E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat: Funkcja kwadratowa

Materiały merytoryczne do kursu

FUNKCJA KWADRATOWA 1

1 Wstęp

Funkcja kwadratowa i równania kwadratowe wydają się tak prostym zagadnieniem dla współczesnego człowieka, że prawie nikt się nie zastanawia, gdzie jest ich miejsce w historii matematyki. Spróbujemy jednak przeprowadzić małe śledztwo aby wyjaśnić, od jak dawna matematycy potrafią rozwiązywać równania kwadratowe? Otóż udało się nam ustalić, że jedne z najstarszych tekstów matematycznych - egipskie i babilońskie - już zawierały świadectwa niezwykłej zręczności technicznej ówczesnych matematyków w operowaniu równaniami stopnia 1 i 2 - mimo braku śladów jakichkolwiek starań o uzasadnienie użytych podczas rozwiązywania tych równań twierdzeń, ani nawet ścisłych definicji stosowanych działań.

Trochę bardziej usystematyzowane badania w kierunku rozwiązywania równań kwadratowych podjął w VII wieku n.e. Aryabhata - matematyk hinduski, twórca początków algebry, znany m.in. z podania przybliżenia liczby $\pi \approx 3,1416$; następnie w XII wieku n.e. kolejny matematyk Aczarja Bhaskara (indyjski matematyk i astronom) wskazał istnienie dwóch pierwiastków kwadratowych (algebraicznych) z liczby dodatniej; w XV wieku francuski matematyk Francois Viète wprowadził znane wzory, nazwane jego imieniem, podające związek pomiędzy sumą i iloczynem pierwiastków równania kwadratowego a współczynnikami tegoż równania, a następnie Stifel (niemiecki algebraista XVI wieku), jako pierwszy w Europie rozważał jedną, ogólna postać równania kwadratowego $x^2 = ax + b$, a nie jak to czyniono dotychczas trzy postacie kanoniczne. Opisał on również sposób rozwiązywania takiego równania we wszystkich trzech przypadkach, tzn. gdy $a > 0$, $b > 0$; $a > 0$, $b < 0$ oraz $a < 0$, $b > 0$, posługując się liczbami ujemnymi.

Na tym właściwie moglibyśmy zakończyć wzmiankę historyczną na temat funkcji i równań kwadratowych, gdyby nie było związane z nim jeszcze jedno bardzo ważne zagadnienie, jakim jest pojęcie liczb zespolonych. Co prawda, to pojęcie nie należy do programu matematyki na poziomie liceum, ale jest tak ważne, że postanowiliśmy ująć go w naszym krótkim wstępie. Pojawienie się liczb zespolonych jest ściśle związane z problemem rozwiązania równania kwadratowego o wyróżniku ujemnym, w szczególności zaś sprowadza się do obliczenia pierwiastka kwadratowego z liczby ujemnej. Jeżeli ograniczymy się do liczb rzeczywistych, to obliczanie pierwiastka z liczby ujemnej jest niewykonalne.

Jednak w XVI wieku pewien włoski inżynier Bombelli, nie przejmując się zbytnio powyższym faktem, założył, że ów pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej istnieje i nazwał go liczbą urojoną (wyimaginowaną), w odróżnieniu od dotychczas znanych liczb rzeczywistych. Można się pokusić o przypuszczenie, że nazwa tych liczb była związana z faktem, iż wielu sławnych matematyków nie chciało pogodzić się z ich istnieniem, a wszystkie działania na tych liczbach uważali oni za "urojenia" autora tej teorii - ale tym razem to matematycy popełnili błąd. Zwolennicy istnienia tych liczb wykonywali na nich działania tak, jak na liczbach rzeczywistych dodając, odejmując, mnożąc i dzieląc. Oznaczali pierwiastek z liczby -1 literą i przyjmując, że $i^2 = -1$. Swobodnie dodając i mnożąc liczby rzeczywiste i urojone tworzyli nowe liczby postaci $a + bi$, które dziś nazywamy liczbami zespolonymi.

Początek XIX wieku pozbawił te liczby wszelkiej mistyki, gdyż przyniósł ich ścisłe określenie. Pierwsze z nich – Gaussa - wykazało, że liczby zespolone są to właściwie punkty płaszczyzny euklidesowej, w której wprowadzono pewne działania zwane dodawaniem i mnożeniem punktów czyli liczb zespolonych. Drugie ujęcie - Hamiltona - wprowadza liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych, ze specyficznym (specjalnym) sposobem ich dodawania i mnożenia. Na końcu dodamy tylko, że obecnie liczby zespolone są codziennym narzędziem nie tylko matematyka czy fizyka, ale i inżyniera, któremu dają ogromne korzyści w zagadnieniach z elektroniki, aerodynamiki i innych dziedzin techniki.

Tyle z historii, co do samej funkcji kwadratowej, równań i nierówności kwadratowych, należy zaznaczyć, że z jednej strony są to jedne z najłatwiejszych zagadnień. Do określenia pierwiastków równania kwadratowego wystarczy zastosować dobrze znane wzory. Wykres funkcji kwadratowej - znana wszystkim parabola - też wydaje się być bardzo prostą krzywą do badania. Warto jednak poświęcić temu zagadnieniu trochę więcej czasu i uwagi - chociażby z tego powodu, że na pewno często będziemy mieli z nim do czynienia przy okazji rozwiązywania zadań z innych dziedzin matematyki - zarówno elementarnej, jak i wyższej.

Celem, który postawiliśmy sobie, przygotowując tą prezentację, jest przekazanie Ci podstawowej wiedzy z zakresu funkcji kwadratowej oraz różnych sposobów rozwiązywania równań i nierówności kwadratowych. Ta wiedza bez wątpienia ułatwi Ci zdanie matury. Jednocześnie zależy nam na tym, aby ta prezentacja nikogo nie zniechęciła do samodzielnej nauki. Stąd zadania zamieszczone w prezentacji są ułożone w kolejności od prostych do bardziej skomplikowanych. Zapewniamy, że przy odrobinie chęci, zaangażowania i systematyczności uda Ci się dobrnąć do końca, a nagrodą za włożony wysiłek będą lepsze oceny w szkole i więcej punktów na egzaminie maturalnym z matematyki.

Zatem do dzieła i życzymy przyjemnej lektury!

2 Pojęcia wstępne

Zacznijmy od wprowadzenia podstawowych definicji i twierdzeń, niezbędnych do przedstawienia tematu. Aby Cię nie zanudzić, do teorii dodaliśmy przykłady - zarówno rozwiązane, tak i do samodzielnej pracy.

Definicja . **Załóżmy, że $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R}$. Funkcję $y = ax^2 + bx + c$ nazywamy funkcją kwadratową (albo trójmianem kwadratowym), a równanie $ax^2 + bx + c = 0$ nazywamy równaniem kwadratowym.**

Uwaga. Zwroty: rozwiązanie równania kwadratowego i pierwiastki równania kwadratowego są synonimami.

Definicja. **Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego (albo odpowiadającego temu równaniu trójmianu kwadratowemu $y = ax^2 + bx + c$).**

Twierdzenie.

a) Jeżeli $\triangle \geqslant 0$, to pierwiastkami równania kwadratowego są:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}.$$

b) Jeżeli $\triangle < 0$, to równanie kwadratowe nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Wnioski:

1. Jeżeli $\triangle > 0$, to równanie kwadratowe ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2.
2. Jeżeli $\triangle = 0$, to $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Przykład 1.

Wyznaczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego:

$$x^2 - 6x + 1.$$

Rozwiązanie.

Aby wyznaczyć pierwiastki trójmianu kwadratowego, trzeba przyrównać go do 0 i rozwiązać otrzymane równanie:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Obliczmy wyróżnik tego równania:

$$\triangle = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1.$$

Pierwiastkami równania są:

$$x_1 = \frac{5-1}{2 \cdot 1} = 2,$$
$$x_2 = \frac{5+1}{2 \cdot 1} = 3.$$

Przykład 2.

Rozwiązać równanie:

$$\frac{1}{6}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x - 2 = 0.$$

Rozwiąż to zadanie samodzielnie.

Rozwiązanie.

Mamy nadzieję, że nie było żadnych problemów z rozwiązaniem tego zadania. Wystarczy podstawić współczynniki równania kwadratowego do wzorów i nie pomylić się w obliczeniach. Pewne problemy mogą stworzyć tylko działania na ułamkach, ale w końcu to nic strasznego. Aby uprościć sobie pracę, możemy dokonać bardzo prostego zabiegu - pomnożyć obustronnie dane równanie przez 6, otrzymane równanie już nie ma współczynników w postaci ułamków:

$$x^2 + 4x - 12 = 0.$$

Obliczmy wyróżnik tego równania:

$$\triangle = 4^2 - 4 \cdot (-12) = 16 + 48 = 64 = 8^2.$$

Pierwiastkami równania są:

$$x_1 = \frac{-4-8}{2} = -6,$$
$$x_2 = \frac{-4+8}{2} = 2.$$

Przykład 3.

Rozwiązać równanie:

$$x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Spróbuj rozwiązać to równanie samodzielnie.

Rozwiązanie.

Mamy nadzieję, że wyznaczenie pierwiastków równania i w tym przypadku nie sprawiło Ci żadnych problemów. Standardowo obliczamy najpierw wyróżnik równania:

$$\triangle = 6^2 - 4 \cdot 1 = 36 - 4 = 32.$$

W tym miejscu mógł się pojawić lekki niepokój, związany z koniecznością wyciągnięcia pierwiastka z liczby 32. W tym przypadku nie otrzymamy liczby naturalnej, ale możemy trochę uprościć zadanie, jeżeli przedstawimy 32 w postaci iloczynu $16 \cdot 2$, wtedy

$$\sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

Pierwiastkami równania są:

$$x_1 = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2},$$
$$x_2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Uwaga. Pamiętaj: aby sprawdzić poprawność rozwiązania, wystarczy podstawić wyznaczone pierwiastki do równania. Jeżeli otrzymałeś tożsamość - rozwiązanie jest poprawne, jeżeli nie - sprawdź jeszcze raz, a jeśli sprawdzenie się nie powiodło - rozwiąż zadanie od początku.

Jeszcze trochę teorii, abyśmy mogli rozwiązywać ciekawsze zadania.

Twierdzenie. Postać iloczynowa trójmianu kwadratowego. Jeżeli x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego

$$y = ax^2 + bx + c,$$

to

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Twierdzenie. **Postacią kanoniczną trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ jest wyrażenie:**

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a}.$$

Przykład 4.

Rozwiązać równanie:

$$\frac{35x}{4+10x-6x^2} - \frac{x+2}{3x+1} + \frac{3x-1}{x-2} = 0.$$

To zadanie nie jest trudne, spróbuj rozwiązać go samodzielnie.

Rozwiązanie.

Twoim zdaniem zadanie nie jest takie łatwe? Cóż, mogę się z tobą zgodzić - ale tylko po części. Nadal mamy do czynienia z wyznaczeniem pierwiastków równania kwadratowego, ale tym razem dane nam równanie trzeba będzie najpierw uprościć. W tym celu lewą stronę równania trzeba doprowadzić do wspólnego mianownika. Najpierw przedstawimy trójmian kwadratowy, występujący w liczniku pierwszego ułamka, w postaci iloczynowej.

Rozwiązujemy równanie:

$$-6x^2 + 10x + 4 = 0.$$

Ułatwimy sobie zadanie, dzieląc obie części równania przez -2. Otrzymamy takie równanie:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Następnie w standardowy sposób możemy wyznaczyć pierwiastki otrzymanego równania, lub... Dobrze by było, gdyby tymi pierwiastkami były liczby 2 lub $-\frac{1}{3}$, w tym wypadku sprowadzenie lewej strony równania do wspólnego mianownika byłoby łatwiejsze. Zatem sprawdźmy: po podstawieniu obydwóch liczb do równania otrzymujemy równość, stąd

$$-6x^2+10x+4 = -6(x-2)(x+1/3) = -2(x-2)(3x+1).$$

Oznacza to, że wspólnym mianownikiem jest mianownik pierwszego ułamka.

Teraz wszystkie trzy ułamki po lewej stronie naszego równania doprowadzamy do wspólnego mianownika. Ustaliliśmy, że mianownik pierwszego ułamka pozostaje bez zmian, drugiego należy pomnożyć przez $-2(x-2)$, trzeciego zaś - przez $-2(3x+1)$. W wyniku otrzymamy:

$$\frac{35x + (x+2)\cdot 2(x-2) + (3x-1)\cdot(-2)(3x+1)}{-2(x-2)(3x+1)}.$$

Aby rozwiązać to równanie, trzeba jego licznik przyrównać do 0 i wykluczyć miejsca zerowe mianownika:

$$35x + 2x^2 - 8 - 2(9x^2 - 1) = 0,$$

$$(x-2) \neq 0, (3x+1) \neq 0.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy równanie:

$$-16x^2 + 35x - 6 = 0,$$

$$\triangle = 35^2 - 4 \cdot (-16) \cdot (-6) = 1225 - 384 = 84 = 29^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{35 \pm 29}{2 \cdot 16}.$$

$x_1 = 2$ nie spełnia naszych warunków (mianownik jest równy 0), natomiast $x_2 = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$ spełnia wszystkie podane warunki, zatem jest to jedyny pierwiastek naszego równania.

Przykład 5.

Przedstawić trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej i iloczynowej:

$$y = 2x^2 - 6x + 4.$$

To zadanie nie jest trudne, spróbuj rozwiązać go samodzielnie.

Rozwiązanie.

Pewnie nie miałeś większych problemów z zadaniem? Łatwo sprawdzić, że $x_1 = 1, x_2 = 2$ są pierwiastkami równania $2x^2 - 6x + 4 = 0$. Ponieważ $a = 2$, więc

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2).$$

Teraz postać kanoniczna. Przypomnijmy wzór:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a}.$$

Możemy po prostu podstawić do wzoru odpowiednie współczynniki naszego trójmianu, ale wzoru możemy po jakimś czasie zapomnieć, warto więc poznać zasady jego tworzenia - wtedy łatwiej nam będzie w razie potrzeby go odtworzyć.

Wykonajmy bardzo proste działania po prawej stronie naszego wzoru, mianowicie zastosujmy wzór skróconego mnożenia (te wzory są bardzo pomocne, należy je pamiętać!!!), wynik pomnożmy przez stałą, po uproszceniu otrzymujemy:

$$\overbrace{ax^2+bx}+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a} =$$
$$= a\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2-4ac}{4a} =$$
$$= \overbrace{ax^2+bx}+\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a} = \overbrace{ax^2+bx}+c.$$

Porównajmy wyrażenia zaznaczone klamrą - są takie same, stąd aby uzyskać postać kanoniczną, trzeba w pierwszej kolejności wyłączyć przed nawias współczynnik przy x^2, następnie uwzględniając wyłącznie wyrazy zawierające x^2 i x, tak dobrać stałą we wzorze skróconego mnożenia, żeby po jego rozwinięciu otrzymaliśmy dokładnie takie same wyrażenia zawierające x^2 i x, jak w wyjściowym wzorze.

Przypomnijmy wzory skróconego mnożenia, z których będziemy korzystać:

$$(y+t)^2 = y^2 + 2ty + t^2,$$
$$(y-t)^2 = y^2 - 2ty + t^2.$$

Zatem

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(\overbrace{x^2 - 3x} + 2) = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + ???\right] = ...$$

Co należy wpisać w miejscu "???". To jest proste:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \overbrace{x^2 - 3x} + \frac{9}{4},$$

po podniesieniu do kwadratu wyrażenia w nawiasach, otrzymaliśmy stałą, którą musimy uwzględnić w dalszych obliczeniach, pamiętając o tym, że wolno nam dokonywać tylko tożsamościowych przekształceń, stąd

$$\text{"???"} = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4},$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 2\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.$$

Umiejętność przekształcenia trójmianów kwadratowych do postaci kanonicznej i iloczynowej jest bardzo ważną czynnością, przyda się ona na studiach wyższych przy obliczaniu całek, ale to tylko uwaga na marginesie.

3 Wykresy funkcji kwadratowej

Na początek trochę teorii.

Definicja. Wykres funkcji kwadratowej nazywa się parabolą.

Twierdzenie. **Dla $a > 0$ najmniejszą wartością funkcji**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

jest

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\triangle}{4a}$$

Uwaga. Dla $a > 0$ gałęzie paraboli

$$y = ax^2 + bx + c$$

są skierowane do góry.

Twierdzenie. **Dla $a < 0$ największą wartością funkcji**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

jest

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\triangle}{4a}$$

Uwaga. Dla $a < 0$ gałęzie paraboli

$$y = ax^2 + bx + c$$

są skierowane do dołu.

Definicja. **Wierzchołkiem paraboli**

$$y = ax^2 + bx + c$$

nazywamy punkt

$$W = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right).$$

Uwaga. Umówmy się wielkość $-\frac{b}{2a}$ oznaczać symbolem x_w, a $-\frac{\triangle}{4a}$ oznaczać symbolem y_w.

Uwaga. Wróć do wzoru na postać kanoniczną trójmianu kwadratowego, teraz możemy go zapisać w takiej postaci:

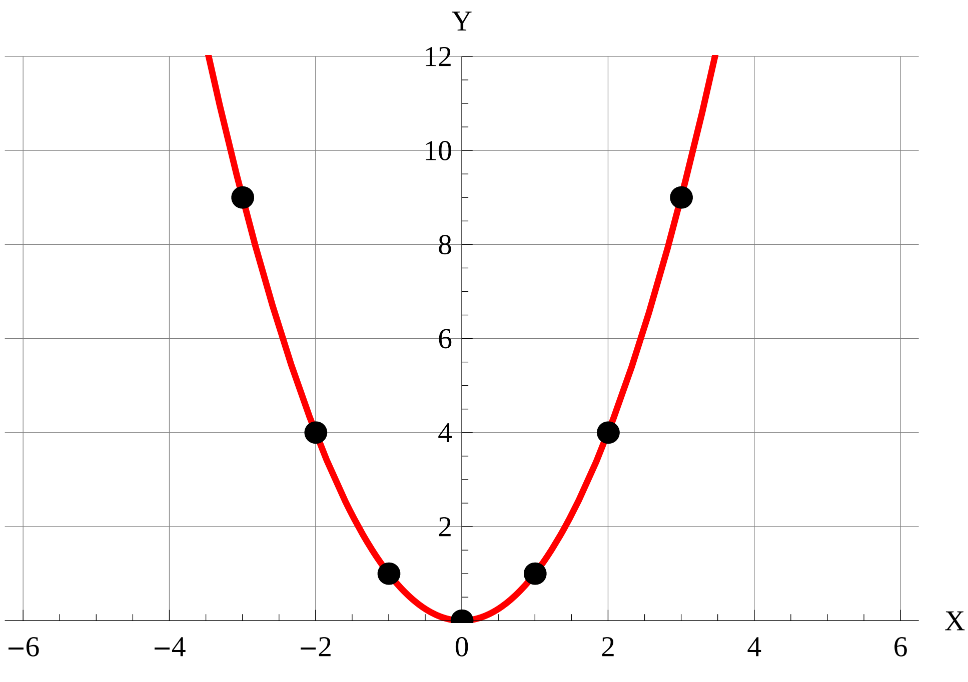
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w.$$

Po odrobinie teorii przejdźmy do praktyki. Na początek narysujmy wykres paraboli dla funkcji $y = x^2$.

Stwórzmy pomocniczą tabelkę:

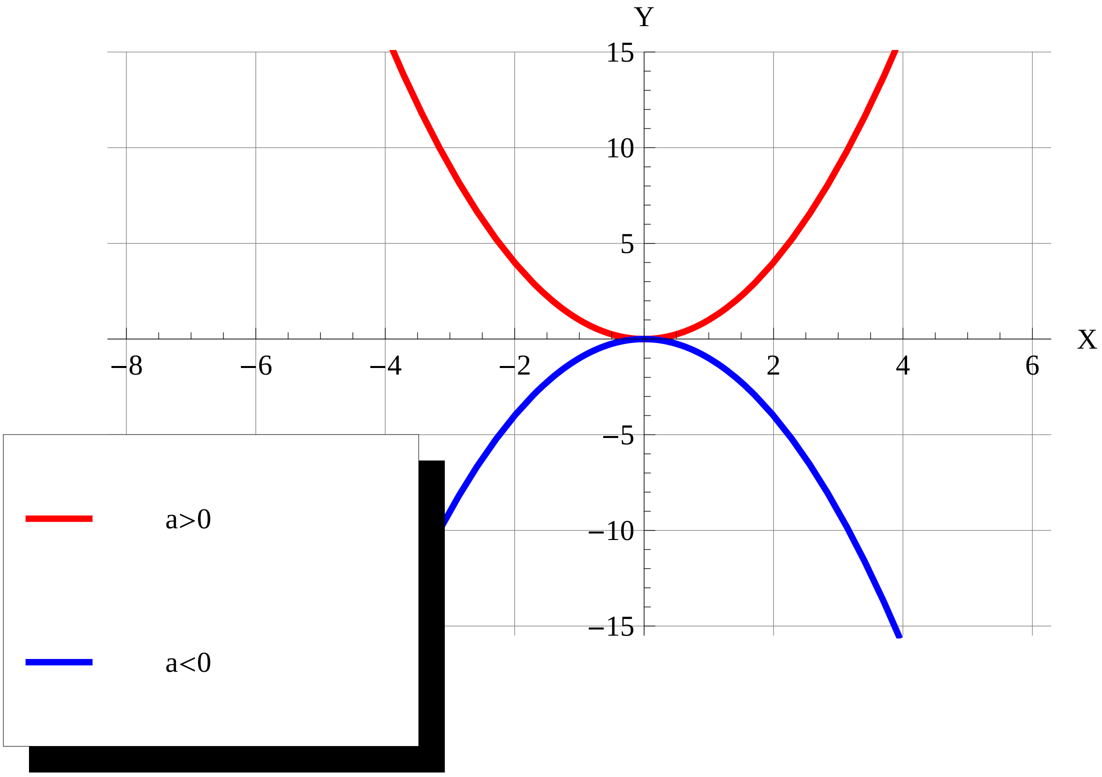
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Na podstawie tabelki narysujmy wykres funkcji; czarne punkty odpowiadają danym z tabelki.



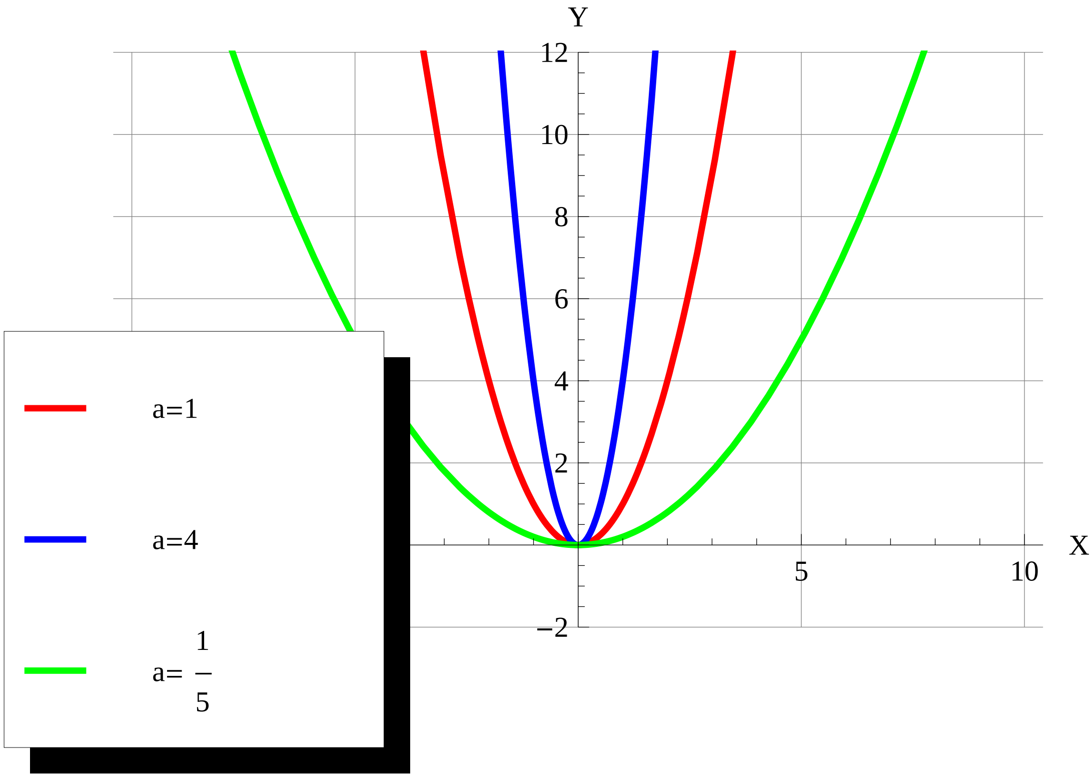
Rysunek 1: Wykres paraboli

Porównajmy wykresy funkcji: $y_1 = x^2$ oraz $y_2 = -x^2$. Dla funkcji y_1 wartość parametru $a_1 = 1, a_1 > 0$, dla y_2 wartość parametru $a_2 = -1, a_2 < 0$. Gałęzie paraboli $y_1 = x^2$ są skierowane do góry, a $y_2 = -x^2$ - do dołu. Wykresy obydwu funkcji są symetryczne względem osi OX.



Rysunek 2: Zależność wykresów paraboli od znaku parametru a

Sprawdźmy, jak zmienia się wykres paraboli wraz ze zmianą parametru a (ograniczmy się do przypadku $a > 0$). Za wzór niech nam posłuży funkcja $y_1 = x^2$. Rozpatrzmy funkcje: $y_2 = 4x^2$, $a_2 = 4$ i $y_3 = 1/5x^2$, $a_3 = 1/5$. Porównując wszystkie trzy wykresy, widzimy, że gałęzie paraboli $y_2 = 4x^2$ w stosunku do $y_1 = x^2$ są bliższe osi OY, natomiast $y_3 = 1/5x^2$- są bliższe osi OX.

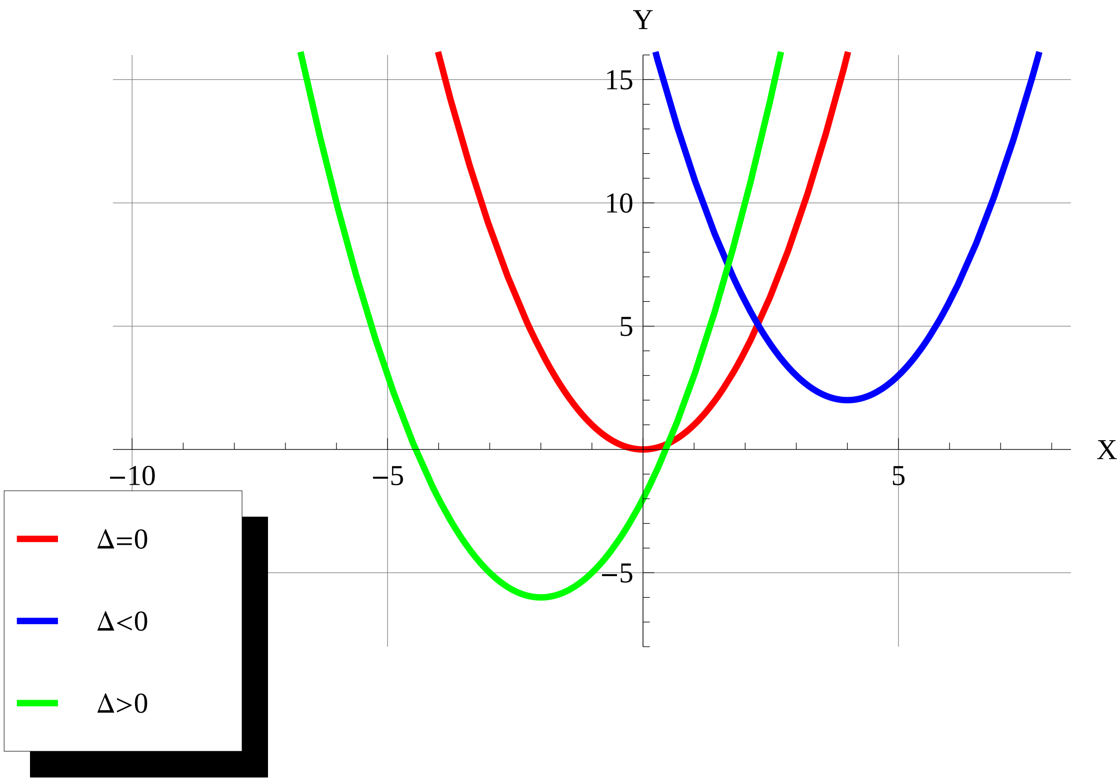


Rysunek 3: Zależność wykresów paraboli od parametru a

Uwaga. Porównując wykresy funkcji $y_1 = x^2$ z wykresem $y = ax^2, a > 0$ widzimy, że gałęzie paraboli $y = ax^2$ są bliższe osi OY dla wszystkich $a > 1$, natomiast dla wszystkich $0 < a < 1$ są bliższe osi OX.

Teraz zbadajmy, jak wygląda wykres paraboli $y = ax^2 + bx + c$ w zależności od znaku $\triangle$. Najpierw rozpatrzmy przypadek, gdy $a > 0$.

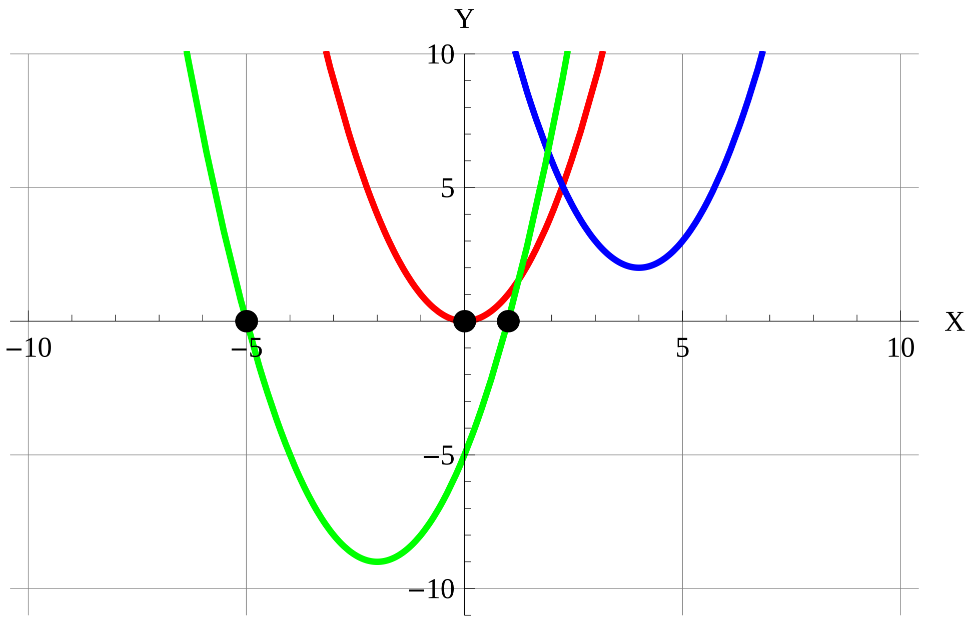
Na wykresie widzimy, że jeżeli $\triangle < 0$, to wykres znajduje się powyżej osi OX a funkcja $y = ax^2 + bx + c$ w całej swojej dziedzinie przyjmuje tylko wartości dodatnie; jeśli $\triangle > 0$, to parabola przecina oś w 2 punktach, czyli przyjmuje wartości zarazem dodatnie, jak i ujemne, a w



Rysunek 4: Zależność wykresów paraboli od znaku $\triangle$

przypadku $\triangle = 0$ wykres ma tylko jeden punkt wspólny z osią OX, czyli funkcja przyjmuje wartości dodatnie i 0.

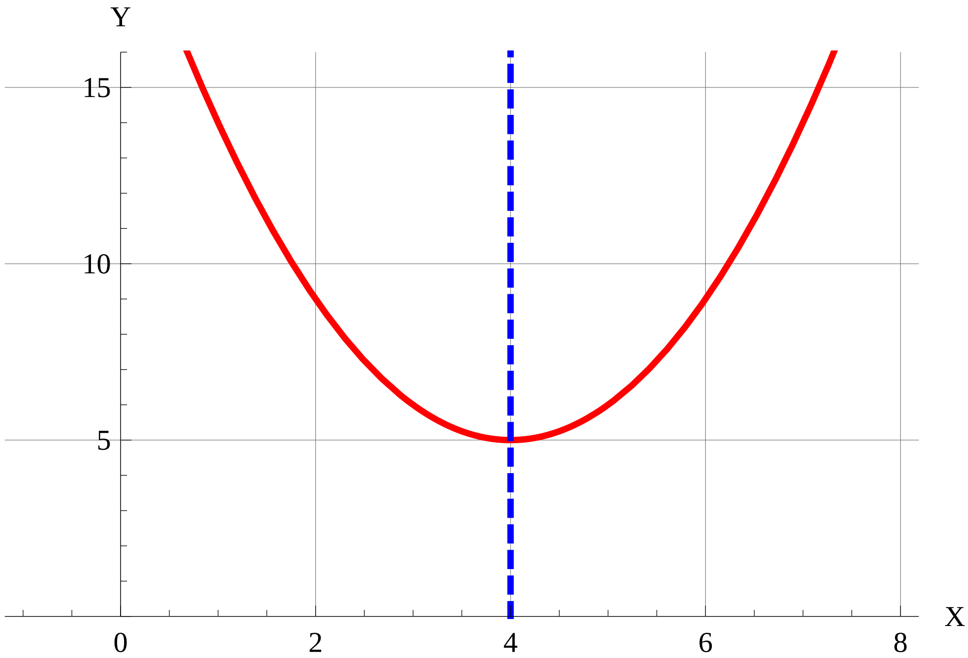
Jeżeli na poprzednim wykresie zaznaczymy punkty wspólne paraboli i osi OX, to będą to rozwiązania równań typu $ax^2 + bx + c = 0$ w zależności od wartości $\triangle$: dla $\triangle > 0$ mamy 2 różne pierwiastki, dla $\triangle = 0$ mamy pierwiastek podwójny, w przypadku $\triangle < 0$ - brak pierwiastków (oczywiście, w dziedzinie liczb rzeczywistych).



Rysunek 5: Zależność liczby miejsc zerowych trójmianu kwadratowego od znaku $\triangle$ dla $a > 0$

Podobne rozważania możemy przeprowadzić dla przypadku, gdy $a < 0$. To zadanie zostawmy jednak dla samodzielnej pracy.

Następny rysunek przedstawia wykres paraboli $y = x^2 - 8x + 21$ z zaznaczoną osią symetrii $x = 4$.



Rysunek 6: Wykres paraboli $y = x^2 - 8x + 21$ z zaznaczoną osią symetrii

Dla tej samej paraboli $y = x^2 - 8x + 21$ wyznaczmy jej wierzchołek. W tym celu przypomnijmy wzór na postać kanoniczną trójmianu kwadratowego:

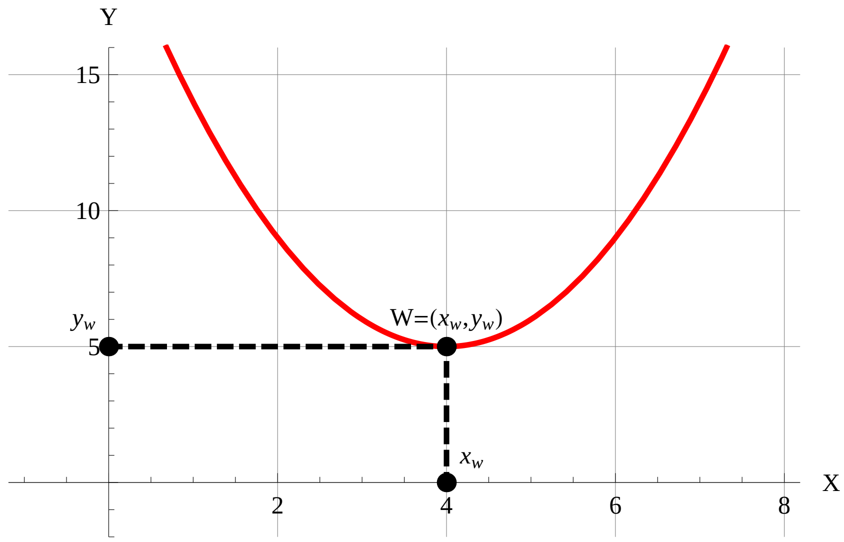
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\triangle}{4a} = a(x - x_w)^2 + y_w.$$

Stosując wzór do naszego przykładu, otrzymujemy:

$$x^2 - 8x + 21 = (x - 4)^2 + 5,$$

stąd $x_w = 4$, $y_w = 5$, czyli wierzchołek paraboli

$$W = (4, 5).$$



Rysunek 7: Wykres paraboli $y = x^2 - 8x + 21$ z zaznaczonym wierzchołkiem

Zostańmy na chwilkę przy tym zagadnieniu.

Przykład 6.

Wyznaczyć wierzchołek paraboli:

1. $y = 2x^2 - 2x + \frac{1}{4}$,
2. $y = 0.5x^2 + 4x + 6$.

To łatwe zadanie postaraj się rozwiązać samodzielnie.

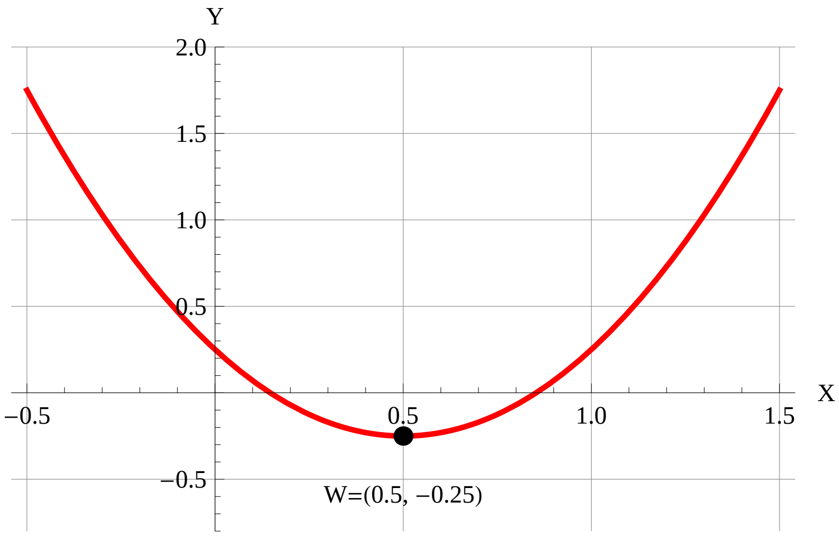
Rozwiązanie.

Prawdopodobnie nie było żadnych problemów z rozwiązaniem tego zadania. Sprawdźmy:

1. Przedstawmy trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej:

$$y = 2x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 2(x - 0.5)^2 - 0.25,$$

stąd wierzchołek paraboli $W = (0.5, -0.25)$.



Rysunek 8: Wierzchołek paraboli $y = 2x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

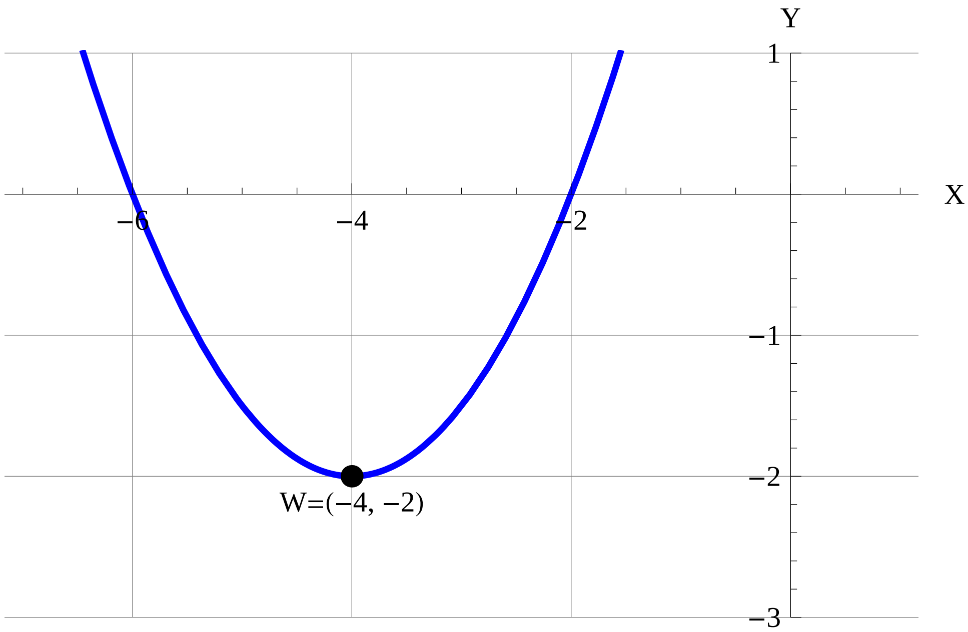
2. Drugie zadanie rozwiązujemy podobnie:

$$y = 0.5x^2+4x+6 = 0.5(x+4)^2-2 = 0.5\underline{[x-(-4)]^2}-2.$$

Uwaga. Proszę zwrócić uwagę na proste przekształcenia (podkreślona część wzoru), które pomogą nam uniknąć błędu przy wyznaczeniu współrzędnych wierzchołka paraboli: mianowicie w przypadku, gdy mamy do czynienia z wyrażeniem typu $(x+4)$ należy przedstawić go w postaci różnicy $[x-(-4)]$, wtedy na pewno nie pomylimy się, wyznaczając x_w.
W naszym przykładzie $x_w = -4$, $y_w = -2$, czyli wierzchołek paraboli $W = (-4, -2)$.

Uwaga. Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$ możemy otrzymać, przesuwając parabole $y = ax^2$ o wektor

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = [x_w, y_w].$$



Rysunek 9: Wierzchołek paraboli $y = 0.5x^2 + 4x + 6$

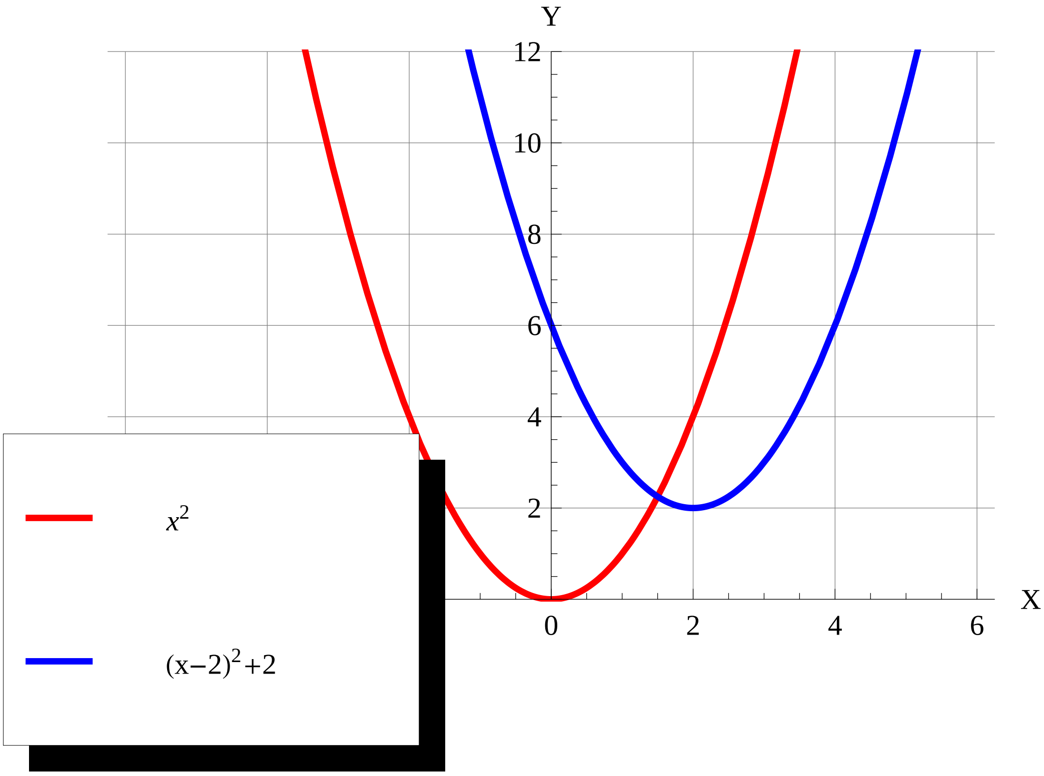
Przykład 7.

Wyznacz wektor, o który trzeba przesunąć

1. wykres paraboli $y_1 = x^2$, aby otrzymać wykres paraboli $y_2 = x^2 - 4x + 6$,
2. wykres paraboli $y_1 = 3x^2$, aby otrzymać wykres paraboli $y_2 = 3x^2 - 8x + 2$.

Rozwiązanie.

1. Aby lepiej zrozumieć sens tego zadania, zapomnijmy na chwilkę o wektorze przesunięcia i standardową metodą narysujmy wykresy obydwóch funkcji.



Rysunek 10: Wykresy funkcji $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 - 4x + 6$

W legendzie do wykresu funkcja $y_2 = x^2 - 4x + 6$ jest zapisana w postaci kanonicznej jako

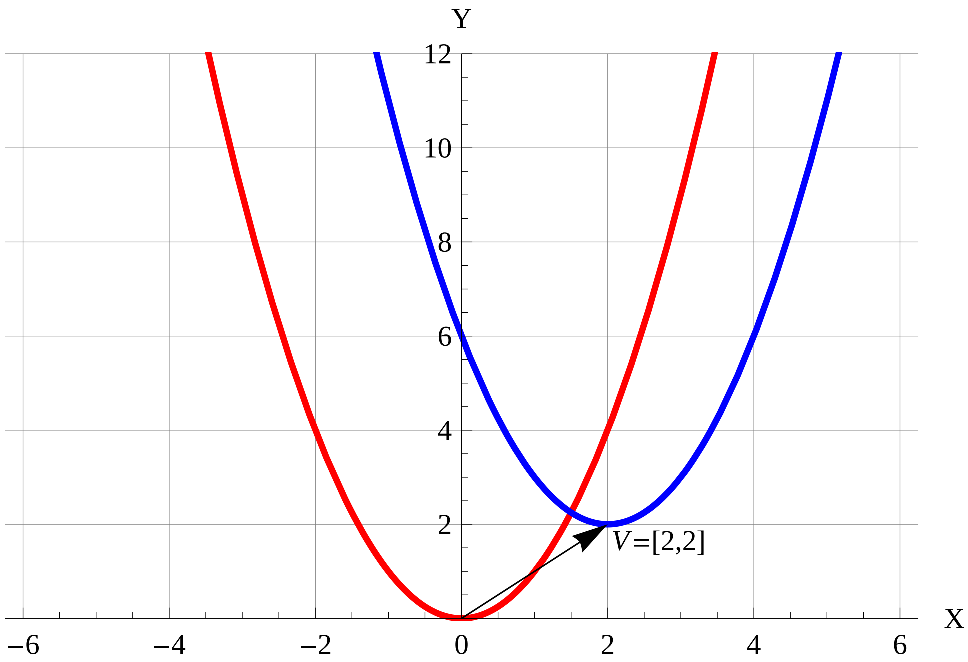
$$y_2 = (x - 2)^2 + 2.$$

Wierzchołek paraboli y_1 - to $W_1 = (0, 0)$, a y_2 - to $W_2 = (2, 2)$. Stąd wektorem, o który należy przesunąć parabole y_1, aby otrzymać y_2 jest wektor

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = [2, 2].$$

Na tym wykresie są przedstawione parabole y_1 i y_2 oraz wektor przesunięcia

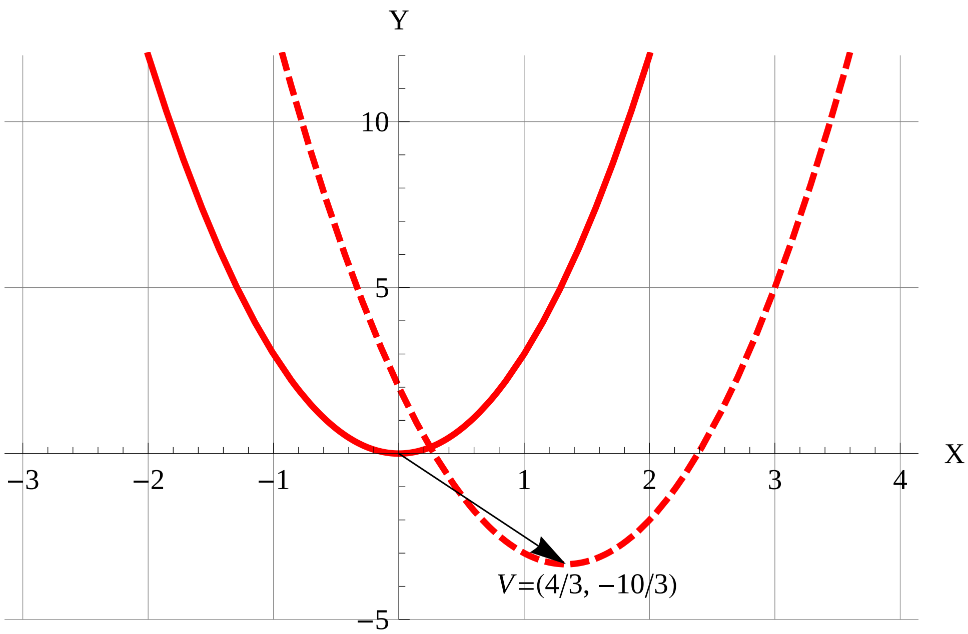
$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = [2, 2].$$



Rysunek 11: Parabole y_1 i y_2 z wektorem przesunięcia $\mathbf{v} = [2, 2]$

2. Przedstawmy trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej: $y_2 = 3x^2 - 8x + 2 = 3(x - 4/3)^2 - 10/3$. Stąd wektor o który należy przesunąć parabolę y_1 aby otrzymać y_2 wynosi:

$$\overrightarrow{\mathbf{v}} = [4/3, -10/3].$$



Rysunek 12: Parabole y_1 i y_2 z wektorem przesunięcia $\mathbf{v} = [4/3, -10/3]$

4 Nierówności kwadratowe

Definicja. **Jeżeli $f(x)$ jest trójmianem kwadratowym, to każdą z nierówności:**

$$f(x) > 0, \quad f(x) \geqslant 0,$$

$$f(x) < 0, \quad f(x) \leqslant 0,$$

nazywamy nierównością kwadratową.

Przykład 8.

Dla każdego z danych trójmianów kwadratowych $f(x)$ rozwiąż nierówności:

$$f(x) > 0, \quad f(x) \geqslant 0,$$

$$f(x) < 0, \quad f(x) \leqslant 0.$$

1. $f(x) = x^2$,
2. $f(x) = x^2 - 8x + 18$,
3. $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

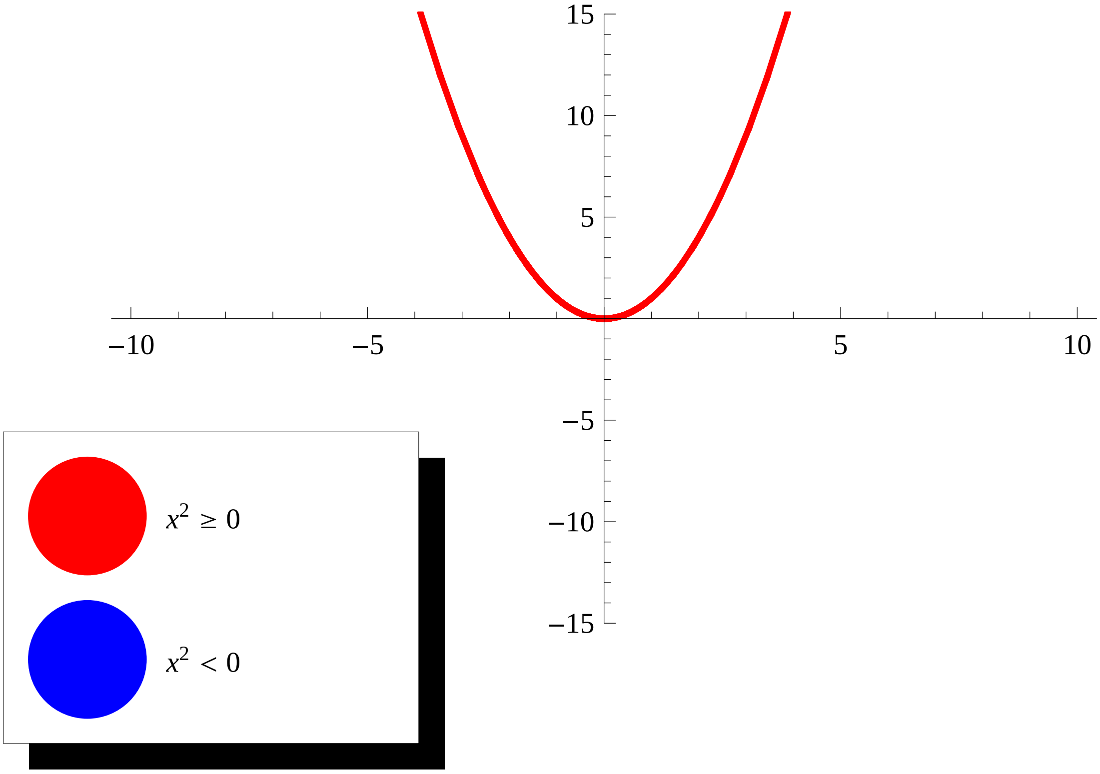
Rozwiązanie.

1. Przy rozwiązywaniu nierówności bardzo pomocne są geometryczne metody. Narysujmy wykres pierwszej funkcji - to dobrze znana nam parabola, ale tym razem chcemy uzyskać informacje, dla jakich wartości zmiennej x funkcja $f(x)$ przyjmuje znaczenia: > 0, $\geqslant 0$,< 0, $\leqslant 0$.

Funkcja $f(x) = x^2$ ma pierwiastek podwójny

$$x_1 = x_2 = 0.$$

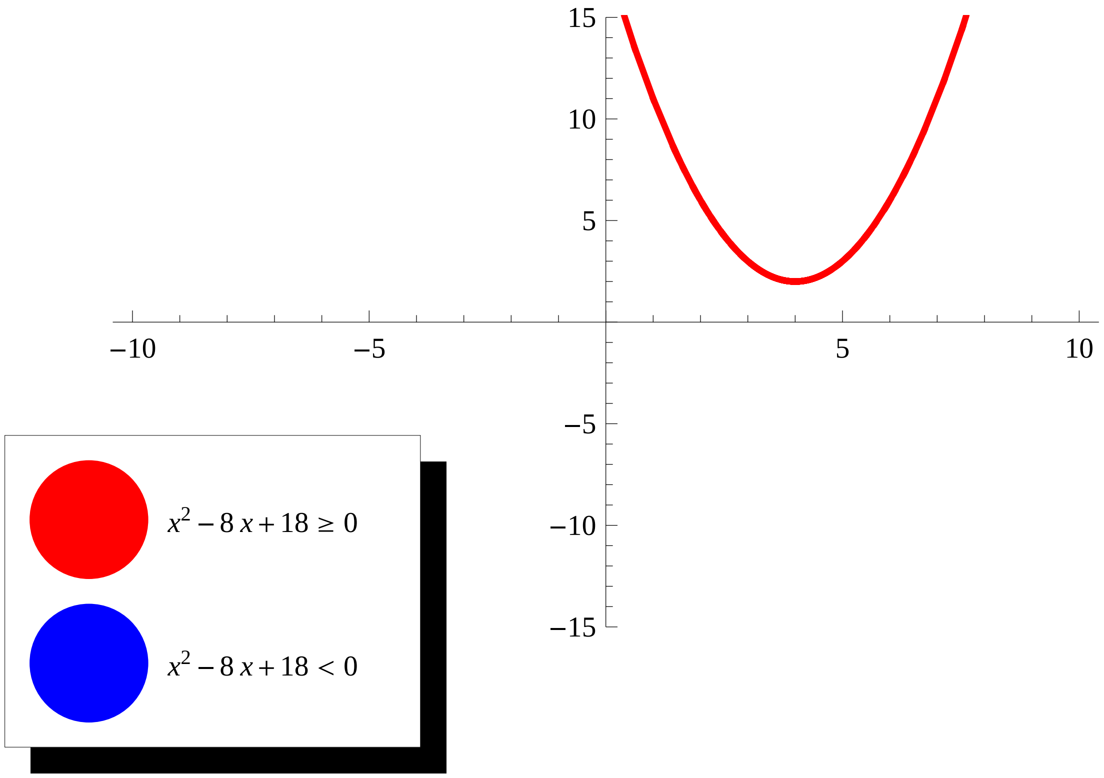
Wykres funkcji ma więc tylko jeden punkt wspólny z osią OX: $W = (0, 0)$. Współczynnik $a = 1$ jest większy od 0, stąd z wyjątkiem jednego punktu, wykres funkcji leży nad osią OX. Rozwiązania nierówności są następujące:



Rysunek 13: Wykres paraboli $f(x) = x^2$

$$x^2 > 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
$$x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R},$$
$$x^2 < 0 \Longrightarrow x \in \varnothing,$$
$$x^2 \leqslant 0 \Longrightarrow x \in \{0\}.$$

2. Druga funkcja $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ma $\triangle < 0$, wykres funkcji nie ma punktów wspólnych z osią OX i leży całkowicie nad nią:



Rysunek 14: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 8x + 18$

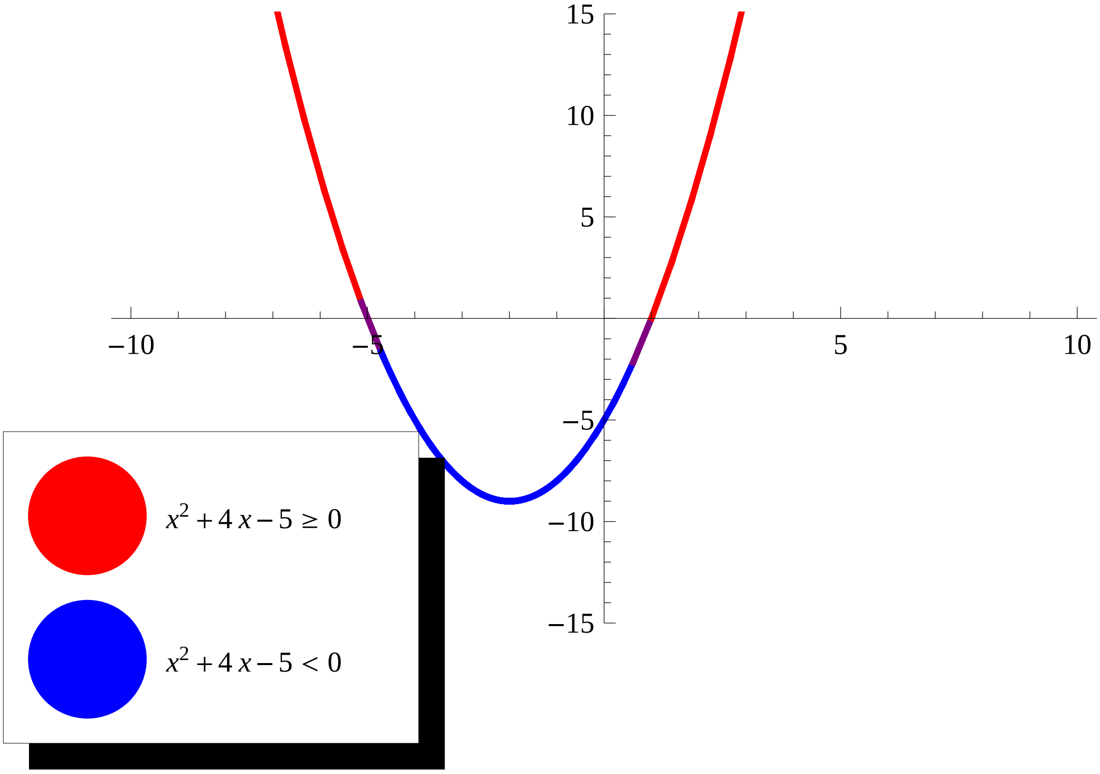
Rozwiązania nierówności są następujące:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 8x + 18 > 0 &\Longrightarrow x \in \mathbb{R}, \\
x^2 - 8x + 18 \geqslant 0 &\Longrightarrow x \in \mathbb{R}, \\
x^2 - 8x + 18 < 0 &\Longrightarrow x \in \varnothing, \\
x^2 - 8x + 18 \leqslant 0 &\Longrightarrow x \in \varnothing.
\end{aligned}
$$

Uwaga. Zauważmy że zachodzi :

$$x^2 - 8x + 18 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 + 2 = (x-4)^2 + 2 > 0$$

3. Funkcja z trzeciego przykładu $f(x) = x^2 + 4x - 5$ ma 2 różne pierwiastki $x_1 = -5$ i $x_2 = 1$. Wykres funkcji ma 2 punkty wspólne z osią OX, a funkcja przyjmuje wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne.



Rysunek 15: Wykres funkcji $f(x) = x^2 + 4x - 5$

Uwaga. Zauważmy że zachodzi :

$$x^2 + 4x - 5 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 9 = (x+2)^2 - 9$$

Stąd

$$x^2 + 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2 < 9 \Leftrightarrow -3 < (x+2) < 3 \Leftrightarrow -3-2 < x < 3-2$$

i ostatecznie

$$-5 < x < 1.$$

Ponadto

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 > 0,$$

zatem nasza funkcja ma 2 miejsca zerowe (funkcja ma miejsca zerowe trójmian ma pierwiastki).

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = -5,$$
$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = 1,$$

Porównując pierwiastki z uzyskanymi wcześniej końcami przedziału będącego rozwiązaniem naszej nierówności mamy, że

$$x_1 < x < x_2.$$

należy zwrócić uwagę, że ta nierówność jest prawdziwa gdy $a > 0$

Rozwiązania nierówności są następujące:

$$x^2 + 4x - 5 > 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty),$$

$$x^2 + 4x - 5 \geqslant 0 \Longrightarrow x \in (-\infty, -5\rangle \cup \langle 1, +\infty),$$

$$x^2 + 4x - 5 < 0 \Longrightarrow x \in (-5, 1),$$

$$x^2 + 4x - 5 \leqslant 0 \Longrightarrow x \in \langle -5, 1\rangle.$$

Zadanie.

Dla $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ rozwiąż nierówności:

$$f(x) > 0, \quad f(x) \geqslant 0,$$

$$f(x) < 0, \quad f(x) \leqslant 0.$$

5 Równania i nierówności kwadratowe z parametrem

Zadania z parametrem sprawiają dużo problemów uczniom. Trzeba przyznać, że wśród nich zdarzają się naprawdę trudne do rozwiązania, wymagające obszernej wiedzy i sposobności kojarzenia różnych faktów. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem w większości nie należą do tej grupy, na prostych przykładach udowodnimy, jak należy takie zadania rozwiązywać.

Przykład 9.

Dla jakich wartości parametru m równanie:

$$3x^2 - 6x + 2m = 0$$

ma jeden pierwiastek?

Rozwiązanie.

Wiemy, że równanie kwadratowe ma jeden pierwiastek wtedy i tylko wtedy, gdy jego $\triangle = 0$. Dla naszego równania

$$\triangle = 36 - 24m.$$

Rozwiążmy równanie:

$$36 - 24m = 0.$$

$$36 = 24m,$$

stąd rozwiązaniem zadania jest

$$m = \frac{3}{2}.$$

Przykład 10.

Dla jakich wartości parametru t równanie:

$$6x^2 + tx + 6 = 0$$

nie ma pierwiastków?

Rozwiązanie.

Wiemy, że równanie kwadratowe nie ma pierwiastków wtedy i tylko wtedy, gdy jego $\triangle < 0$.
W naszym równaniu

$$\triangle = t^2 - 144.$$

Trzeba rozwiązać nierówność:

$$t^2 - 144 < 0,$$

$$t^2 < 144.$$

Stąd pierwiastkując obustronnie otrzymujemy:

$$|t| < 12.$$

Rozwiązaniem zadania są:

$$t \in (-12, 12).$$

Przykład 11.

Dla jakich wartości parametru b równanie:

$$2x^2 + 6x + b = 0$$

ma 2 różne pierwiastki?

Rozwiązanie.

Wiemy, że równanie kwadratowe ma 2 różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy jego $\triangle > 0$. W danym równaniu

$$\triangle = 36 - 8b.$$

Trzeba rozwiązać nierówność:

$$36 - 8b > 0,$$

$$8b < 36,$$

stąd otrzymujemy:

$$b < \frac{9}{2}.$$

Rozwiązaniem zadania są:

$$b \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right).$$

6 Wzory Viète'a

Przykład 12.

Korzystając ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, zapisz wyrażenia

$$x_1 + x_2,$$

$$x_1 \cdot x_2$$

w postaci, zawierającej tylko współczynniki a, b, c. Wykonaj polecenie samodzielnie.

Rozwiązanie.

Jeśli prawidłowo wykonałeś to proste zadanie, to otrzymałeś wzory Viète'a.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Podobnie

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} =$$

$$= \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

Twierdzenie. **Jeżeli x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, to**

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Przykład 13.

Korzystając ze wzorów Viète'a, zapisz wyrażenie $x_1^2 + x_2^2$ w zależności od współczynników a, b, c równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$.

Rozwiązanie.

Aby ułatwić zadanie, w trakcie rozwiązania zastosujmy wzory skróconego mnożenia:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$

a następnie wzory Viète'a, otrzymując

$$(-b/a)^2 - 2c/a = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}.$$

Przykład 14.

Korzystając ze wzorów Viète'a, rozwiąż równanie:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Rozwiązanie.

Korzystając ze wzorów Viète'a, stwórzmy układ prostych równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \cdot x_2 = -6. \end{cases} \tag{1}$$

Możemy wyznaczyć pierwiastki równania, dobierając je z dzielników wyrazu wolnego, w naszym przypadku dzielnikami -6 są liczby: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Dobierając parę liczb tak, aby ich suma wynosiła 1, a iloczyn -6, łatwo wywnioskować, że tymi liczbami są $x_1 = -2, x_2 = 3$. Podstawienie wyznaczonych pierwiastków do równania potwierdza prawidłowość wyniku. Jeżeli mamy problem z zastosowaniem powyższej metody, możemy rozwiązać układ równań w standardowy sposób - przez podstawienie.

Uwaga. Wzory Viète'a możemy stosować w celu sprawdzenia pierwiastków równania kwadratowego, lepiej jednak dokonując sprawdzenia, jeden z pierwiastków bezpośrednio podstawić do równania, a dopiero przy sprawdzeniu kolejnego zastosować wzory Viète'a.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.

Rozwiązać równania:

a) $0.4x^2 - x + 0.2 = 0$,

b) $(8x-1)(2x-3) - (4x-1)^2 = 38$,

c) $\frac{(y+1)^2}{12} - \frac{1-y^2}{24} = 0$.

Odpowiedzi.

a) $x_1 = \frac{5-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{4}$;

b) $x = -2$;

c) $y_1 = -1$, $y_2 = -\frac{1}{3}$.

Zadanie 2.

Wyznaczyć, dla jakich wartości parametru t:

a) równanie $x^2 - tx + 1 = 0$ ma 2 pierwiastki;

b) równanie $5x^2 + 2tx + 5 = 0$ ma 1 pierwiastek;

c) równanie $2x^2 - 15x + t = 0$ nie ma pierwiastków.

Odpowiedzi.

a) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$;
b) $t_1 = -5$, $t_2 = 5$;
c) $t \in (\frac{225}{8}, +\infty)$.

Zadanie 3.

Rozwiązać równania:

a) $6x^4 + 3.6x^2 = 0$;

b) $x^3 + 3x = 3.5x^2$;

c) $9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$.

Odpowiedzi.

a) $x = 0$;

b) $x = 0$, $x = 1.5$, $x = 2$;

c) $x = -1/3$, $x = 1/3$, $x = 2$.

Zadanie 4.

Rozwiązać nierówności:

a) $4x^2 + 5 > 2x^2 + 1$;

b) $x^2 + 8x + 12 \leqslant x + 2$;

c) $x^2 + x + 1 < 0$.

Odpowiedzi.

a) $x \in \mathbb{R}$;
b) $x \in \langle -5, -2 \rangle$;
c) $x \in \varnothing$.

Zadanie 5.

Wyznacz postać iloczynową i postać kanoniczną następujących trójmianów kwadratowych:

a) $y = 3x^2 + 6x$,

b) $y = 2x^2 - 10x + 12$,

c) $y = x^2 + 4x + 5$.

Odpowiedzi.

a) $y = 3x\left(x-2\right),\ y = 3\left(x-1\right)^2 - 3$;

b) $y = 2\left(x-2\right)\left(x-3\right),\ y = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$;

c) trójmian nie ma postaci iloczynowej,

$y = \left(x+2\right)^2 + 1$.

Zadanie 6.

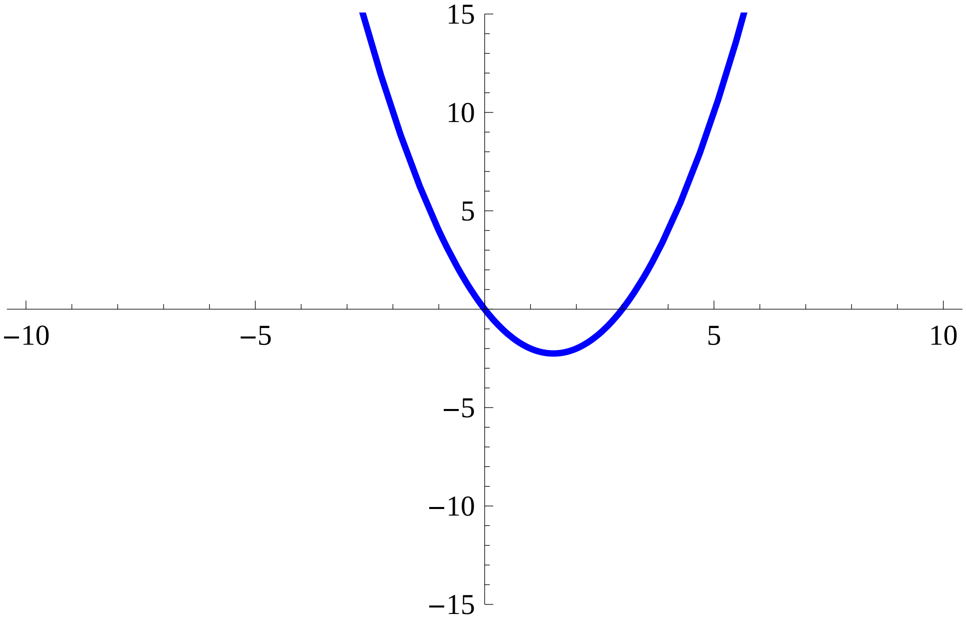
Narysować wykresy funcji:

a) $y = x^2 - 3x$,

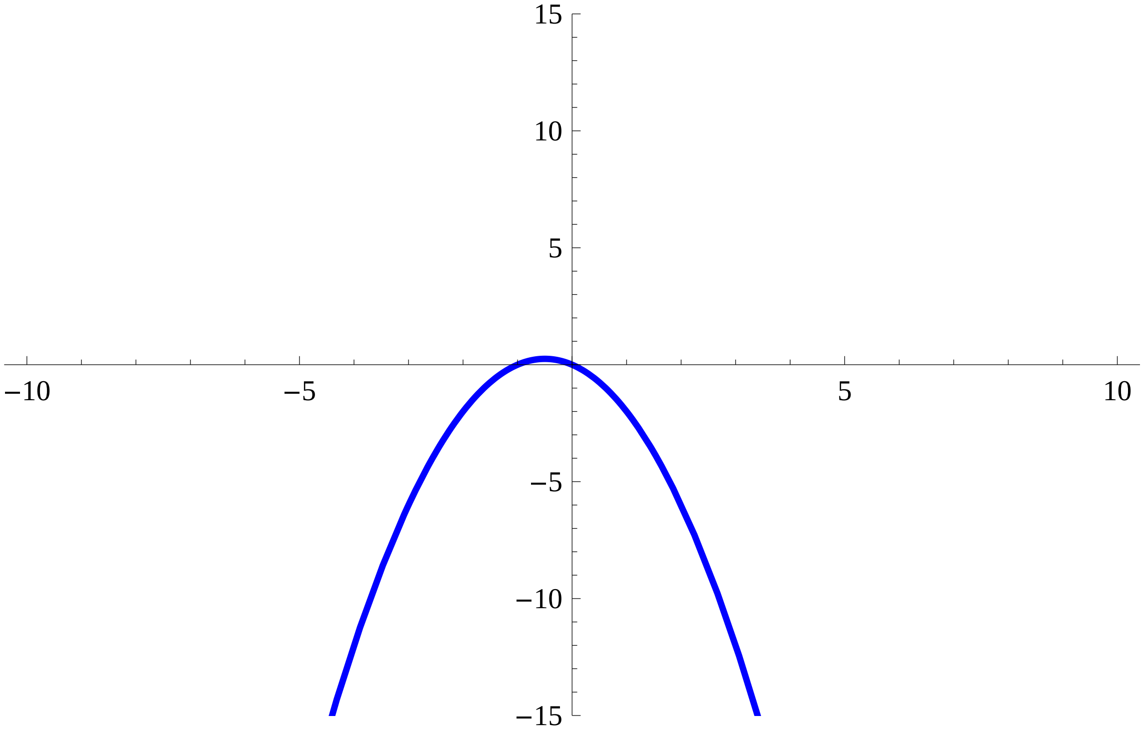
b) $y = -x - x^2$,

c) $y = -3x^2 + 4x - 1$,

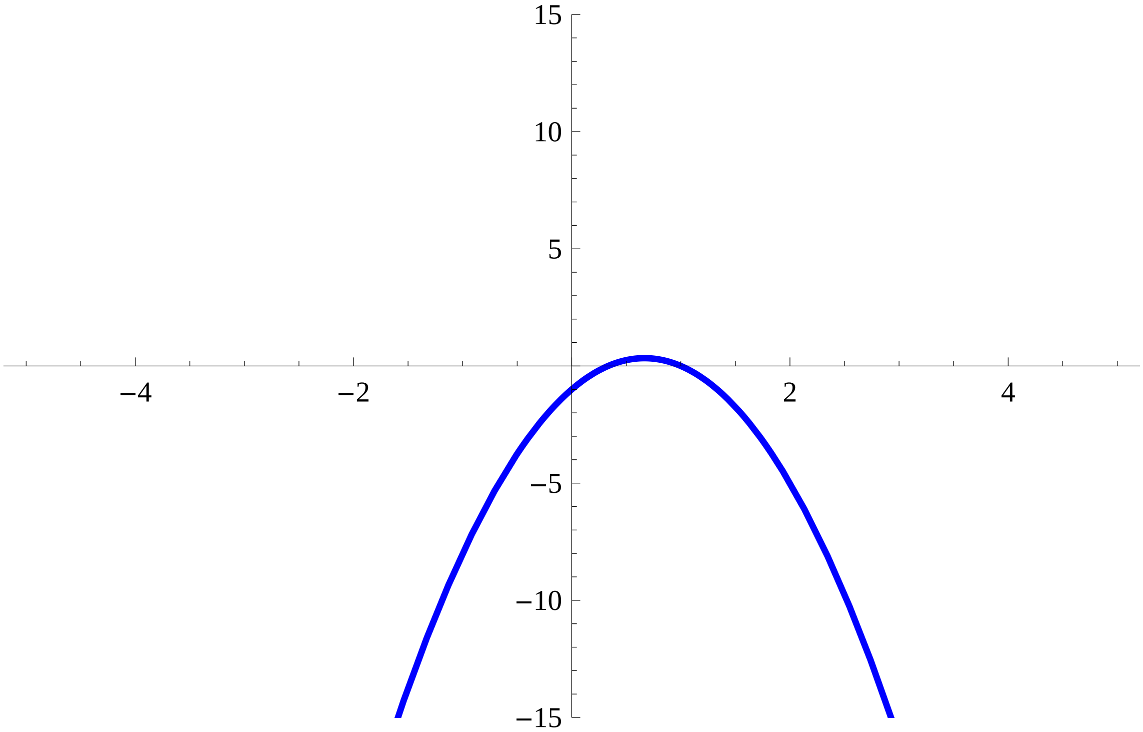
Odpowiedzi.



Rysunek 16: Wykres funkcji $f(x) = x^2 - 3x$



Rysunek 17: Wykres funkcji $f(x) = -x - x^2$



Rysunek 18: Wykres funkcji $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$

Literatura

[1] J. Anusiak, Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum, klasa I, WSiP, Warszawa 1990.

[2] M. Antek, P. Grabowski, Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym, Nowa Era , Warszawa 2006.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, Matematyka I. Podręcznik do liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2008.

[4] M. Sadowski, Algebra w zadaniach, HARMONIA, Gda?sk 2000.

[5] H. Pawłowski, Matematyka 1. Podręcznik zakres rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.