórczego myślenia.
- ~ Kształtowanie umiejętności organizacji i systematyczności pracy.
- ~ Kształtowanie umiejętności precyzyjnego wyrażania myśli, wyciągania wniosków, zadawania pytań i stawiania problemów oraz ich rozwiązywania.
- ~ Zapoznanie ucznia z zagadnieniami nieznajdującymi się w materiale nauczania realizowanym w szkole

### **2. Cele szczegółowe:**

#### **Rozwój intelektualny**

- Wykształcenie nawyku logicznego i poprawnego myślenia oraz stosowania w praktyce zasad logiki.
- Rozwijanie zdolności stawiania hipotez i ich dowodzenia, odróżniania hipotezy od udowodnionego faktu.
- Doskonalenie zdolności heurystycznych.
- Wykształcenie umiejętności wykonywania działań na liczbach, wyrażeniach algebraicznych i innych podstawowych obiektach abstrakcyjnych.
- Wykształcenie umiejętności tworzenia modeli matematycznych i nawyku ilościowego rozważania dostrzeganych zjawisk.
- Wykształcenie umiejętności planowania rozwiązania problemu matematycznego i realizacji tego planu.
- Kształtowanie wyobraźni przestrzennej.
- Rozwijanie umiejętności czytania ze zrozumieniem różnego rodzaju tekstów zawierających informacje ilościowe (w tym diagramów, wykresów, tabel itp.) oraz sporządzania takich tekstów.
- Rozwijanie umiejętności prawidłowej interpretacji tekstów zawierających dane statystyczne.

- Przygotowanie do korzystania z nowoczesnych technologii informacji.
- Kształtowanie umiejętności używania symboli, schematów, rysunków i wykresów.
- Wykształcenie podstaw matematycznych do zrozumienia zjawisk przyrodniczych, społecznych, technicznych i gospodarczych.

### **Wychowanie**

- Kształtowanie pozytywnego stosunku do podejmowania aktywności intelektualnej i rozbudzanie ciekawości intelektualnej.
- Nauczanie dobrej organizacji pracy, systematyczności i pracowitości.
- Wykształcenie umiejętności prowadzenia merytorycznej dyskusji mającej na celu wspólne dojście do optymalnego rozwiązania.
- Kształtowanie szacunku dla poglądów innych i umiejętności obrony własnych poglądów.
- Wykształcenie krytycznego stosunku do własnych poglądów i umiejętności zmiany zdania pod wpływem racjonalnych argumentów.
- Nauczenie zrozumiałego przedstawiania informacji.
- Wykształcenie umiejętności argumentowania.
- Wykształcenie umiejętności planowania pracy.
- Wykształcenie umiejętności współpracy w grupie.
- Umożliwienie podejmowania świadomych decyzji dotyczących społeczeństwa, gospodarki i środowiska naturalnego poprzez przekazanie umiejętności będących podstawą rozumienia zjawisk gospodarczych, społecznych i przyrodniczych.
- Umożliwienie świadomego i krytycznego korzystania z danych statystycznych.
- Wykształcenie umiejętności samodzielnego zdobywania informacji i samokształcenia

### **III. ZAŁOŻENIA PROGRAMU**

Program przeznaczony jest zarówno dla uczniów realizujących zakres podstawowy, jak i uczących się również w klasach z zakresem rozszerzonym. Może być wykorzystywany w dwóch sytuacjach:

- uczniowie realizujący tylko zakres podstawowy uczą się w osobnych klasach niż uczniowie realizujący także zakres rozszerzony,
- wszyscy uczniowie wspólnie uczą się materiału z zakresu podstawowego, a niektórzy z nich poznają materiał zakresu rozszerzonego na dodatkowych zajęciach.

## **IV. REALIZACJA ZAŁOŻEŃ PROGRAMOWYCH**

### **1. Organizacja zajęć**

Zajęcia odbywają się 2 razy w tygodniu po 1 godzinie lekcyjnej. W czasie ferii zimowych przewidziano 2 spotkania po 3 godziny lekcyjne.

### **2. Pomoce naukowe:**

- podręcznik
- zbiór zadań
- kalkulatory naukowe
- zestaw komputerowy z dostępem do platformy edukacyjnej

### **3. Procedury osiągnięcia celów**

#### **UWAGI OGÓLNE**

Wybierając sposoby osiągnięcia celów edukacyjnych, należy uwzględniać możliwości i zainteresowania uczniów, nie zapominając o zasadzie stopniowania trudności.

Skuteczne nauczanie wymaga stosowania zróżnicowanych metod pracy. Poza tradycyjnymi formami, jak praca równym frontem czy praca z podręcznikiem, warto stosować jak najczęściej takie metody, które wymagają aktywnej postawy uczniów. Należy do nich praca w grupie. Podczas zajęć zorganizowanych w ten sposób uczniowie nie tylko zdobywają umiejętności matematyczne, ale także uczą się współdziałania i komunikacji w grupie.

Ważną metodą pracy jest metoda projektu, w której uczniowie wykonują (w grupach lub indywidualnie) prace długoterminowe. Uczy ona samodzielności, odpowiedzialności, organizacji pracy, a także prawidłowego wnioskowania.

Wybrane przez nauczyciela metody pracy muszą uwzględniać także korzystanie z nowoczesnych technik informacji. Kierować się tu trzeba możliwościami technicznymi, warto jednak dążyć do szerszego wykorzystania zwłaszcza komputerów i kalkulatorów graficznych, a także zwykłych kalkulatorów, które obecnie są już powszechnie dostępne.

#### **PROCEDURY OSIĄGANIA CELÓW SZCZEGÓŁOWYCH**

Jak najwięcej czasu należy poświęcać na ćwiczenie podstawowych umiejętności. Szczególną uwagę należy zwrócić na umiejętności praktyczne, jak szacowanie, przybliżenia czy obliczenia procentowe.

W kształtowaniu umiejętności posługiwania się obiektami geometrycznymi, zwłaszcza w wypadku stereometri, należy posługiwać się modelami figur.

Nowe pojęcia i fakty warto przynajmniej w części przypadków wprowadzać jako uogólnienie doświadczeń (wykonania obliczeń, rysunków, pomiarów). Dopiero wówczas można — jeśli pozwalają na to możliwości uczniów — dowodzić twierdzeń. Oczywiście nie umniejsza to znaczenia, jakie ma rozróżnianie hipotezy (opartej na kilku przypadkach) od udowodnionego twierdzenia.

Wszystkie pojęcia matematyczne poznawane na IV etapie edukacyjnym powinny być przedstawione także w zastosowaniach do sytuacji z przyrody, ekonomii, techniki czy życia codziennego. Dotyczy to w szczególności różnego rodzaju funkcji (w tym ciągów), które przedstawiać należy nie tylko jako przykłady przyporządkowań, ale także opis zależności. W wypadku tego celu szczegółowego szczególnie ważna jest wspomniana już wcześniej metoda projektu.

Wprowadzić w IV etapie edukacyjnym znacznie rzadziej niż w gimnazjum stosować będziemy gry dydaktyczne, ale warto rozważyć stosowanie także tej formy pracy.

Do rozwiązywania zadań dotyczących sytuacji rzeczywistych (przyroda, technika, ekonomia) uczniowie powinni wykorzystywać kalkulatory a w miarę możliwości technicznych — także komputery i kalkulatory graficzne.

Lekcje z zakresu rozszerzonego będą różnić się od zakresu podstawowego przede wszystkim poziomem ścisłości. Uczniowie powinni umieć zrozumieć prosty dowód twierdzenia zarówno na podstawie tekstu podręcznikowego, jak i wykładu nauczyciela. Dlatego należy stworzyć im możliwość percypowania takich tekstów zarówno w formie pisemnej, jak ustnej

Ważne jest, aby uczniowie zdobyli umiejętność samokształcenia i samodzielnego poszukiwania informacji. Dlatego kształcenie musi przewidywać wytworzenie sytuacji, w których uczniowie będą ćwiczyć te umiejętności. Do tego celu nadaje się np. metoda projektu.

## V. TREŚCI NAUCZANIA

Dział programowy	Forma kształcenia	Zakres tematyczny	Liczba godzin
1. Liczby i ich zbiory	konwersatoria	a) zbiór, suma, iloczyn i różnica zbiorów;	2
		b) podstawowe prawa rachunku zdań;	2
		c) zbiór liczb rzeczywistych	2

		<p>i jego podzbiory, liczby naturalne (liczby pierwsze), liczby całkowite, wymierne i niewymierne, rozwinięcie dziesiętne liczby rzeczywistej;</p> <p>d) prawa dotyczące działań arytmetycznych na liczbach rzeczywistych;</p> <p>e) definicja potęgi o wykładniku wymiernym oraz prawa działań na potęgach o wykładniku wymiernym;</p> <p>f) oś liczbowa i układ współrzędnych na płaszczyźnie;</p> <p>g) definicja przedziału liczbowego na osi oraz definicja sumy, iloczynu i różnicy przedziałów,</p> <p>h) definicja wartości bezwzględnej;</p> <p>i) zasada indukcji matematycznej;</p> <p>j) metody rozwiązywania i interpretację geometryczną równań i nierówności z wartością bezwzględną;</p> <p>k) prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>1</p> <p>2</p> <p>2</p> <p>2</p> <p>2</p> <p>2</p>
2. Wielomiany i funkcje wymierne	konwersatoria	<p>a) definicja i własności funkcji liniowej;</p> <p>b) definicję i własności funkcji kwadratowej, jej wykres i miejsca zerowe;</p> <p>c) wzory Viéte'a;</p> <p>d) sposoby rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych z parametrem;</p> <p>e) definicja wielomianu i prawa dotyczące działań na wielomianach: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie;</p> <p>f) sposoby rozkładu wielomianu na czynniki;</p> <p>g) twierdzenie Bézouta;</p> <p>h) definicja funkcji homograficznej i jej własności;</p>	<p>2</p> <p>4</p> <p>1</p> <p>4</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>1</p> <p>1</p>



		i) zasady wykonywania działań na wyrażeniach wymiernych;	2
		j) sposoby rozwiązywania równań wielomianowych oraz równań i nierówności z funkcją homograficzną;	2
		j) definicja funkcji wymiernej oraz metody rozwiązywania równań i nierówności wymiernych;	2
		k) dwumian Newtona	1
3. Funkcje trygonometryczne	konwersatoria	a) definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;	3
		b) pojęcie miary łukowej kąta oraz definicje, własności i wykresy funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;	4
		c) tożsamości trygonometryczne;	2
		d) wzory redukcyjne;	1
		e) sposoby rozwiązywania równań trygonometrycznych.	2
4. Ciągi liczbowe	konwersatoria	a) definicję ciągu liczbowego;	3
		b) definicję ciągu arytmetycznego i geometrycznego, wzór na n-ty wyraz, wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;	6
		c) procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów;	2
		d) przykłady ciągów zdefiniowanych rekurencyjnie;	1
		e) definicję granicy ciągu liczbowego oraz sposoby obliczania granic ciągów;	2
		f) pojęcie sumy szeregu geometrycznego.	2
5. Ciągłość i pochodna funkcji	konwersatoria	a) pojęcie funkcji ciągłej;	1
		b) pojęcie pochodnej, jej interpretacja geometryczna i fizyczna;	1
		c) wzory do obliczania	2

		<p> pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych;</p> <p> d) związek pochodnej z istnieniem ekstremum i z monotonicznością funkcji.</p>	3
6. Planimetria	konwersatoria	<p> a) własności czworokątów wypukłych, twierdzenie o okręgu wpisanym w czworokąt i okręgu opisanym na czworokącie;</p> <p> b) związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p> c) pojęcie osi symetrii i środka symetrii figury;</p> <p> d) twierdzenie Talesa i jego związek z podobieństwem;</p> <p> e) cechy podobieństwa trójkątów,</p> <p> f) twierdzenie sinusów i cosinusów;</p> <p> g) pojęcia: symetria osiowa, przesunięcie, obrót, symetria środkowa oraz własności tych przekształceń;</p> <p> h) definicję wektora, sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę;</p> <p> i) definicję i własności jednokładności.</p>	4 4 1 4 2 2 2 2 1
7. Stereometria	konwersatoria	<p> a) graniastosłupy, ostrosłupy, walce, stożki i kule;</p> <p> b) pojęcie kąta nachylenia prostej do płaszczyzny i kąta dwuściennego;</p> <p> c) związki miarowe w bryłach z zastosowaniem trygonometrii;</p> <p> d) przekroje płaskie graniastosłupów i ostrosłupów;</p> <p> e) pojęcie wielościanu foremnego.</p>	2 1 11 6 2
8. Rachunek prawdopodobieństwa	konwersatoria	<p> a) pojęcia kombinatoryczne: permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń;</p> <p> b) pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności;</p> <p> c) elementy statystyki opisowej:</p> <p> średnia arytmetyczna, średnia</p>	6 8 6

		ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe (liczone z próby).	
--	--	--	--

## VI. PRZEWIDYWANE OSIĄGNIĘCIA UCZESTNIKÓW

Uczeń powinien umieć :

W opisie uwzględniono podział umiejętności pomiędzy klasy oraz klasyfikacje ich na odpowiednie poziomy wymagań: konieczne — ocena dopuszczająca, podstawowe — ocena dostateczna, rozszerzające — ocena dobra, dopełniające — ocena bardzo dobra. Klasyfikacja podwójna, np. K/P, oznacza, że prostsze zadania dotyczące danego zagadnienia należy traktować jako wymagane na poziomie K, a trudniejsze — P.

Od uczniów realizujących program zakresu rozszerzonego wymagamy na poziomie D znajomości przynajmniej niektórych dowodów twierdzeń z zakresu podstawowego.

Za wymagania na poziomie W należy uznać spełnienie wszystkich wymagań z poziomów niższych oraz umiejętność rozwiązywania zadań znacznie wykraczających poza wymagania na poziomie D stopniem trudności lub tematyką.

Kursywą oznaczono wymagania dotyczące rozszerzenia.

WYMAGANIA	KLASA		
	I	II	III
<b>LICZBY RZECZYWISTE</b>			
Uczeń:			
— podaje przykłady liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych, niewymiernych; pierwszych i złożonych, potrafi zakwalifikować daną liczbę do jednego z tych rodzajów	K		
— zna pojęcie osi liczbowej	K		
— zamienia skończone rozwinięcie dziesiętne na ułamek zwykły i na odwrót	K		
— rozumie pojęcie rozwinięcia okresowego, znajduje rozwinięcia dziesiętne ułamków zwykłych	P/R		
— wie, że suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych są liczbami wymiernymi	P		
— umie pokazać na przykładach, że suma (różnica, iloczyn i iloraz) liczb niewymiernych może być zarówno liczbą wymierną, jak i niewymierną	D		
— wykonuje działania na liczbach wymiernych: cztery działania arytmetyczne, potęgi o wykładniku całkowitym i postaci $1/n$ ; także z użyciem kalkulatora	K		
— znajduje wartość bezwzględną liczby	P		
— upraszcza pierwiastki i znajduje ich przybliżone wartości za	K		

pomocą kalkulatora			
— upraszcza wyrażenia zawierające potęgi o wykładniku wymiernym i pierwiastki	P/R		
— usuwa niewymierności z mianownika	P/R		
— zapisuje i odczytuje liczby w notacji wykładniczej	P		
— posługuje się notacją wykładniczą w obliczeniach	R/D		
— oblicza procent danej liczby	K		
— zna pojęcie punktu procentowego	K		
— zwiększa i zmniejsza liczbę o dany procent, porównuje liczby, używając procentów	P		
— rozwiązuje zadania z procentami dotyczące m.in. płac, cen, podatków, lokat i kredytów, także z użyciem równań i układów równań liniowych	R/D		
— zaokrągla liczby z podaną dokładnością	K		
— szacuje wyniki działań i wielkości ze świata rzeczywistego	P/R		
— wykorzystuje umiejętność szacowania w bardziej złożonych sytuacjach, oblicza błąd względny	D		
— oblicza wartość logarytmu:			
• w najprostszych wypadkach (np. $\log 24$ )		K	
• dziesiętnego lub naturalnego za pomocą kalkulatora		P	
• dowolnego za pomocą kalkulatora (ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu)		R	
— zna twierdzenie o rozkładzie liczby naturalnej na czynniki pierwsze	R		
— zna twierdzenie o niewymierności pierwiastka kwadratowego z liczby 2	K		

## RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Uczeń:

— oblicza wartość liczbową wyrażenia algebraicznego	K		
— przekształca sumy i różnice wielomianów	K		
— zna wzory skróconego mnożenia	K		
— rozwiązuje równania i nierówności liniowe oraz układy równań liniowych i zadania z treścią prowadzące do takich równań, nierówności i układów	K/P		
— rozwiązuje równania niepełne kwadratowe	K		
— rozwiązuje zadania prowadzące do równań niepełnych kwadratowych	P		
— rozwiązuje równania kwadratowe	P		
— rozwiązuje zadania prowadzące do równań kwadratowych	R		
— rozwiązuje nierówności kwadratowe	P		
— rozwiązuje zadania prowadzące do nierówności kwadratowych	D		
— sprawdza w prostych wypadkach zależność liczby rozwiązań równania kwadratowego z parametrem	K		
— rozwiązuje równania kwadratowe z parametrem	P		
— rozwiązuje nierówności kwadratowe z parametrem	R/D		
— oblicza sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego	K		

— rozwiązuje zadania z parametrem z zastosowaniem wzorów Viete'a	P/R		
— zna dowód wzorów Viete'a	D		
— rozwiązuje proste równania i nierówności z wartością bezwzględną	R		
— rozpoznaje wielomiany, dodaje je, odejmuje i mnoży przez liczbę		K	
— mnoży wielomian przez dwumian		P	
— mnoży wielomiany		R	
— dzieli wielomian przez dwumian		P	
— dzieli wielomiany		R	
— znajduje pierwiastki wielomianu zapisanego w postaci iloczynu czynników liniowych i kwadratowych		P	
— rozwiązuje proste równania wielomianowe		P	
— stosuje twierdzenie Bezouta do znajdowania pierwiastków wielomianu		R/D	
— rozwiązuje proste nierówności wielomianowe		P-R	
— stosuje twierdzenie o postaci wymiernych pierwiastków wielomianu o współczynnikach całkowitych		P	
— dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne:			
• o jednakowych mianownikach			K
• o różnych mianownikach			P
— wyznacza dziedzinę wyrażenia wymiernego			R
— mnoży i dzieli wyrażenia wymierne			D
— wyznacza dziedzinę funkcji wymiernej			K
— rozwiązuje równania wymierne			P
— rozwiązuje proste nierówności wymierne			R
— korzysta ze wzorów na logarytm iloczynu, ilorazu i potęgi		K	
— korzysta ze wzoru na zamianę podstawy		P	
— upraszcza wyrażenia algebraiczne zawierające logarytmy		R	
<b>FUNKCJE</b>			
Uwaga. Funkcje trygonometryczne oraz ciągi zostały ujęte w osobnych działach.			
— odczytuje z wykresu wartości funkcji, argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość, miejsca zerowe i przedziały, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne	K		
— odczytuje z wykresu dziedzinę, zbiór wartości, wartość najmniejszą i największą, przedziały monotoniczności	P/R		
— podaje przykłady funkcji	P		
— posługuje się różnymi sposobami opisu funkcji	R/D		
— znając własności zależności między wielkościami, szkicuje wykres funkcji opisującej tę zależność	D		
— rozpoznaje funkcje parzyste, nieparzyste i okresowe na podstawie wykresów	K		
— uzupełnia wykres funkcji wiedząc, że jest ona parzysta, nieparzysta lub okresowa	P		
— rozpoznaje funkcje parzyste, nieparzyste, różnowartościowe na	R		

<i>podstawie wzoru</i>			
— potrafi ograniczyć dziedzinę tak, aby funkcja była różnowartościowa	R		
— dowodzi prostych własności (np. suma funkcji parzystych jest parzysta), dowodzi różnowartościowości funkcji na podstawie wzoru, rozwiązuje proste równania i nierówności, korzystając z własności funkcji	D		
— rysuje wykres funkcji liniowej	K		
— wyznacza wzór funkcji liniowej, której wykres spełnia dane warunki	P		
— rozwiązuje zadania dotyczące funkcji liniowej i jej zastosowań	R/D		
— z wykresu funkcji $f$ uzyskuje wykres funkcji:			
• $f(x) + a$	K		
• $f(x - a)$	P		
• $f(x - a) + b$	R		
— z wykresu funkcji $f$ uzyskuje wykres funkcji:			
• $af(x)$		K	
• $f(ax)$		P/R	
• złożone z powyższych typów		R/D	
— rysuje wykres funkcji kwadratowej postaci:			
• $y = ax^2 + q$	K		
• $y = a(x - p)^2 + q$	P		
• $y = ax^2 + bx + c$ (szkic bez wyznaczenia współrzędnych wierzchołka)	P		
• $y = ax^2 + bx + c$	R		
— rozwiązuje zadania z treścią prowadzące do poszukiwania ekstremum funkcji kwadratowej	R/D		
— szkicuje wykres dowolnej funkcji wykładniczej		K	
— wyjaśnia, w jaki sposób własności funkcji postaci $y = a^x$ zależą od liczby $a$ ; odczytuje własności funkcji wykładniczej z jej wykresu		P/R	
— oblicza wartość wielkości opisanej podaną funkcją wykładniczą		K	
— wykorzystuje własności funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań opisywanych za pomocą takich funkcji		P/R	
— szkicuje wykres dowolnej funkcji logarymicznej i odczytuje z niego jej własności		K/P	
— wyjaśnia, w jaki sposób własności funkcji $y = \log(ax)$ zależą od liczby $a$		R	
— wykorzystuje logarytmy w badaniu zjawisk opisywanych za pomocą funkcji wykładniczej		P/R	
— rozumie rolę logarytmów w skalach logarymicznych (pH, dB)		D	
— rysuje wykres funkcji homograficznej postaci: $y = a/x$ i odczytuje z niego własności funkcji i zjawisk opisanych przez tę funkcję			K
<b>CIĄGI LICZBOWE</b>			
Uczeń:			

— rozumie intuicyjnie pojęcie ciągu, oblicza dany wyraz ciągu		K	
— znajduje regułę, którą można opisać ciąg, którego kolejne wyrazy zostały podane i w prostych wypadkach zapisuje ją wzorem		P/R	
— rozumie intuicyjnie pojęcie ciągu arytmetycznego (geometrycznego), podaje i rozpoznaje przykłady		K	
— potrafi utworzyć kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (geometrycznego), znając pierwszy wyraz i różnicę (iloraz)		P	
— zna wzór ogólny ciągu arytmetycznego (geometrycznego), potrafi znaleźć wzór takiego ciągu, mając dane jego kolejne wyrazy		R	
— znajduje wzór ciągu arytmetycznego (geometrycznego) na podstawie podanych informacji		D	
— korzystając z własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego), bada zjawiska opisane przez taki ciąg		R/D	
— oblicza odsetki lokat:			
rocznych według podanego oprocentowania		K	
w procencie składanym		P	
w różnych okresach kapitalizacji		R	
— porównuje oferty banków i instytucji finansowych		D	
<b>PLANIMETRIA</b>			
Uczeń:			
— zna i rozumie pojęcia, zna własności figur:			
• punkt, prosta, odcinek, półprosta		K	
• równoległość, prostopadłość		K	
• punkty współliniowe, symetralna odcinka		P	
• kąty przyległe, wierzchołkowe, naprzemianległe		R	
• trójkąt równoboczny, równoramienny		K	
• ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny		K	
• kwadrat, prostokąt, równoległobok, romb, trapez		K	
• promień, cięciwa, średnica, łuk		K	
• kąt środkowy		K	
• kąt wpisany		P	
• okrąg opisany na wielokącie, okrąg wpisany w wielokąt			P
• oś symetrii, środek symetrii		K	
• figura symetryczna do danej		K	
— wykonuje konstrukcje:			
• prostej równoległej (prostopadłej) do danej przechodzącej przez dany punkt		R	
• symetralnej odcinka		R	
• związane z trójkątami (łatwe)		R/D	
• okręgu wpisanego w dany trójkąt			P
• okręgu opisanego na danym trójkącie			P
• średnicy okręgu, środka okręgu, stycznej do okręgu przechodzącej przez dany punkt		D	
• figury symetrycznej do danej			P
— zna nierówność trójkąta i wykorzystuje ją do rozwiązywania zadań		R/D	
— wie, ile wynosi suma kątów trójkąta i czworokąta i wykorzystuje ten fakt do rozwiązywania zadań		K/P	
— umie udowodnić te fakty		D	

— oblicza pola i obwody:			
• trójkąta i równoległoboku, koła	K		
• trapezu, rombu o danych przekątnych	P		
• wycinka koła	R		
— nazywa wzajemne położenie okręgów oraz prostej i okręgu, wykorzystuje te pojęcia w rozwiązywaniu zadań	P/R/ D		
— rozwiązuje różne zadania, wykorzystując:			
• twierdzenie Pitagorasa	R/D		
• twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym	R/D		
• pola i obwody figur	R/D		
• <i>okręgi wpisane i opisane na wielokątach</i>		R/D	
• <i>warunek wpisalności okręgu w czworokąt i opisalności okręgu na czworokącie</i>		D	
• cechy podobieństwa trójkątów		D	
• <i>jednokładność</i>		R/D	
— wykorzystuje twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań:			
• prostych, korzystających z jednej proporcji		K	
• bardziej skomplikowanych		P/R/ D	
— rozumie intuicyjnie pojęcie podobieństwa		K	
— oblicza wymiary figury podobnej do danej w danej skali		K	
— bada, czy dane prostokąty są podobne		P	
— znajduje skalę podobieństwa dwóch figur podobnych		P	
— zna cechy podobieństwa trójkątów i sprawdza, czy dane trójkąty są podobne		R	
— <i>umie skonstruować obraz figury w jednokładności</i>		P	
— <i>umie stwierdzić, czy figury są jednokładne i wskazać środek i skalę jednokładności</i>		R	
— <i>potrafi uzasadniać proste fakty geometryczne, np. twierdzenie o sumie kątów trójkąta</i>	K		
— <i>dowodzi prostych twierdzeń geometrycznych</i>	P/R		
— <i>rozumie pojęcie twierdzenia, odróżnia twierdzenie proste od odwrotnego</i>	P/R		
— <i>prowadzi bardziej skomplikowane dowody, wykorzystując np. porównywanie kątów, kąty środkowe i wpisane, porównywanie pól, cechy przystawania i cechy podobieństwa; prowadzi proste dowody nie wprost</i>		D	
— <i>przesuwa figurę o dany wektor</i>		K	
— <i>zna i rozumie pojęcia: wektor zerowy, wektory przeciwne, wektory równe</i>		P	
— <i>dodaje wektory i mnoży je przez liczbę, wykorzystuje te umiejętności do rozwiązywania zadań</i>		R/D	
— <i>stosuje twierdzenie o związkach miarowych między odcinkami stycznych i siecznych.</i>		R/D	
<b>GEOMETRIA ANALITYCZNA</b>			
Uczeń:			
— <i>zaznacza w układzie współrzędnych zbiór punktów spełniających warunek typu:</i>			



• $x > 0$ $y \leq 4$		K	
• $y < 2x + 3$		P	
• $x + y \geq 5$		R	
• <i>koniunkcja lub alternatywa nierówności liniowych</i>		R	
— rysuje prostą o danym równaniu		P	
— wyznacza równanie prostej spełniającej dane warunki		R/D	
— rozwiązuje graficznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi		K	
— wyjaśnia związek pomiędzy liczbą rozwiązań układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi a wzajemnym położeniem prostych		P	
— <i>rozwiązuje układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi z parametrem</i>		P/R	
— oblicza odległość między punktami o danych współrzędnych		K	
— rozwiązuje zadania związane z odległością punktów w układzie współrzędnych		R/D	
— rysuje okrąg o równaniu danym w postaci:			
• $x^2 + y^2 = r^2$		K	
• $(x^2 - a^2) + (y^2 - b^2) = r^2$		P	
• $x^2 + y^2 + 2ax + 2bx + c = 0$		D	
— sprawdza analitycznie np. czy dany punkt leży na danym okręgu		P	
— rozwiązuje proste zadania dotyczące równania okręgu jak np. znajdowanie punktów wspólnych prostej i okręgu		R	
— <i>rozwiązuje trudniejsze zadania dotyczące równania okręgu, także z parametrem</i>		D	
— <i>znajduje współrzędne narysowanego wektora</i>		K	
— <i>rysuje przykład wektora o danych współrzędnych</i>		K	
— <i>przesuwa figurę o dany wektor</i>		P	
— <i>znajduje współrzędne wektora o danym początku i końcu</i>		P	
— <i>określa współrzędne wektora przeciwnego do danego</i>		P	
— <i>oblicza długość wektora o danych współrzędnych</i>		P	
— <i>oblicza współrzędne sumy wektorów i iloczynu wektora przez liczbę</i>		R	
— <i>wykorzystuje działania na wektorach do rozwiązywania zadań</i>		R/D	
<b>TRYGONOMETRIA</b>			
<b>FUNKCJE KĄTA OSTREGO</b>			
Uczeń:			
— znając długości boków trójkąta prostokątnego, potrafi obliczyć funkcje trygonometryczne jego kątów		K	
— wykonuje proste rachunki z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych, także z zastosowaniem kalkulatora		P/R	
— stosuje funkcje trygonometryczne kąta ostrego do:			
• prostych zadań geometrycznych		K	
• prostych sytuacji życia codziennego		P	
• trudniejszych zadań		R	
— samodzielnie rozpoznaje sytuacje, w których może zastosować		D	

funkcje trygonometryczne			
— korzysta z podanych wartości funkcji kątów $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ do rozwiązywania prostych zadań	K		
— zna wartości funkcji tych kątów i wykorzystuje je do rozwiązywania zadań	P/R/ D		
— zna „jedynkę trygonometryczną” i korzysta z niej do wyznaczenia wartości jednej z funkcji, gdy dana jest inna	P		
<b>FUNKCJE DOWOLNEGO KĄTA</b>			
— zamienia na miarę łukową i z miary łukowej na stopnie:			
• wielokrotności kąta prostego		K	
• $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$		P	
• dowolne kąty		R	
— oblicza wartości funkcji trygonometrycznych:			
• za pomocą kalkulatora		K	
• dla wielokrotności kąta prostego		P	
• sprowadzając kąt do pierwszej ćwiartki		R	
— rozumie związek pomiędzy współczynnikiem kierunkowym funkcji liniowej a kątem nachylenia jej wykresu		R	
— szkicuje wykres funkcji:			
• sinus, cosinus		K	
• tangens, cotangens		P	
— odczytuje własności funkcji trygonometrycznych z ich wykresów		R	
— podaje przykłady zjawisk, w których opisie występuje sinusoida		R	
— odczytuje z wykresu informacje na temat takich zjawisk		P	
— rozwiązuje dla kątów z przedziału $[0; 2\pi]$ równania:			
• postaci $\sin x = k$ lub $\cos x = k$		K	
• dające się sprowadzić (np. za pomocą wzorów redukcyjnych) do postaci $\sin x = k$ lub $\cos x = k$ lub $\operatorname{tg} x = k$ lub $\operatorname{ctg} x = k$		P	
• inne proste równania trygonometryczne		R	
— rozwiązuje proste nierówności trygonometryczne		R	
— za pomocą twierdzenia sinusów oblicza długość boku lub miarę kąta w trójkącie		K	
— za pomocą twierdzenia cosinusów oblicza długość boku trójkąta		K	
— wykorzystuje twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów do rozwiązywania zadań		P/R/ D	
— umie udowodnić przynajmniej jedno spośród twierdzeń: sinusów i cosinusów		D	
<b>STEREOMETRIA</b>			
Uczeń:			
— rozumie pojęcie równoległości i prostopadłości w przestrzeni			P
— zna twierdzenie o trzech prostych prostopadłych			R
— rozpoznaje następujące rodzaje brył:			
• sześcian, prostopadłościan, graniastosłup, ostrosłup			K
— potrafi określić liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian			K
— oblicza pola powierzchni i objętości:			

• prostopadłościanów i ostrosłupów o podstawie kwadratu			K
• graniastosłupów i ostrosłupów w prostych zadaniach geometrycznych			P
• walca i stożka w najprostszych sytuacjach geometrycznych			K
• kuli			P
— rysuje siatki graniastosłupów i ostrosłupów, odpowiada na proste pytania dotyczące bryły na podstawie jej siatki i wykorzystuje tę umiejętność do rozwiązywania zadań dotyczących sytuacji rzeczywistych			R
— stosuje pojęcia: graniastosłup prosty, graniastosłup prawidłowy, ostrosłup prawidłowy			R
— stosuje pola i objętości brył do rozwiązywania zadań			R/D
— rozwiązuje trudniejsze zadania dotyczące wielościanów i brył obrotowych			D
— wskazuje w graniastosłupie prostym kąty: pomiędzy krawędziami, pomiędzy krawędziami a przekątnymi, pomiędzy przekątnymi			K
— wskazuje w ostrosłupie kąty pomiędzy krawędziami oraz między wysokością a krawędzią			P
— wskazuje kąty: pomiędzy wysokością a ścianą boczną, pomiędzy ścianą boczną a podstawą, pomiędzy wysokością ściany bocznej a wysokością bryły itp.			R
— rozwiązuje zadania dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów bez wykorzystania funkcji trygonometrycznych			K
— rozwiązuje zadania dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów polegające na wykorzystaniu pojedynczej funkcji trygonometrycznej			P
— rozwiązuje zadania dotyczące graniastosłupów i ostrosłupów oraz brył obrotowych polegające na wykorzystaniu funkcji trygonometrycznych			R/D
— rozumie pojęcie przekroju, szkicuje przekroje graniastosłupów równoległe i prostopadłe do podstawy i rozwiązuje proste zadania dotyczące tych przekrojów			K
— szkicuje przekroje ostrosłupów i rozwiązuje zadania dotyczące tych przekrojów, także z wykorzystaniem trygonometrii			P
— szkicuje przekroje brył i rozwiązuje proste zadania dotyczące tych przekrojów, także z wykorzystaniem trygonometrii			R/D
<b>KOMBINATORYKA I PRAWDOPODOBIENSTWO</b>			
Uczeń:			
— rozumie intuicyjnie pojęcie prawdopodobieństwa i jego związek z częstością			K
— oblicza wprost z definicji prawdopodobieństwa zdarzeń			
• najprostszych, np. otrzymanie parzystej liczby oczek w rzucie kostką			K
• prostych, przy rzucie dwiema kostkami lub dwiema monetami			P
• sumy zdarzeń i zdarzenia przeciwnego			R
— zna pojęcia: zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, zdarzenie przeciwne			P

— znajduje liczbę możliwych wyników przy kilkukrotnym rzucie kostką i w innych wypadkach o podobnej skali trudności,			P
— oblicza liczbę możliwości z zasady mnożenia w bardziej skomplikowanych wypadkach i wykorzystuje wyniki do obliczania prawdopodobieństwa			R/D
— <i>oblicza liczbę możliwych ustawień n różnych elementów, stosuje tę umiejętność do obliczania prawdopodobieństwa; zna symbol n!</i>			K
— <i>rozwiązuje zadania z obliczeniami liczby permutacji z zastosowaniem ich do obliczania prawdopodobieństwa</i>			P/R
— <i>oblicza liczbę wariacji z powtórzeniami i bez, stosuje tę umiejętność do obliczania prawdopodobieństwa</i>			P
— <i>rozwiązuje proste zadania z obliczaniem liczby wariacji (z powtórzeniami i bez) i zastosowaniem ich do obliczania prawdopodobieństwa</i>			P/R
— <i>oblicza w prostych wypadkach liczbę kombinacji i stosuje tę umiejętność do obliczania prawdopodobieństwa w prostych przypadkach</i>			P
— <i>rozwiązuje trudniejsze zadania z obliczaniem liczby kombinacji i zastosowaniem ich do obliczania prawdopodobieństwa, w szczególności zadania dotyczące gier typu toto-lotka</i>			R/D
— <i>rozwiązuje zadania wymagające jednoczesnego korzystania z permutacji, wariacji i kombinacji i stosowania ich do obliczania prawdopodobieństwa</i>			D
<b>STATYSTYKA OPISOWA</b>			
Uczeń:			
— odczytuje informacje z tabel, diagramów słupkowych i kołowych		K/P	
— wyciąga z takich informacji wnioski, wykonując odpowiednie obliczenia		R/D	
— oblicza:			
• średnią arytmetyczną danych liczb		K	
• odchylenie standardowe danych liczb		K	
• modę i medianę danych liczb		P	
• średnią arytmetyczną danych zapisanych w postaci tabeli lub histogramu		P	
• średnią ważoną danych liczb		R	
— rozumie sens intuicyjny odchylenia standardowego		K	
— wyciąga wnioski z informacji w postaci średnich i odchylenia standardowego		P/R/ D	
— rozumie różnice pomiędzy różnymi rodzajami średnich i ograniczenia w ich stosowaniu		D	
— przedstawia dane w postaci tabel i diagramów		K/P	
— opracowuje statystycznie nieskomplikowany problem		R	
— stawia prosty problem i opracowuje go statystycznie		D	

## VII. SPOSOBY OCENIANIA UCZESTNIKÓW

W ocenianiu wykorzystany zostanie powyższy opis założonych osiągnięć.

Ocena pracy i osiągnięć ucznia powinna mobilizować go do zdobywania wiedzy i kształtowania umiejętności, dawać radość i satysfakcję. Dlatego powinna wykazywać mocne strony ucznia i pełnić rolę wyłącznie wspierającą. Proponuje się zatem:

- ocenę słowną z motywacją,
- wspólną analizę wykonanej pracy,
- wspólne wyciąganie wniosków,
- pochwałę samodzielności, oryginalności i pomysłowości,
- pochwałę dobrej współpracy w grupie,
- test po każdym roku trwania zajęć.

### **VIII. EWALUACJA PROGRAMU**

Monitorowanie postępów w nauce uczniów.

Sprawdzanie poziomu nabytej wiedzy poprzez rozwiązywanie zadań za pośrednictwem platformy edukacyjnej.

### **IX. BIBLIOGRAFIA**

Matematyka I. Podręcznik dla liceum i technikum. Zakres podstawowy —A. Jatczak, M. Ciołkosz, P. Ciołkosz, Wyd. Operon, Gdynia 2007.

Matematyka II. Podręcznik dla liceum i technikum. Zakres podstawowy —A. Jatczak, M. Ciołkosz, P. Ciołkosz, Wyd. Operon, Gdynia 2007.

Matematyka III. Podręcznik dla liceum i technikum. Zakres podstawowy —A. Jatczak, M. Ciołkosz, P. Ciołkosz, Wyd. Operon, Gdynia 2007.

Matematyka I. Ćwiczenia —M. Karpiński, M. Dobrowolska, J. Lech

**Podstawa programowa z przedmiotu matematyka**



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

### **Tezy do programu przedstawili:**

Jacek Daniel

Ryszard Jagnicki

Teresa Maryjańska

### **Korekta i opracowanie:**

mgr Elżbieta Miterka

### **Analiza statystyczna wyników egzaminu gimnazjalnego oraz ocen końcowych z matematyki:**

mgr Agnieszka Szumera

### **Nadzór merytoryczny i zatwierdzenie:**

prof. dr hab. Zdzisław Rychlik

