E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat: Wyrażenia algebraiczne

Materiały merytoryczne do kursu

"Matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat." (GALILEUSZ)

W kursie dotyczącym wyrażeń algebraicznych uwzględniono zarówno teorię jak i przykłady rozwiązań zadań. Z wyrażeniami algebraicznymi uczniowie mieli do czynienia w gimnazjum i na początku szkoły średniej. Tym kursem chcemy przypomnieć i utrwalić poznane wiadomości. Nabyta sprawność rachunkowa w przekształcaniu i działaniu na wyrażeniach algebraicznych ułatwia uczniom opanowanie następnych działów. Z nauczycielskiej praktyki wynika, że problemem w szkole średniej jest nie tyle nowa wiedza, co braki umiejętności działań na wyrażeniach. Rozważano tu następujące zagadnienia: dodawanie i odejmowanie wyrażeń algebraicznych, mnożenie sumy przez jednomian, redukcję wyrazów podobnych, potęgowanie i pierwiastkowanie, rozkładanie sumy algebraicznej na czynniki (tu również z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia). Przybliżono także zagadnienia dotyczące równań liniowych oraz wyrażeń wymiernych. Kolejna część kursu, to zadania do samodzielnego rozwiązania dla kursanta. Na koniec uczeń ma za zadanie rozwiązać test sprawdzający jego wiadomości i umiejętności z powyższych zagadnień.

************wstawic rysunek z wydruku**********************

1 Wyrażenia algebraiczne-teoria i przykłady

"Celem obliczeń nie są same liczby, lecz ich zrozumienie." (R. W. HAMMING)

Zanim przejdziemy do działań na "literkach" rozważmy prostą zabawę na liczbach.

Zabawa magiczną kostką

Przejdź od górnego lewego rogu szeregu cyfr i znaków arytmetycznych poprzez kwadrat tak, by przy wyjściu w dolnym prawym rogu figury końcowy wynik działań równał się 5. Wolno posuwać się tylko poziomo lub pionowo, nigdy na ukos. Dla ułatwienia zdradzimy w zaufaniu, że należy przejść tylko przez 6 pól z cyframi. Zapisz wyrażenie liczbowe opisujące twoją drogę do wyniku.

************* wstawić rysunek z pliku Magiczna kostka ***********

Odp. ((((2 + 8) x 3) - 9) + 4) : 5 = 5.

Powyższy przykład pokazał nam jak przy pomocy liczb zapisać pewien przepis. W tym przypadku przepis na przejście jakiejś drogi. W życiu codziennym otrzymujemy coraz więcej przepisów. Takimi przepisami są przepis na placek np. $placek = 2m + 3j + 1ms + 0,3c + 1p$. Można to odczytać jako: placek zrobisz z dwóch kg mąki, trzech jajek, jednej kostki masła, trzydziestu dekagramów cukru i jednego proszku do pieczenia. Do zapisu przepisu używamy symboli literowych. Tak samo w matematyce czy fizyce, chemii do zapisu przepisu na pewne prawo, zasadę, czy reakcję używamy symboli literowych. Aby umieć je odczytać należy nauczyć się pewnych zasad działania na nich. Po to są potrzebne wyrażenia algebraiczne dla których określamy zasady działań analogicznie do działań na liczbach.

WYRAŻENIEM ALGEBRAICZNYM nazywamy wyrażenie, w którym występują liczby i litery połączone znakami działań i nawiasami. Przykłady wyrażeń algebraicznych to:

$$12, \quad x+y, \quad 5a-b, \quad ef, \quad \frac{m}{n}, \quad x-(y^2+5z^3), \quad ...$$

************wstawic rysunek z wydruku**********************

Zatem jak zauważyliśmy wyrażeń algebraicznych używamy do zapisu przepisów na obliczanie pewnych wielkości. Przykładem mogą być wzory na pola powierzchni figur, objętości brył, czy też prawa fizyki jak wzór na przyspieszenie. Wśród wyrażeń algebraicznych wyróżniamy JEDNOMIANY, tzn. iloczyny liczb i liter lub pojedyncze liczby czy litery, np.:

$$2xy, 3, abc, -z, x, \frac{1}{5}xy.$$

Sumę jednomianów nazywamy **SUMĄ ALGEBRAICZNĄ**, np.

$$3x + 7y - 5z + 3xyz, 2x - x + y - 3.$$

Sumę algebraiczną nazywamy też **WIELOMIANEM**.

Jednomiany różniące się tylko współczynnikiem liczbowym, to **WYRAZY PODOBNE** np.

************wstawic rysunek z wydruku**********************

$$3x,\ 3x;$$

$$5xyz,\ \frac{1}{2}xyz,\ -15xyz;$$

$$13a^2b,\ -8a^2b,\ 5a^2b.$$

Przykład.
Z podanych jednomianów wybierz wyrazy podobne:

$$3x^2y,\ 5y^2x,\ 2x^2,\ 4y^2,\ 5x^2y,\ 7y^2,\ 12x^2.$$

Wyrazami podobnymi są $3x^2y$ i $5x^2y$, $2x^2$ i $12x^2$ oraz $4y^2$ i $7y^2$.

Redukcja wyrazów podobnych polega na wykonaniu wskazanych działań (dodawania lub odejmowania) na współczynnikach liczbowych wyrazów podobnych, w wyniku czego możemy kilka wyrazów podobnych zastąpić jednym.
Przykład:
$7x + 9x - 3x = 13x$,
$5ab - 6ab + \frac{3}{4}ab = -\frac{3}{4}ab$,
$\underline{3y^2} - \underline{\underline{3y}} + \underline{\underline{3y}} - \underline{y^2} + 6 = 2y^2 + 6$.

Nazwę wyrażenia algebraicznego określa ostatnie działanie, które wykonuje się zgodnie z zasadą wykonywania działań.
Przykład.
$\frac{a^2-2b^3}{3} - \frac{2a^2-b^3}{2}$ różnica dwóch wyrażeń,
$(a+\sqrt{3})^3$ potęga wyrażenia,
$(x+y-1)(x-y+5)$ iloczyn dwóch wyrażeń.

Jeśli w wyrażeniu algebraicznym podstawimy zamiast liter liczby, to obliczymy wartość liczbową wyrażenia.
Przykład.
Obliczymy wartość liczbową wyrażenia $0,5x^2(4c^3-5)$ dla $x=-2$, $c=1$:
$0,5(-2)^2(4\cdot 1^3 - 5) = 0,5\cdot 4(4-5) = 2\cdot(-1) = -2$.

Dodawanie (odejmowanie) wyrażeń algebraicznych polega na opuszczeniu nawiasów i zredukowaniu wyrazów podobnych.

Przykład.
$(x^2+5xy)+(3x^2-2xy+5)=x^2+5xy+3x^2-2xy+5=4x^2+3xy+5.$

Mnożąc sumę przez jednomian należy każdy wyraz sumy pomnożyć przez jednomian i otrzymane wyniki dodać i o ile to możliwe, wykonać redukcję wyrazów podobnych.
Przykład.
$-3ab(-6a^2-2ab-b^2)-(3ab^3+6a^2b^2)=18a^3b+6a^2b^2+3ab^3-3ab^3-6a^2b^2=18a^3b.$

Mnożąc dwie sumy algebraiczne, mnożymy każdy składnik jednej sumy przez każdy składnik drugiej sumy, a otrzymane iloczyny dodajemy.
Na przykład:
$(2+x)(x-5)=2x-10+x^2-5x=x^2-3x-10.$

Potęgowanie. Bardzo ważnym zagadnieniem w matematyce jest potęgowanie będącym skróconym zapisem mnożenia przez siebie tych samych czynników, gdy wykładnik potęgi jest liczbą naturalną.
Przypomnimy podstawowe własności dotyczące działań na potęgach o wykładniku naturalnym:

Jeśli a, b są liczbami rzeczywistymi różnymi od zera i p, r liczbami naturalnymi, to:
1) $a^r \cdot a^p = a^{r+p}$,
2) $a^r : a^p = a^{r-p},\ r \geqslant p$,
3) $(a^r)^p = a^{r \cdot p}$,
4) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,
5) $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$.

************wstawic rysunek z wydruku**********************
Możemy także rozważać potęgi o wykładniku całkowitym czy rzeczywistym i wtedy mamy podobne własności:
Jeśli a, b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi i p, r liczbami rzeczywistymi, to:
1) $a^r \cdot a^p = a^{r+p}$,
2) $a^r : a^p = a^{r-p}$,
3) $(a^r)^p = a^{r \cdot p}$,
4) $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,

5) $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$.

************wstawic rysunek z wydruku***********************

Przykład.
1) $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$,
2) $2^{10} : 2^7 = 2^3$,
3) $(3^3)^2 = 3^6$,
4) $4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2$,
5) $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$.

Analogiczne własności możemy zapisać dla pierwiastkowania
Jeśli $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $p \in \mathbb{N}_+$ i $a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, to:
1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$,
3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$,
4) $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.

Przykład.
1) $\sqrt[3]{14 \cdot 7} = \sqrt[3]{14} \cdot \sqrt[3]{7}$,
2) $\sqrt[5]{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt[5]{25}}{\sqrt[5]{4}}$,
3) $\sqrt[3]{\sqrt{6}} = \sqrt[3 \cdot 2]{6} = \sqrt[6]{6}$,
4) $(\sqrt[8]{9})^2 = \sqrt[8]{9^2}$.

Inne przykłady działań na potęgach:
$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$,
$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$,
$2376^0 = 1$,
$a^3 a^5 \frac{b^2}{a^7} =$
stosując kolejno własności 1 i 2 potęgowania otrzymujemy:
$= a^8 \frac{b^2}{a^7} = ab^2$.

1.1 Rozkładanie sumy algebraicznej na czynniki

************wstawic rysunek z wydruku***********************

Rozłożyć sumę algebraiczną na czynniki, to znaczy zapisać ją w postaci iloczynu.

Omówimy trzy sposoby zamiany sumy algebraicznej na iloczyn:
• wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias,
• grupowanie wyrazów,
• stosowanie wzorów skróconego mnożenia.

Do wyłączania wspólnego czynnika przed nawias stosujemy prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Możemy to prawo zapisać w odwrotnej kolejności: $ab+ac = a(b+c)$. Wyrazy sumy $ab + ac$ mają wspólny czynnik a.

Przykład.

a) Rozłóż na czynniki stosując metodę wyłączania wspólnego czynnika przed nawias:
$12ab - 28cb + 8b = 4b \cdot 3a - 4b \cdot 7c + 4b \cdot 2 = 4b(3a - 7c + 2)$.

b) Rozłóż na czynniki sumę: $ax + ay + bx + by$.
Ponieważ nie wszystkie wyrazy sumy mają wspólny czynnik, więc najpierw grupujemy wyrazy posiadające wspólny czynnik, a następnie wyłączamy czynnik a z wyrazów ax i ay oraz czynnik b z wyrazów bx i by:

$$a(x + y) + b(x + y).$$

Następnie wyłączamy przed nawias czynnik $(x + y)$.
W konsekwencji otrzymujemy:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b).$$

W powyższym przykładzie zastosowaliśmy metodę grupowania wyrazów.

Trzecią metodę opiszemy w następnym paragrafie.

1.2 Wzory skróconego mnożenia

************wstawic rysunek z wydruku**********************
Do przekształceń wyrażeń algebraicznych często używamy wzorów skróconego mnożenia. Takimi podstawowymi wzorami skróconego mnożenia są:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – kwadrat sumy dwóch wyrażeń,
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – kwadrat różnicy dwóch wyrażeń,
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ – różnica kwadratów dwóch wyrażeń.

Przykłady.

• Wykonaj działania i przeprowadź redukcję wyrazów podobnych:
$(x+1)^2 - (2x-3)^2 - (x+3)^2 + 2(x-2)(x+2) =$
$x^2 + 2x + 1 - (4x^2 - 12x + 9) - (x^2 + 6x + 9) + 2(x^2 - 4) =$
$x^2 + 2x + 1 - 4x^2 + 12x - 9 - x^2 - 6x - 9 + 2x^2 - 8 =$
$-2x^2 + 8x - 25.$

• Rozłóż wyrażenie na czynniki:
$\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2 = (\frac{1}{3}x)^2 + 2\cdot \frac{1}{3}x\cdot y + y^2 = (\frac{1}{3}x + y)^2$,
$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$.

• Usuń niewymierność z mianownika:
$\frac{3}{4-\sqrt{2}} = \frac{3}{4-\sqrt{2}}\cdot \frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{3(4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})} = \frac{12+3\sqrt{2}}{16-2} = \frac{12+3\sqrt{2}}{14}$.
Aby usunąć niewymierność z mianownika zastosowaliśmy wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń. W tym celu rozszerzyliśmy ułamek mnożąc licznik i mianownik przez takie wyrażenie, które doprowadziło mianownik do postaci trzeciego wzoru skróconego mnożenia.

• Wyznacz w pamięci wartości wyrażeń liczbowych $89\cdot 91$, $5262 - 48^2$, 27^2, 43^2.
Nie jest to łatwe. I właśnie tutaj przydaje się znajomość wzorów skróconego mnożenia.

$$89\cdot 91 = (90-1)\cdot (90+1) = 90^2 - 1^2 = 8100 - 1 = 8099,$$

$$50^2 - 48^2 = (50-48)\cdot (50+48) = 2\cdot 98 = 196,$$

$$27^2 = (30-3)^2 = 30^2 - 2\cdot 3\cdot 30 + 3^2 = 900 - 180 + 9 = 729,$$

$$43^2 = (40+3)^2 = 40^2 + 2\cdot 3\cdot 40 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849.$$

• Zapisz wzory, według których możesz obliczyć pole zamalowanej części następujących figur:

*********************wstawić plik pdf: zad13***********************
1. Pole dużego kwadratu to a^2. Pole małego kwadratu to b^2. Zatem pole zamalowanej figury to $a^2 - b^2$.
2. Pole kwadratu to a^2. Pole koła to πr^2. Zatem pole zamalowanej figury to

$a^2 - \pi r^2$.
3. Pole zamalowanej figury to $\pi R^2 - a^2$.

1.3 Równanie liniowe

***********wstawic rysunek z wydruku**********************

Badanie równań liniowych spotykamy już w starożytnych Indiach (ok. 900 p.n.e - 200 n.e.) Równaniem liniowym z jedną niewiadomą x nazywamy równanie mające postać $ax + b = 0$, gdzie a, b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, x oznacza niewiadomą.

Zauważmy, że rozwiązanie równania zależy od wartości współczynników a i b:

1. Jeśli $a \neq 0$ i $b \in \mathbb{R}$, to rozwiązanie równania ma postać $x = -\dfrac{b}{a}$. Takie równanie nazywamy **równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą**.

2. Jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to każda liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania liniowego. Takie równanie liniowe nazywamy **równaniem tożsamościowym**.
3. Jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie liniowe nie ma rozwiązań i takie równanie nazywamy **równaniem sprzecznym**.

Przykłady.
Rozwiąż równania:
1) $3x + \frac{9}{5} = 0$
Wykonujemy następujące przekształcenia:
$3x = -\frac{9}{5}$
$x = -\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{3}$
$x = -\frac{3}{5}$.
Sprawdzenie:
Podstawiając do równania wyjściowego wyznaczoną wartość x badamy czy strona lewa równania równa się prawej, co zwykle zapisujemy następująco:
$L = 3(-\frac{3}{5}) + \frac{9}{5} = -\frac{9}{5} + \frac{9}{5} = 0$,
$P = 0$,

Zatem $L = P$.

2) $(5x+2)^2 - (3x+3)^2 = (4x+1)^2$.
Niejednokrotnie, bardziej skomplikowane równania udaje się sprowadzić do równania liniowego poprzez przekształcenia algebraiczne (w tym stosując wzory skróconego mnożenia).

Zatem wykonujemy następujące przekształcenia równania 2):
$25x^2 + 20x + 4 - (9x^2 + 18x + 9) = 16x^2 + 8x + 1$
$25x^2 + 20x + 4 - 9x^2 - 18x - 9 - 16x^2 - 8x - 1 = 0$
$-6x - 6 = 0$
$-6x = 6$
$x = -1$.
Sprawdzenie:
Podstawiając do rozważanego równania wyznaczoną wartość x sprawdzamy czy strona lewa równania równa się prawej. Obliczamy wartość lewej strony równania
$(5(-1)+2)^2 - (3(-1)+3)^2 = (-3)^2 - 0 = 9$,
oraz prawej strony równania
$(4(-1)+1)^2 = 9$.
Zatem rozwiązanie spełnia równanie.

1.4 Wyrażenia wymierne (ułamki algebraiczne)

"Wszystko należy upraszczać jak tylko można, ale nie bardziej." (ALBERT EINSTEIN)

************wstawic rysunek z wydruku***********************

Iloraz dwóch sum algebraicznych (wielomianów) zapisane zwyczajowo w postaci ułamka nazywamy **WYRAŻENIEM WYMIERNYM**, np.
$\frac{x^2-5x+7}{2x+3}$, $\frac{b}{x}$, $\frac{7}{xy}$, $\frac{2x-y}{3}$.
Wyrażenie wymierne ma sens, gdy wielomian w mianowniku jest różny od zera, np. dla powyższych wyrażeń wymiernych:
$x \neq -\frac{3}{2}$, $x \neq 0$, $x, y \neq 0$.
Wyrażenie wymierne możemy **skrócić (rozszerzyć)** mnożąc (dzieląc) licznik i mianownik przez to samo wyrażenie, a te operacje wykorzystujemy przy przy **dodawaniu i odejmowaniu wyrażeń wymiernych**, sprowadzając je do wspólnego mianownika, aby potem dodać (odjąć) liczniki. Natomiast przy

mnożeniu wyrażeń wymiernych mnożymy przez siebie liczniki i mianowniki, a **dzielenie wyrażeń wymiernych** sprowadzamy do mnożenia mnożąc dzielną przez odwrotność dzielnika.
Przykłady:
Dla $x, y \neq 0$ obliczymy:
1) $\frac{b}{x} + \frac{7}{xy}$.
Zauważmy, że wspólnym mianownikiem jest xy, zatem
$\frac{b}{x} + \frac{7}{xy} = \frac{by}{xy} + \frac{7}{xy}$,
ostatecznie otrzymujemy
$\frac{b}{x} + \frac{7}{xy} = \frac{by+7}{xy}$,

2) $\frac{7}{xy} : \frac{2x-y}{3}$.
W celu podzielenia dwóch ułamków musimy dzielną pomnożyć przez odwrotność dzielnika. Zatem
$\frac{7}{xy} : \frac{2x-y}{3} = \frac{7}{xy} \cdot \frac{3}{2x-y}$,
następnie mnożąc ułamki otrzymujemy
$\frac{7}{xy} \cdot \frac{3}{2x-y} = \frac{21}{2x^2y-xy^2}$.

Wniosek
Działania na wyrażeniach algebraicznych charakteryzują się tymi samymi prawami, co działania na ułamkach zwykłych.

"Między duchem a materią pośredniczy matematyka." (HUGO STEINHAUS)

1.5 Rozrywka

Zagadki:
Policz myszki
W kwadratowym pokoju w każdym z czterech kątów siedzi myszka. Naprzeciwko każdej myszki siedzi również myszka. Także na ogonku każdej myszki siedzi myszka.

Pytanie: Ile myszek znajduje się w pokoju?

Odp. Nie dwanaście tylko cztery myszki. Każda siedzi przecież na własnym ogonku.

*************wstawic rys smiesznego stada myszek*******************

Wino i woda sodowa

Gość upił z pełnego pucharu jedną trzecią (2 dcl) wina i dolał wody sodowej. Potem wypił pół puchara i znowu dolał wody sodowej. Następnie wypił jedną szóstą i znowu dolał wody. Na koniec wypił cały puchar.
Pytanie: Ile wypił wina, a ile wody?

Więc jak sami widzicie 2dcl to jedna trzecia pucharu czyli puchar ma pojemność 6dcl a jak już wiemy puchar był pełny a gość na koniec wypił cały puchar. Prawidłowa odpowiedź powinna brzmieć : "CAŁY PUCHAR WINA I CAŁY PUCHAR WODY" CZYLI PO 6DCL.

************wstawic rys butelki wina i wody sodowej**********

2 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zad. 1. Oblicz:
a) $\frac{1}{18} - \frac{5}{6} + \frac{7}{27}$,
b) $\left(3\frac{7}{10} - \frac{2}{3}\right) - \left(5\frac{2}{3} + 7\frac{1}{15} - 4\frac{3}{5}\right)$,
c) $3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{2}{5} \cdot 7\frac{1}{2}$,
d) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{18}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{21}{10}\right)$,
e) $\left(\frac{7}{8} - 5\frac{3}{16}\right) \cdot \frac{4}{3} + \frac{7}{10} : \left(\frac{2}{15} + \frac{4}{30}\right)$,
f) $(-8,9 - (6,3)) - (12,35 + 4,6)$,
g) $\left(-\frac{4}{9} \cdot 0,16 \cdot (-7,25) \cdot 2\frac{1}{4}\right)$.

Zad. 2. Oblicz:
a) sumę $0,75$ liczby $1\frac{5}{6}$ i $0,875$ liczby 42,
b) różnicę $\frac{11}{13}$ liczby $14,625$ i $0,8$ liczby $8\frac{1}{3}$,
c) kwadrat sumy liczb $1,25$ i $\frac{3}{4}$.

Zad. 3. Oblicz: a) $2^3 \cdot 2^2$,
b) $(-4) \cdot (-4)^2$,
c) $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$,
d) $9^5 : 9^4$,
e) $(-5)^8 : (-5)^5$,

f) $(-0,25)^5 : (-\frac{1}{4})^3$,

g) $\frac{0,125^9}{0,125^{10}}$.

Zad. 4. Oblicz:

a) $(5\frac{1}{3})^{-3}(0.75)^{-3}$,

b) $\frac{(0.6)^0-(0,1)^{-1}}{(3:2^3)^{-1}(1.5)^3} - (-\frac{1}{3})^{-1}$,

c) $[(\frac{16}{49})^{-\frac{3}{2}}(\frac{7}{4})^{\frac{2}{5}}(\frac{4}{7})^{-\frac{3}{5}}]^{\frac{1}{4}}$.

Zad. 5. Stosując działania na pierwiastkach oblicz:

a) $\sqrt[3]{0,01} \cdot \sqrt[3]{2,7}$,

b) $2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - \sqrt{72}$,

c) $2\sqrt[3]{24} + 4\sqrt[3]{81} - 14\sqrt[3]{3}$,

d) $(3\sqrt{50} + 2\sqrt{8} - \sqrt{32}) : \sqrt{2}$,

e) $(4\sqrt[3]{625} - 3\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{320}) : \sqrt[3]{5}$.

Zad. 6. Oblicz:

a) $\dfrac{8 \cdot 8\frac{1}{4} - 12\frac{1}{5} : \frac{61}{10} - \left(-3\frac{1}{3}\right) : \frac{5}{9}}{16 : \frac{8}{5} + 8\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{7}}$,

b) $\dfrac{30 \cdot 4\frac{1}{4} - 11\frac{1}{5} : 9\frac{1}{3}}{14 : 2\frac{2}{9} + 8\frac{2}{5} \cdot 14\frac{2}{7}} : \dfrac{1 : 6 + 12 : 5}{2\frac{1}{2} \cdot 15 - 4\frac{13}{15} \cdot 7\frac{3}{5}}$,

c) $\dfrac{(81,624 : 4,8 - 4,505)^2 + 125 \cdot 0,75}{\left(((0,44)^2 : 0,88 + 3,53)^2 - 2,75^2\right) : 0,52}$.

Zad. 7. Wykonaj działania:

a) $(3x-2)(2x+3) - (6x^2 - 12)$,

b) $6a^2 + 5a(-a+2) - (4a-3)$,

c) $3(2c-5) - [2(3b-4) - (4c+5)]$,

d) $8x\left(\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}\right) - \frac{1}{6(6x+6)(6x-6)}$,

e) $0,3\left(1\frac{2}{3} + 10\right) + \frac{4}{5}(10x-15)\left(\frac{1}{4}x - 0,5\right)$.

Zad. 8. Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

a) $(5y-2z)(5y+2z) + 4z(y+z) - 25y^2$,

b) $(x-1)^2 + 17 - (x+2)^2 + 5(x-2)$,

c) $6x(x-3) + (2x+3)^2 - 10x(x+1) + 16x$,

d) $5a(3a-b) - (2a-b)^2 + 4b(a-2b) + 3b(3b-a)$.

Zad. 9. Rozłóż na czynniki:
a) $25x^2 - (x+y)^2$,
b) $1 - a^2 - 2ab - b^2$,
c) $(a+2b)^2 - (3c+4d)^2$.

Zad. 10. Rozwiąż równanie liniowe z niewiadomą x:
a) $4x - [7 - (6-5x)] - (2x-9) = 0$,
b) $6x + (2x-3)^2 - (2x+3)^2 = 15$,
c) $\frac{6b+7a}{6b} - \frac{3ax}{2b^2} = 1 - \frac{ax}{b^2-ab}$, $a, b \neq 0$, $a \neq b$,
d) $\frac{x}{b(a-x)} + \frac{c}{d(x-a)} = \frac{ad-bc}{3abd}$, $x \neq a$, $a, b, d \neq 0$.

Zad. 11. Usuń niewymierność z mianownika:
a) $\frac{2}{\sqrt{8}}$,
b) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$,
c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Zad. 12. Wyznacz m ze wzoru $K = \frac{l-m}{b}$.

************wstawic rysunek z wydruku**********************

2.1 Odpowiedzi do zadań

Z. 1. a) $-\frac{14}{27}$, b) $-5,1$, c) $\frac{135}{2}$, d) $-\frac{27}{40}$ e) $-\frac{25}{8}$, f) $-32,15$, g) $\frac{29}{25}$.
Z. 2. a) $38\frac{1}{8}$, b) $5\frac{17}{24}$, c) 4.
Z. 3. a) 32, b) -64, c) $\frac{1}{729}$, d) 9, e) -125, f) $\frac{1}{16}$, g) 8.
Z. 4. a) $\frac{1}{64}$, b) $-o.75$, c) 1.75.
Z. 5. a) $0,3$, b) $11\sqrt{2}$, c) $2\sqrt[3]{3}$, d) 15, e) 18.
Z. 6. a) $3\frac{19}{52}$, b) $\frac{1}{5}$, c) 20.
Z. 7. a) $5x+6$, b)a^2+6a+3, c) $10c-6b-2$, d) $-5x^2-7x+6$.
Z. 8. a) $4yz$, b) $-x+4$, c) 9, d) $11a^2$.
Z. 9. a) $(4x-y)(6x+y)$, b) $(1-a-b)(1+a+b)$, c) $(a+2b-3c-4d)(a+2b+3c+4d)$.
Z. 10. a) $-3x+8$, b) $-\frac{5}{6}$, c) $\frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$, d) $\frac{a(ad+2bc)}{4ad-bc}$.
Z. 11. a) $\frac{\sqrt{8}}{4}$ b) $2(\sqrt{5}+\sqrt{2})$, c) $6\sqrt{2}+5\sqrt{3}$.
Z. 12. $-Kb+l$.

3 Test sprawdzający

************wstawic rysunek z wydruku***********************

Zad. 1. Wartością ułamka $\frac{2^4 \cdot 64^{-2}}{4^{-3}}$ jest:
a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{4}$, c) 2, d) 1.
odp. b)
Zad. 1. Liczbą odwrotną do liczby $5\frac{3}{11} - 2\frac{1}{11} \cdot \sqrt[3]{-8}$ jest:
a) $\frac{11}{70}$, b) $\frac{11}{104}$, c) $-\frac{11}{104}$, d) $-\frac{70}{11}$.
odp. b)
Zad. 1. Wartością wyrażenia $\frac{3^2+(-2)^3}{(-4)^2} : \frac{1}{16}$ jest:
a) 1 , b) $\frac{1}{4}$, c) 2, d) $\frac{1}{2}$.
odp. a)

Zad. 2. Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{63}\sqrt[3]{3\frac{3}{7}}$ wynosi:
a) 8, b) 9, c) 5, d) 6.
odp. d)
Zad. 2. Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{72}\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$ wynosi:
a) 6, b) 9, c) 5, d) 8.
odp. d)
Zad. 2. Wartość wyrażenia $\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{7\frac{1}{9}}$ wynosi:
a) $2\frac{3}{4}$, b) $\frac{1}{4}$, c) 4, d) $2\frac{1}{4}$.
odp. d)

Zad. 3. Wyrażenie $\frac{4+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ ma wartość:
a) $\frac{4}{17+7\sqrt{5}}$, b) $\frac{17+\sqrt{5}}{4}$, c) $\frac{1+7\sqrt{5}}{4}$, d) $\frac{17+7\sqrt{5}}{4}$.
odp. d)
Zad. 3. Wyrażenie $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}$ ma wartość:
a) $\frac{5}{2-\sqrt{6}}$, b) $\frac{5}{6-\sqrt{6}}$, c) $\frac{4-\sqrt{6}}{5}$, d) $\frac{5}{4-\sqrt{6}}$.
odp. c)
Zad. 3. Wyrażenie $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ma wartość:
a) $4\sqrt{6}+\sqrt{3}+2$, b) $4\sqrt{3}+\sqrt{6}+2$, c) $2\sqrt{3}+\sqrt{6}+4$, d) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$.
odp. b)

Zad. 4. Iloczyn $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{6})(1-\frac{1}{7})$ wynosi:
a) 1 , b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{7}$, d) $\frac{6}{7}$.
odp. c)
Zad. 4. Iloczyn $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{6})(1-\frac{1}{7})$ wynosi:
a) 1 , b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{7}$, d) $\frac{6}{7}$.
odp. c)
Zad. 4. Iloczyn $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{6})(1-\frac{1}{7})$ wynosi:
a) 1, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{7}$, d) $\frac{6}{7}$.
odp. c)

Zad. 5. Liczba $1^{-1}+(\frac{1}{2})^{-1}+(\frac{1}{3})^{-1}+(\frac{1}{4})^{-1}+(\frac{1}{5})^{-1}$ jest równa:
a) 13, b) 14, c) 15, d) 16.
odp. c)
Zad. 5. Liczba $1^{-1}+(\frac{1}{2})^{-2}+(\frac{1}{3})^{-2}+(\frac{1}{4})^{-2}+(\frac{1}{5})^{-2}$ jest równa:
a) 55, b) 54, c) 56, d) 53.
odp. a)
Zad. 5. Liczba $1^{-2}+(\frac{1}{2})^{-2}+(\frac{1}{3})^{-2}+(\frac{1}{4})^{-1}+(\frac{1}{5})^{-1}$ jest równa:
a) 25, b) 24, c) 22, d) 23.
odp. d)

Zad. 6. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie $(x\sqrt{2}+2x\sqrt{8})^2$
a) $18x^2$, b) $-16x^2$, c) $50x^2$, d) $42x^2$.
odp. c)
Zad. 6. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie $4(x-2)^2+4(x^2+4)$
a) $4(x^2-2x+4)$, b) $8(x^2+2x+4)$, c) $8(x^2-2x+4)$, d) $8(x^2-2x-4)$.
odp. c)
Zad. 6. Zapisz w najprostszej postaci wyrażenie $4(x-2)^2-4(x^2+4)$
a) $-16x$, b) $8x^2$, c) $-16x+32$, d) 0.
odp. a)

Zad. 7. Skracając ułamek $\frac{9p^2-q^2}{9p^2+6pq+q^2}$ otrzymujemy:
a) 3p-1, b) $\frac{3p-q}{3p+q}$, c) 3p+q, d) $\frac{3p+q}{3p-q}$.
odp. b)
Zad. 7. Skracając ułamek $\frac{16p^2-q^2}{16p^2+8pq+q^2}$ otrzymujemy:

a) 4p-1, b) $\frac{4p+q}{4p-q}$, c) 4p+q, d) $\frac{4p-q}{4p+q}$.
odp. d)
Zad. 7. Skracając ułamek $\frac{25p^2-q^2}{25p^2+10pq+q^2}$ otrzymujemy:
a) 5p-1, b) $\frac{5p-q}{5p+q}$, c) 5p+q, d) $\frac{5p+q}{5p-q}$.
odp. b)

Zad. 8. Różnica $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ wynosi:
a) $\frac{-1}{(x+1)(x+2)}$, b) $\frac{-2}{(x+1)(x+2)}$, c) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$, d) $\frac{2}{(x+1)(x+2)}$.
odp. c)
Zad. 8. Różnica $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$ wynosi:
a) $\frac{2}{(x+2)(x+4)}$, b) $\frac{-2}{(x+2)(x+4)}$, c) $\frac{1}{(x+2)(x+4)}$, d) $\frac{4}{(x+2)(x+4)}$.
odp. a)
Zad. 8. Różnica $\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6}$ wynosi:
a) $\frac{-1}{(x+3)(x+6)}$, b) $\frac{3}{(x+3)(x+6)}$, c) $\frac{1}{(x+3)(x+6)}$, d) $\frac{2}{(x+3)(x+6)}$.
odp. b)

Zad. 9. Wyznaczając a za wzoru $S = \frac{a+b}{2}h$ otrzymujemy:
a) $\frac{2h}{S} - b$, b) $b - \frac{2S}{h}$, c) $\frac{2S}{h} - b$, d) $\frac{S}{2h} - b$.
odp. c)
Zad. 9. Wyznaczając b za wzoru $S = \frac{a+b}{2}h$ otrzymujemy:
a) $\frac{2S}{h} - a$, b) $a - \frac{2S}{h}$, c) $\frac{S}{h} - 2a$, d) $\frac{S}{2h} - a$.
odp. a)
Zad. 9. Wyznaczając h za wzoru $S = \frac{a+b}{2}h$ otrzymujemy:
a) $\frac{2S}{a} - b$, b) $b - \frac{2S}{a}$, c) $\frac{2S}{a+b}$, d) $2S - a - b$.
odp. c)

Zad. 10. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $(\frac{a-1}{a^2})^{-1} + (1-a)^{-1}$
a) $\frac{1}{a+1}$, b) $\frac{1}{a-1}$, c) $a+1$, d) $a-1$.
odp. c)
Zad. 10. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $(a+3b)^2 - (a-3b)^2$
a) $a^2 - 9b^2$, b) $12ab$, c) $(a+3b)(a-3b)$, d) $2a+6b$.
odp. b)
Zad. 10. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenie $(x+1)^3 - (x-1)^3$
a) $x^2 - 1$, b) $9x^3$, c) $(x+1)(x-1)$, d) $6x^2 + 2$.
odp. d)

Zad. 11. Rozwiąż równanie $\frac{3}{2x-1} = 2$:

a) $1\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $-\frac{5}{4}$, d) $1,2$.
odp. a)
Zad. 11. Rozwiąż równanie $3x = 2 + x\sqrt{5}$:
a) $\frac{3+\sqrt{5}}{14}$, b) $1 - \sqrt{5}$, c) $\frac{3+\sqrt{5}}{-2}$, d) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
odp. d)
Zad. 11. Rozwiąż równanie $5x + \sqrt{3} = \frac{1}{2}x + 2$:
a) $\frac{2+\sqrt{3}}{9}$, b) $\frac{2-\sqrt{3}}{9}$, c) $\frac{2(2-\sqrt{3})}{9}$, d) $\frac{2(2+\sqrt{3})}{9}$.
odp. c)

************wstawic rysunek z wydruku**********************

Literatura

[1] A. Drążek, B. Grabowska, Z. Szadkowska, *Matematyka wokół nas*, Podręcznik do kl. 2 Gimnazjum, WSiP, Warszawa 2006.

[2] J.M. Jędrzejewski, K. Gałązka, E. Leśniak, *Matematyka krok po kroku*, Ćwiczenia sprawdzające dla kl. 2 Gimnazjum, RES Polona, Łódź.

[3] R. Kalina, T. Szymański, *Matematyka z Sensem*, Zestawy zadań sprawdzających wiedzę uczniów rozpoczynających naukę w liceum i technikum, SENS, Poznań 2005.

[4] A. Kiełbasa, *Matura z matematyki 2010-..., poziom podstawowy i rozszerzony cz. 1*, 2000, Warszawa 2009.

[5] K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, *Matematyka*, Zbiór zadań do liceów i techników kl. I, Oficyna Edukacyjna K. Pazdro, WSiP, Warszawa 2007.

[6] D. Masłowska, T. Masłowski, A. Makowski, P. Nodzyński, E. Słomińska, A. Strzelczyk, *Testy maturalne. Matematyka*, poziom podstawowy, AKSJOMAT, Toruń 2009.

[7] H. Pawłowski, *Obowiązkowa matura z matematyki*, Oficyna Wyd. Tutor, Toruń 2010.

[8] H. Pawłowski, *Matematyka.* Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2007.