KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom podstawowy

Ciągi liczbowe

Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przed wprowadzeniem pewnych klas ciągów przypomnijmy, czym jest ciąg liczbowy.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ciąg liczbowy jest szczególnym przypadkiem funkcji.
Przypomnijmy więc, jak definiujemy funkcję.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wiadomo, że funkcją nazywamy każde takie odwzorowanie, które każdemu elementowi pewnego zbioru X (nazywanego dziedziną funkcji) przyporządkowuje element zbioru Y (zbiór Y nazywany przeciwdziedziną funkcji).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Aby poprawnie określić funkcję, należy podać jej dziedzinę, przeciwdziedzinę oraz przepis (sposób przyporządkowania wszystkim elementom dziedziny pewnych elementów przeciwdziedziny).

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czy potrafisz podać przykłady funkcji?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 1. *Rozważmy funkcję f odwzorowującą zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych w zbiór liczb rzeczywistych (zapisujemy to w postaci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$), określoną wzorem*

$$f(x) = 3x + 5 \quad \textit{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Przykład 2. *Niech g będzie funkcją odwzorowującą zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych w przedział $[0, \infty)$ ($g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$), określoną wzorem*

$$f(x) = |x - 2| \quad \textit{dla} \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Po tych przykładach możemy wprowadzić ścisłą definicją ciągu liczbowego.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja. ***Ciągiem liczbowym nieskończonym*** *(lub po prostu* ***ciągiem****) nazywamy każdą funkcję określoną na zbiorze* $\mathbb{N}$ *wszystkich liczb naturalnych i przyjmującą wartości z pewnego zbioru liczbowego. Wartości takiej funkcji nazywamy* ***wyrazami*** *ciągu.*

W pewnych przypadkach wygodniej jest się posługiwać pojęciem ciągu skończonego. Jaka jest definicja takiego ciągu?

Definicja. ***Ciągiem liczbowym skończonym*** *lub dokładniej* ***ciągiem*** m-***wyrazowym*** *nazywamy każdą funkcję określoną na zbiorze* $\{1, 2, \ldots, m\}$ *i przyjmującą wartości w pewnym zbiorze liczbowym.*

Podamy teraz przykłady ciągów.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3. *Rozważmy ciąg odwrotności kolejnych liczb naturalnych* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. *Możemy wtedy zapisać*

$$f(n) = \frac{1}{n} \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 4. *Innym przykładem może być ciąg* $(g(n))$ *o wyrazach* $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$. *W tym przypadku mamy*

$$g(n) = (-1)^{n+1} \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 5. *Rozważmy na koniec ciąg kolejnych dziesiętnych przybliżeń z niedomiarem dowolnej liczby niewymiernej, choćby liczby* $\sqrt{2}$. *Mamy więc* $h(1) = 1$; $h(2) = 1,4$; $h(3) = 1,41$; $h(4) = 1,414$; $h(5) = 1,4142$;...

W tym przypadku nie można jednak podać wzoru określającego wyrazy ciągu $(h(n))$.

Czy potrafisz podać inne przykłady ciągów z otaczającej nas rzeczywistości?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga. *Ciągi liczbowe oznacza się zazwyczaj początkowymi literami alfabetu. Ponadto, jeśli* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *jest ciągiem liczbowym, to zamiast symbolu* $a(n)$ *oznaczającego* n*-ty wyraz używać będziemy oznaczenie* a_n*. Ponadto, ciąg nieskończony* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *oznaczać będziemy przez* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, lub też prościej* (a_n)*, zaś na oznaczenie ciągu* m*-wyrazowego* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ *użyjemy symbolu* $(a_n)_{n\in\{1,\ldots,m\}}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przypomnijmy jeszcze pojęcie ciągu monotonicznego. Czy pamiętasz, jak definiuje się ciągi rosnące czy też ciągi malejące?

Definicja. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* ***rosnącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest większy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1} > a_n.$$

W wielu przypadkach wygodniej jest badać znak liczby niż nierówność. Mamy następujący warunek równoważny na to, aby ciąg był rosnący.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga. *Ciąg* (a_n) *jest ciągiem rosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_{n+1} - a_n > 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja. *Ciąg (a_n) nazywamy* ***niemalejącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest niemniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \geqslant a_n.$$

Uwaga. *Ciąg (a_n) jest ciągiem niemalejącym wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Definicja. *Ciąg (a_n) nazywamy* ***malejącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest mniejszy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1} < a_n.$$

Uwaga. *Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} - a_n < 0$.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja. *Ciąg* (a_n) *nazywamy* ***nierosnącym****, jeśli każdy jego wyraz, poza wyrazem pierwszym, jest niewiększy od wyrazu poprzedniego, czyli*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} a_{n+1} \leqslant a_n.$$

Uwaga. *Ciąg* (a_n) *jest ciągiem nierosnącym wtedy i tylko wtedy, gdy* $a_{n+1} - a_n \leqslant 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja. *Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem* ***monotonicznym****, jeśli jest albo ciągiem nierosnącym albo ciągiem niemalejącym.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 6. *Rozważmy ciąg* (a_n) *kolejnych liczb naturalnych, tzn.*

$$a_n = n \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że wtedy

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) - n = 1 > 0,$$

więc ciąg (a_n) *jest ciągiem rosnącym.*

Przykład 7. *Niech ciąg* (b_n) *będzie opisany wzorem*

$$b_n = \frac{n+1}{n} \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+1)n} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n - 1)}{(n+1)n} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0,$$

więc ciąg (b_n) *jest ciągiem malejącym.*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Powróćmy do naszych przykładów. Czy potrafisz stwierdzić, które z rozważanych ciągów są ciągami monotonicznymi? Czy są to ciągi rosnące, czy malejące.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ciąg $(f(n))$ określony wzorem

$$f(n) = \frac{1}{n} \quad \text{dla} \ \ n \in \mathbb{N},$$

jest ciągiem malejącym (zbadaj różnicę $f(n+1) - f(n)$). Dalej, $(g(n))$ nie jest ciągiem monotonicznym, gdyż nie jest ani ciągiem rosnącym ani ciągiem malejącym (zbadaj różnice $g(n+1) - g(n)$ dla różnych wartości n). Na koniec ciąg $(h(n))$ kolejnych przybliżeń dziesiętnych z niedomiarem liczby $\sqrt{2}$ jest ciągiem rosnącym (różnice $h(n+1) - h(n)$ są dodatnie).

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga. *Monotoniczność ciągu* (a_n) *o wyrazach dodatnich można rozstrzygać badając iloraz* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Ciąg* (a_n) *jest :*

rosnący *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,

niemalejący *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,

nierosnący *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,

malejący *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 1. *Dla zadanych ciągów zbadać ich monotoniczność*

1. $a_n = 2n - 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
2. $b_n = 3 - n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
3. $c_n = 1 + \frac{1}{n}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
4. $d_n = 2 + (-1)^n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. *Prawidłowe odpowiedzi to:*

1. *ciąg* (a_n) *jest rosnący,*
2. *ciąg* (b_n) *jest malejący,*
3. *ciąg* (c_n) *jest malejący,*
4. *ciąg* (d_n) *nie jest ani ciągiem rosnącym ani ciągiem malejącym.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Chcąc rozstrzygnąć monotoniczność ciągu (a_n) badaliśmy różnice $a_{n+1} - a_n$, a w przypadku ciągów o wyrazach dodatnich iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. W dalszej kolejności zajmiemy się ciągami (a_n), dla których różnice $a_{n+1} - a_n$ bądź ilorazy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ są stałe.

Przykład 8. *Niech* (p_n) *będzie ciągiem stałym, tzn.*

$$p_n = c \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Ciąg ten ma różnicę $p_{n+1} - p_n$ *równą* 0 *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$.

Przykład 9. *Ustawmy zbiór $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych w ciąg (w_n) tak, aby*

$$w_n = n \quad \textit{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Nietrudno jest się przekonać, że dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $w_{n+1} - w_n = 1$.

Przykład 10. *Ciąg* $(b_n)_{n\in\{1,2,3\}}$ *w którym* $b_1 = 1$, $b_2 = 4$ *zaś* $b_3 = 16$ *stanowi przykład prostego trójelementowego ciągu, dla którego zachodzi* $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = 4$.

Przykład 11. *Rozważymy dalej następujące ciągi:*

1. $a_n = 3n - 5$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
2. $b_n = 4 - 2n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
3. $c_n = \frac{n+2}{n}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
4. $d_n = n^2$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
5. $e_n = 2^n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$,
6. $f_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Czy potrafisz powiedzieć, dla których ciągów spośród podanych w Przykładzie ?? różnica każdych dwóch kolejnych wyrazów jest stała? A może znajdziesz takie ciągi, dla których iloraz dwóch kolejnych wyrazów jest stały?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. *Prawidłowe odpowiedzi to:*

1. *dla ciągu (a_n) różnica dwóch kolejnych wyrazów jest równa 3,*
2. *dla ciągu (b_n) różnica dwóch kolejnych wyrazów wynosi -2,*
3. *dla ciągu (c_n) różnice i ilorazy kolejnych wyrazów tego ciągu nie są stałe,*
4. *dla ciągu (d_n) różnice i ilorazy kolejnych wyrazów tego ciągu nie są stałe,*
5. *dla ciągu (e_n) iloraz kolejnych wyrazów tego ciągu wynosi 2,*
6. *dla ciągu (f_n) iloraz kolejnych dwóch wyrazów tego ciągu jest równy $\frac{1}{3}$.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Analizowane tu przykłady ciągów stanowią na tyle ważne klasy i mają tak charakterystyczne własności, że nadano im osobne nazwy.

Definicja. *Ciąg liczbowy (a_n) (skończony, bądź nieskończony) nazywamy ciągiem* ***arytmetycznym*** *(używa się też pojęcia* ***postęp arytmetyczny****), jeśli różnica każdych dwóch kolejnych jego wyrazów jest stała.*

Uwaga. *Wprost z definicji wynika, że nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała. Podobnie, dla $m \geqslant 3$, m-wyrazowy ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\{1,\ldots,m\}}$ jest ciągiem arytmetycznym (ciągów dwuwyrazowych nie uznaje się za arytmetyczne) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \{1, \ldots, m-1\}$ różnica $a_{n+1}-a_n$ jest wielkością stałą.*

Poznałeś już różne przykłady ciągów arytmetycznych. Czy potrafisz podać inne przykłady takich ciągów?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja. *Jeśli (a_n) jest skończonym bądź też nieskończonym ciągiem arytmetycznym, to stałą wielkość $r = a_{n+1} - a_n$ nazywamy* ***różnicą*** *ciągu arytmetycznego.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 2. *Wypisz* 6*-wyrazowy ciąg arytmetyczny, dla którego pierwszy wyraz równy jest* $\frac{3}{2}$*, zaś różnica wynosi* $-\frac{5}{2}$.

Odp. *Poszukiwany ciąg, to* $\left(\frac{3}{2}, -1, -\frac{7}{2}, -6, -\frac{17}{2}, -11\right)$.

Pamiętasz oczywiście, że monotoniczność ciągów badaliśmy rozważając różnice kolejnych jego wyrazów. Dla ciągów arytmetycznych te różnice są stałe i równe r, więc bardzo łatwo jest określić monotoniczność ciągów arytmetycznych. Czy potrafisz powiedzieć, kiedy ciąg arytmetyczny jest ciągiem rosnącym, a kiedy jest ciągiem malejącym? Odpowiedź na to pytanie podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy* r.

(i) Ciąg (a_n) *jest rosnący wtedy i tylko wtedy, gdy* $r > 0$.

(ii) Ciąg (a_n) *jest malejący wtedy i tylko wtedy, gdy* $r < 0$.

(iii) Ciąg (a_n) *jest stały wtedy i tylko wtedy, gdy* $r = 0$.

Ciągi arytmetyczne mają ważną własność, którą sformułujemy w twierdzeniu. W tym celu zauważmy, że

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Obserwacja. Niech (a_n) będzie ciągiem arytmetycznym. Wtedy dla $n \geqslant 2$ mamy

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Stąd, wyliczając a_n, otrzymamy

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

$\square$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2. *Dla każdego ciągu arytmetycznego i dla dowolnych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga . *W przypadku nieskończonych ciągów arytmetycznych otrzymamy więc własność, którą można zapisać w postaci*

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2} \quad a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2},$$

zaś dla ciągów m-wyrazowych mamy warunek

$$\bigwedge_{n\in\{2,\ldots,m-1\}} \quad a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Okazuje się, że własność ciągów arytmetycznych opisana w poprzednim twierdzeniu jest charakteryzacją ciągów arytmetycznych, tzn. prawdziwe jest też następujące twierdzenie, które podamy bez uzasadnienia.

Twierdzenie 3. *Jeśli w ciągu liczbowym dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich, to ciąg ten jest ciągiem arytmetycznym.*

Zadanie 3. *Liczby* $2-x$, $x+1$ *oraz* $2x+5$ *(w podanej kolejności) są wyrazami trójelementowego ciągu arytmetycznego. Wyznacz różnicę tego ciągu.*

Rozwiązanie. *Wykorzystując udowodnioną w twierdzeniu ?? własność ciągu arytmetycznego otrzymamy*

$$x + 1 = \frac{(2 - x) + (2x + 5)}{2}.$$

Rozwiązując otrzymane równanie wyznaczymy jego rozwiązanie $x = 5$. *Wtedy*

$$r = x + 1 - (2 - x) = 9.$$

Odp. *Różnica badanego ciągu arytmetycznego równa jest* 9.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. *Wykorzystując definicję ciągu arytmetycznego wyznacz sześć pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego* (d_n)*, w którym pierwszy wyraz jest równy* 7*, zaś jego różnica wynosi* -3.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. *Oczywiście prawidłowa odpowiedź to* $d_1 = 7$, $d_2 = 4$, $d_3 = 1$, $d_4 = -2$, $d_5 = -5$ *oraz* $d_6 = -8$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kolejne wyrazy ciągu d_n z rozważonego przykładu można otrzymać z wyrazu poprzedniego poprzez dodanie do niego różnicy r. Czy potrafisz odpowiedzieć na pytanie ile jest równy np. 105 wyraz tego ciągu? A ile 2011 wyraz? Pomocne tu będzie twierdzenie opisujące dowolny wyraz ciągu arytmetycznego w zależności od wyrazu pierwszego i różnicy rozważanego ciągu arytmetycznego. Punktem wyjścia do sformułowania tego twierdzenia będzie następująca obserwacja:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Obserwacja. Zauważmy, że jeśli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to wprost z definicji otrzymamy, że $a_2 - a_1 = r$, czyli

$$a_2 = a_1 + 1 \cdot r.$$

Dalej, $a_3 - a_2 = r$, więc wykorzystując powyższą równość mamy

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + 1 \cdot r) + r = a_1 + 2 \cdot r.$$

Następnie $a_4 - a_3 = r$, stąd i z powyższej równości otrzymamy

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2 \cdot r) + r = a_1 + 3 \cdot r.$$

Postępowanie to uzasadnia prawidłowość ukazaną w następującym dalej twierdzeniu. $\square$

Twierdzenie 4. *Niech* $(a_n)_{n\in I}$ *będzie ciągiem arytmetycznym o różnicy* r*, gdzie* $I = \mathbb{N}$ *w przypadku ciągu nieskończonego oraz* $I = \{1, \dots, m\}$ *w przypadku ciągu* m*-elementowego. Wówczas*

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad \text{dla każdego } n \in I.$$

Zadanie 5. *Wyznacz wyrazy* 105 *oraz* 2011 *ciągu* (d_n) *rozważanego w Zadaniu ?? (*$d_1 = 7$ *oraz* $r = -3$*).*

Odp. *Proste rachunki pokazują, że* $d_{105} = -305$ *oraz* $d_{2011} = -6023$.

Zadanie 6. *Dla ciągu arytmetycznego* (f_n) *wiadomo, że* $f_1 = 3$, $f_n = -21$ *zaś* $r = -6$. *Wyznacz* n.

Rozwiązanie. *Podstawiając do wzoru na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (Twierdzenie ??) otrzymamy*

$$-21 = f_n = f_1 + (n-1)r = 3 + (n-1) \cdot (-6).$$

Rozwiązując otrzymane równanie wyznaczymy jego rozwiązanie $n = 5$.

Odp. $n = 5$.

Zadanie 7. *Wyznacz n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (b_n), jeśli $b_4 = -2$ oraz $b_7 = 13$.*

Rozwiązanie. *Z warunków zadania otrzymamy* $b_4 = b_1 + 3r$ *oraz* $b_7 = b_1 + 6r$, *co prowadzi do układu równań*

$$\begin{cases} b_1 + 3r = -2 \\ b_1 + 6r = 13. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $b_1 = -17$ *oraz* $r = 5$. *Stąd*

$$b_n = -17 + 5(n-1) = -22 + 5n \quad \textit{dla} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Odp. n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego opisany jest wzorem* $b_n = -22 + 5n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 8. *Pomiędzy liczby* 5 *oraz* 33 *wstawić siedem takich liczb, aby wraz z zadanymi liczbami tworzyły ciąg arytmetyczny.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. *Z warunków zadania wynika, że poszukiwany jest skończony ciąg arytmetyczny* $(a_n)_{n\in\{1,\dots,8\}}$ *taki, że* $a_1 = 5$ *oraz* $a_8 = 33$. *Prowadzi to do równości*

$$33 = a_8 = a_1 + 7r = 5 + 7r,$$

której jedynym rozwiązaniem jest $r = 4$. *Wykorzystując wzór na* n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego otrzymamy* $a_2 = 9$, $a_3 = 13$, $a_4 = 17$, $a_5 = 21$, $a_6 = 25$ *oraz* $a_7 = 29$.

Odp. *Poszukiwane liczby, to* 9, 13, 17, 21, 25 *oraz* 29.

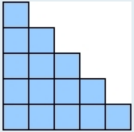
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

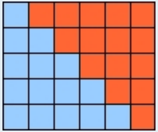
Dla ciągu arytmetycznego nietrudno jest obliczyć sumę jego początkowych wyrazów. Czy spróbujesz odkryć ten wzór? Zróbmy to razem.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 1 Spróbujmy na początek obliczyć pole figury składającej się z kwadratów jednostkowych ułożonych wierszami w ten sposób, że wiersz pierwszy składa się z jednego kwadratu, wiersz drugi – z dwóch kwadratów, wiersz trzeci z trzech i tak dalej, aż do wiersza n-tego składającego się z n kwadratów. Naszą sytuację dla $n = 5$ obrazuje poniższy rysunek:



W celu obliczenia pola naszej figury dorysujemy figurę symetryczną do wyjściowej w sposób zobrazowany na kolejnym rysunku kolorem czerwonym:



Można zauważyć, że cała figura, w ogólnym przypadku, jest prostokątem składającym się z kwadratów ułożonych w n wierszach po $(n + 1)$ kwadratów w każdym wierszu (w naszym szczególnym przypadku mamy 5 wierszy po 6 kwadratów w każdym z nich). Wyjściowa figura zawiera połowę kwadratów całej figury. Stąd pole naszej wyjściowej figury w ogólnym przypadku wynosi $\frac{n(n+1)}{2}$.

Krok 2 Spróbujmy teraz wyznaczyć sumę kolejnych liczb naturalnych od 1 do $n-1$, tzn. sumę $1+2+\ldots+(n-1)$. Wykorzystując obserwację poczynioną w kroku 1 można zauważyć, że nasz problem sprowadza się do obliczenia pola figury złożonej z kwadratów ułożonych w $(n-1)$ wierszy po k kwadratów w k-tym wierszu. Zatem

$$1+2+\ldots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Krok 3 W ostatnim kruku spróbujemy obliczyć sumę pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r. Mamy więc

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
&\quad = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (n-1)r) = \\
&\quad = na_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1))r
\end{aligned}$$

Wykorzystując równość udowodnioną w Kroku 2 otrzymamy

$$\begin{aligned}
&a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \\
&\quad = na_1 + (1 + 2 + \ldots + (n-1))r = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r.
\end{aligned}$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przekształcając otrzymane wyrażenie dostaniemy jeszcze

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = na_1 + \frac{(n-1)n}{2}r = \\ = n\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} = n\frac{a_1 + (a_1 + (n-1)r)}{2} = \frac{a_1 + a_n}{2}n.$$

Uzasadnione jest więc następujące

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 5. *Suma* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *pierwszych* n *wyrazów ciągu arytmetycznego* (a_n) *o różnicy* r *wyraża się wzorami*

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} n.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 9. *Wiadomo, że* (a_n) *jest takim ciągiem arytmetycznym, że* $a_2 = 5$ *oraz* $a_4 + a_7 = 31$. *Ile początkowych wyrazów tego ciągu sumuje się do liczby* 126*?*

W pierwszym kroku spróbuj wyznaczyć wielkości jednoznacznie określające ten ciąg, tzn. na podstawie warunków zadania wyznacz a_1 oraz r.

Jeśli nie udało Ci się, to spróbujmy razem.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. *Niech (a_n) będzie poszukiwanym ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (Twierdzenie ??), z warunków zadania otrzymamy*

$$\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ (a_1 + 3r) + (a_1 + 6r) = 31. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymamy $a_1 = 2$ oraz $r = 3$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie naszego zadania sprowadza się więc do rozwiązania równania (wzór na sumę pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego, Twierdzenie ??)

$$126 = S_n = \frac{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3}{2} \cdot n.$$

Rozwiązując względem niewiadomej n powyższe równanie kwadratowe otrzymamy rozwiązania $n_1 = 9$ oraz $n_2 = -\frac{28}{3}$, z których to drugie należy odrzucić (dlaczego?).

Odp. 9 *pierwszych wyrazów badanego ciągu arytmetycznego sumuje się do* 126.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 10. *Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych.*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W naszym zadaniu należy zsumować wszystkie liczby naturalne od 10 do 99. Mamy więc do wyznaczenia sumę ciągu arytmetycznego (oznaczmy go np. przez (f_n)) w którym $f_1 = 10$ oraz $r = 1$. Do rozstrzygnięcia jest jedynie, ile jest tych liczb? Potrafisz określić n potrzebne we wzorze na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Tych liczb jest ...

Tak, jest ich 90.

Odp. *Prawidłowa odpowiedź, to* 4905.

Spróbuj rozwiązać teraz zadanie, które z pozoru może być trudne.
Pozory czasem mylą ...

Zadanie 11. *Wyznaczyć n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), dla którego*

$$S_n = n^2 - 2n \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Jeśli można coś zasugerować, to poobserwuj równość

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Czy potrafisz wyznaczyć a_1 oraz $a_1 + a_2$? Jak to wykorzystać?

Oczywiście $a_1 = S_1 = -1$ oraz $a_1 + a_2 = S_2 = 0$. Czy już wiesz, jak teraz wyznaczyć a_n?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. *Z otrzymanych równości obliczamy* $a_2 = 1$, *więc* $r = a_2 - a_1 = 2$. *Wtedy*

$$a_n = -1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 3.$$

Odp. n-*ty wyraz poszukiwanego ciągu* (a_n) *ma postać* $2n - 3$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zauważ, że do rozwiązania poprzedniego zadania nie wykorzystaliśmy wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego!

Przeanalizujemy dalej drugi ważny rodzaj ciągów, tzn. ciągi (na początek załóżmy, że rozważamy jedynie ciągi o wyrazach różnych od 0), dla których iloraz wyrazu następnego przez wyraz poprzedni jest wielkością stałą. Czy potrafisz podać przykłady takich ciągów?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 12. *Zbadajmy ciąg* (a_n) *kolejnych potęg liczby* 2, *tzn. ciąg* $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$. *Łatwo można sprawdzić, że*

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = 2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

A może odrobinę fizyki?

Zadanie 12. *Sprężystą piłkę opuszczono z wysokości* 2 *m. Po każdym odbiciu piłeczka wznosi się na* $\frac{3}{4}$ *wysokości, z której poprzednio rozpoczynała spadek. Na jaką maksymalną wysokość wzniesie się piłka po* 4 *odbiciu?*

Rozwiązanie. *Niech* $h_0 = 2$ *i niech* h_1, h_2, h_3 *oraz* h_4 *oznaczają wysokości, na jakie wzniesie się piłeczka po, odpowidednio* 1*-szym,* 2*-gim,* 3*-cim i* 4*-tym odbiciu. Mamy wtedy*

- $h_1 = \frac{3}{4}h_0 = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$,
- $h_2 = \frac{3}{4}h_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$,
- $h_3 = \frac{3}{4}h_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{32}$,
- $h_4 = \frac{3}{4}h_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{27}{32} = \frac{81}{128}$.

Odp. *Po* 4 *odbiciu piłka wzniesie się na wysokość* $\frac{81}{128}$ *m.*

Po tych przykładach czas już na ścisłą definicję nowej klasy ciągów. Aby dopuścić również ciągi o wyrazach równych 0 definicja zostanie nieco zmodyfikowana przez zastąpienie ilorazów przez pewne iloczyny, co w przypadku ciągów o wyrazach niezerowych będzie równoważne badaniu ilorazów.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja. *Ciąg liczbowy* (a_n) *(skończony, bądź nieskończony) nazywamy ciągiem* ***geometrycznym*** *(używa się też pojęcia* ***postęp geometryczny****), jeśli każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę* q. *Liczbę* q *nazywamy* ***ilorazem*** *ciągu geometrycznego.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga. *Z definicji wynika, że nieskończony ciąg* (a_n) *jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}.$$

Podobnie, jeśli $m \geqslant 3$, *to* m*-wyrazowy ciąg liczbowy* $(a_n)_{n \in \{1,\ldots,m\}}$ *jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \quad \text{dla każdego } n \in \{1, \ldots, m-1\}.$$

Na koniec, jeśli dopuścimy jedynie ciągi o wyrazach niezerowych, to w obu przypadkach otrzymamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spróbujmy teraz zbadać monotoniczność ciągów geometrycznych. Pamiętasz zapewne, że w przypadku ciągów arytmetycznych rozwiązanie problemu (Twierdzenie ??) było raczej proste, gdyż badanie monotoniczności ciągu sprowadza się do określenia znaku różnic $a_{n+1} - a_n$. W przypadku ciągów geometrycznych problem jest bardziej skomplikowany, a jego rozwiązanie przedstawia następujące twierdzenie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 6. *Niech* $(a_n)_{n\in I}$ *będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie* q, *gdzie* $I = \mathbb{N}$ *lub* $I = \{1, \ldots, m\}$.

(ii) Jeśli $q = 1$ *lub* $a_1 = 0$, *to* (a_n) *jest ciągiem stałym.*

(iii) Jeśli $q \in (0, 1)$ *i* $a_1 < 0$, *to* (a_n) *jest ciągiem rosnącym.*

(iv) Jeśli $q \in (0, 1)$ *i* $a_1 > 0$, *to* (a_n) *jest ciągiem malejącym.*

(v) Jeśli $q > 1$ *i* $a_1 < 0$, *to* (a_n) *jest ciągiem malejącym.*

(vi) Jeśli $q > 1$ *i* $a_1 > 0$, *to* (a_n) *jest ciągiem rosnącym.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pamiętasz zależność łączącą trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego? Oczywiście, dla każdej trójki kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego, wyraz środkowy był średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich.

Okazuje się, że trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego mają podobną własność z tą różnicą, że średnią arytmetyczną należy zastąpić inną średnią. Uzasadnijmy na początek następujące twierdzenie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 7. *Dla dowolnego ciągu geometrycznego i dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, kwadrat wyrazu środkowego jest równy iloczynowi sąsiednich wyrazów.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uzasadnienie. Ustalmy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q oraz trzy jego kolejne wyraz a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Na mocy definicji ciągu geometrycznego mamy

$$a_{n+1} = a_n q = a_{n-1} q^2 \quad \text{oraz} \quad a_n = a_{n-1} q.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = \\ = (a_{n-1}q)^2 - a_{n-1}a_{n-1}q^2 = a_{n-1}^2 q^2 - a_{n-1}^2 q^2 = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$. $\square$

Zadanie 13. *Pomiędzy liczby* 9 *oraz* 4 *wstawić taką liczbę* u*, aby ciąg* $(9, u, 4)$ *tworzył malejący ciąg geometryczny.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie . *Wykorzystując własność trójwyrazowego ciągu geometrycznego* $(9, u, 4)$ *(Twierdzenie* **??***) otrzymamy*

$$u^2 = 9 \cdot 4 = 36.$$

Zatem $u = -6$ *lub* $u = 6$. *Spośród tych dwóch rozwiązań pierwsze należy odrzucić (dlaczego?).*

Odp. *Poszukiwany ciąg geometryczny, to* $(9, 6, 4)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Powróćmy jeszcze do średnich. Okazuje się, że dla pewnej podklasy ciągów geometrycznych Twierdzenie ?? można sformułować używając właśnie średnich.

Twierdzenie 8. *Dla dowolnego ciągu geometrycznego o wyrazach dodatnich i dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich, tzn.*

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \quad \textit{dla odpowiednich } n.$$

Podobnie, jak w przypadku twierdzenia o postaci n-tego wyrazu ciągu arytmetycznego, również dla ciągu geometrycznego można taki wzór podać. Prawidłowość opiera się na następującej obserwacji.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Obserwacja. Zauważmy, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to wprost z definicji otrzymamy

$$a_2 = a_1 q.$$

Dalej wykorzystując powyższą równość mamy

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2.$$

Następnie, z powyższej równości otrzymamy

$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3.$$

Postępowanie takie uzasadnia prawidłowość sformułowaną w następującym dalej twierdzeniu. □

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Twierdzenie 9. *Niech* $(a_n)_{n\in I}$ *będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie* $q \neq$, *gdzie* $I = \mathbb{N}$ *w przypadku ciągu nieskończonego oraz* $I = \{1, \ldots, m\}$ *w przypadku ciągu* m*-elementowego. Wtedy*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \textit{dla każdego } n \in I.$$

Zadanie 14. *Dla ciągu geometrycznego* (b_n) *wiadomo, że* $b_2 = -3$, *zaś* $b_6 = -48$. *Wyznaczyć wartość* b_5.

Rozwiązanie. *Z warunków zadania, wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, otrzymamy układ równań*

$$\begin{cases} -3 = b_2 = b_1 q \\ -48 = b_6 = b_1 q^5. \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań wyznaczymy jego rozwiązania

$$\begin{cases} b_1 = -\frac{3}{2} \\ q = 2 \end{cases} \quad \textit{lub} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{3}{2} \\ q = -2 \end{cases}$$

Istnieją dwa rozwiązania: $b_5 = b_1 q^4 = -24$ *lub* $b_5 = b_1 q^4 = 24.$

Odp. *Istnieją dwa ciągi spełniające warunki zadania, dla których* $b_5 = -24$ *lub* $b_5 = 24.$

Spróbujmy na koniec, podobnie jak to było dla ciągów arytmetycznych, wyznaczyć sumę pierwszych n wyrazów ciągu geometrycznego. Pamiętasz zapewne, że w przypadku ciągu arytmetycznego nie było to takie proste. Również w przypadku ciągu geometrycznego problem nie jest łatwy, ale opierając się na pewnych obserwacjach i prawidłowościach można wyprowadzić wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 1 Zaobserwujmy pewne prawidłowości. Wykonując mnożenia można zweryfikować następujące równości:

- $(1+x)(1-x) = 1 - x^2$,
- $(1+x+x^2)(1-x) = 1 - x^3$,
- $(1+x+x^2+x^3)(1-x) = 1 - x^4$.

Czy na podstawie tych równości potrafisz powiedzieć, ile równy jest następujący iloczyn:

$$(1+x+\ldots+x^{n-1})(1-x)$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Oczywiście, można poczynić obserwację, że

$$(1 + x + \ldots + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 2 Spróbujmy teraz obliczyć sumę

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymamy

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \\ &= a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Załóżmy na początek, że $q = 1$. W tym przypadku

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = na_1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

W przypadku $q \neq 1$, wykorzystując wyprowadzony w pierwszym kroku wzór, otrzymamy

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) = \\ = a_1 \frac{\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right)(1 - q)}{1 - q} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Tym samym uzasadnione jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10. *Suma* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *pierwszych* n *wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie* q *wyraża się wzorem*

(i) $S_n = na_1$ *w przypadku, gdy* $q = 1$*,*

(ii) $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ *w przypadku, gdy* $q \neq 1$*.*

Zadanie 15. *Oblicz sumę* 2011 *pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego* (a_n)*, dla którego* $a_1 = -3$ *oraz* $q = -1$.

Czy do rozwiązanie tego zadania musisz zastosować wzór na sumę wyrazów ciągu geometrycznego? A może wystarczy jedynie trochę pomyśleć?

Jeśli jeszcze nie wiesz, to spróbuj wypisać pierwszych kilkanaście wyrazów tego ciągu. Ile wynosi suma pierwszych 5 wyrazów tego ciągu? A ile równa jest suma pierwszych 7 wyrazów? Widzisz już prawidłowość?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tak, prawidłowa odpowiedź, to $S_{2011} = -3$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 16. *Zadany jest ciąg geometryczny* (c_n), *w którym* $c_3 = -18$ *oraz* $c_4 = -54$. *Suma ilu początkowych wyrazów tego ciągu równa jest* -728*?*

Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego, spróbuj na podstawie warunków zadania wyznaczyć c_1 oraz iloraz ciągu q. Następnie podstaw otrzymane wartości do wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego (przypadek $q \neq 1$, dlaczego?) i wyznacz n.

Jeśli jeszcze nie potrafisz tego zrobić, do obejrzyj następny slajd!

Rozwiązanie. *Z warunków zadania wynika następujący układ równań*

$$\begin{cases} -18 = c_3 = c_1 q^2 \\ -54 = c_4 = c_1 q^3. \end{cases}$$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest para $c_1 = -2$, $q = 3$. *Podstawiając otrzymane wielkości do wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego otrzymamy równanie*

$$-728 = (-2) \cdot \frac{1-3^n}{1-3},$$

którego rozwiązaniem jest liczba $n = 6$.

Odp. *Pierwszych* 6 *wyrazów ciągu* (c_n) *daje sumę* -728.

W dalszej części zaproponowane zostaną zadania do samodzielnego rozwiązania. Do tych zadań podane będą wskazówki dotyczące ich rozwiązania oraz prawidłowe odpowiedzi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 17. *Znajdź ciąg arytmetyczny* (a_n) *w którym suma drugiego i piątego wyrazu równa jest* 16*, zaś różnica wyrazów czwartego i pierwszego wynosi* 6.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wskazówka: Wykorzystując wzór na n-ty wyraz ciągu, z warunków zadania wyprowadź układ równań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. *Poszukiwany ciąg* (a_n) *dany jest wzorem* $a_n = 2n + 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 18. *Pomiędzy liczby* -2 *oraz* 13 *wpisz tak cztery liczby, aby wszystkie razem tworzyły ciąg arytmetyczny.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wskazówka: Porównaj Zadanie ??.

Odp. *Poszukiwany ciąg ma postać* $(-2, 1, 4, 7, 10, 13)$.

Zadanie 19. *O ciągu arytmetycznym (c_n) wiadomo, że $c_3 = 12$ oraz $r = -4$. Ile wyrazów tego ciągu sumuje się do liczby -780?*

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wskazówka: Porównaj Zadanie ??.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. *Pierwszych* 26 *wyrazów ciągu* (c_n) *daje w sumie liczbę* 780.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 20. *Wyznaczyć taką liczbę* z, *by ciąg* $(-\frac{5}{2}, z, -10)$ *był ciągiem geometrycznym.*

Wskazówka: Porównaj Zadanie ??.

Odp. *Poszukiwane ciągi to* $\left(-\frac{5}{2}, -5, -10\right)$ *oraz* $\left(-\frac{5}{2}, 5, -10\right)$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 21. *Wyznacz taki ciąg geometryczny* (d_n), *że* $d_2 = 12$ *oraz* $d_4 = 432$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wskazówka: Porównaj Zadanie ??.

Odp . *Poszukiwane ciągi dane są wzorami* $d_n = 2 \cdot (-6)^n$ *lub* $d_n = 2 \cdot 6^n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w prostym teście.

Pytanie 1. *Ciąg arytmetyczny o różnicy -2 jest ciągiem*

(a) *rosnącym,*

(b) *stałym,*

(c) *malejącym,*

(d) *ani rosnącym ani malejącym.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 2. *W ciągu arytmetycznym drugi wyraz jest równy* -4, *zaś różnica tego ciągu jest równa* 3. *Piąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy*

(a) 0,

(b) 1,

(c) 5

(d) 8.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 3. *W ciągu arytmetycznym dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest*

(a) *średnią arytmetyczną,*

(b) *średnią geometryczną,*

(c) *sumą,*

(d) *różnicą,*

wyrazów sąsiednich.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 4. *Jeśli czwarty i ósmy wyraz pewnego ciągu arytmetycznego są sobie równe, to ciąg ten jest*

(a) malejący,

(b) stały,

(c) rosnący,

(d) ani malejący ani rosnący.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 5. *Jeśli ciąg* (a_1, a_2, a_3) *jest ciągiem arytmetycznym o różnicy* r*, to ciąg* (a_3, a_2, a_1) *jest*

(a) ciągiem arytmetycznym o różnicy r*,*

(b) ciągiem arytmetycznym o różnicy $-r$*,*

(c) ciągiem arytmetycznym o różnicy $\frac{1}{r}$*,*

(d) nie jest ciągiem arytmetycznym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 6. *Ciąg geometryczny, w którym pierwszy wyraz jest ujemny, zaś iloraz $q > 1$ jest ciągiem*

(a) *malejącym,*

(b) *stałym,*

(c) *rosnącym,*

(d) *ani rosnącym ani malejącym.*

Pytanie 7. *Ciąg* (a_1, a_2, a_3) *jest zarówno ciągiem arytmetycznym o różnicy* r*, jak też ciągiem geometrycznym o ilorazie* q*. Wtedy*

(a) $r = 1$ *oraz* $q = 0$*,*

(b) $r = 1$ *oraz* $q = -1$

(c) $r = 0$ *oraz* $q = 1$*,*

(d) $r = -1$ *oraz* $q = 1$*.*

Pytanie 8. *W ciągu geometrycznym o wyrazach dodatnich, dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów, wyraz środkowy jest*

(a) średnią arytmetyczną,

(b) średnią geometryczną,

(c) iloczynem,

(d) ilorazem,

wyrazów sąsiednich.

Pytanie 9. *Jeśli ciąg* (d_1, d_2, d_3) *jest ciągiem geometrycznym o ilorazie* $q \neq 0$, *to ciąg* (d_3, d_2, d_1) *jest*

(a) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* q,

(b) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* q^2,

(c) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* $\frac{1}{q}$,

(d) *nie jest ciągiem geometrycznym.*

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 10. *Jeśli ciąg* (d_1, d_2, d_3), *gdzie* $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$, $d_3 \neq 0$, *jest ciągiem geometrycznym o ilorazie* $q \neq 0$, *to ciąg* $\left(\frac{1}{d_1}, \frac{1}{d_2}, \frac{1}{d_3}\right)$ *jest*

(a) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* $\frac{1}{q}$,

(b) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* q^2,

(c) *ciągiem geometrycznym o ilorazie* q,

(d) *nie jest ciągiem geometrycznym.*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Klucz odpowiedzi:

1(c), 2(c), 3(a), 4(b), 5(b), 6(a), 7(c), 8(b), 9(c), 10(a).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie