



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

*E-learning – matematyka – poziom podstawowy*

*Temat: Wielomiany*

*Materiały merytoryczne do kursu*



## Slajd

Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki.  
(Immanuel Kant).

W ramach tego kursu poznamy wielomiany jednej zmiennej i ich własności: stopień wielomianu, pierwiastek wielomianu oraz między innymi takie pojęcia jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wielomianów, w tym twierdzenie Bezouta. Poznamy jak wykonać rozkład wielomianów na czynniki. Omówimy także rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych.

Zagadka

Zadanie Diofantosa.

Znaleźć trzy takie liczby, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem innej liczby. Zadanie to podał i rozwiązał Diofantos, ostatni wielki matematyk grecki, żyjący w III w n.e. w Aleksandrii.

Odpowiedź:  
Liczby te to 80, 320, 41.

Istotnie:

$$80 + 320 + 41 = 441 = 21^2.$$

Suma każdej pary tych liczb jest również kwadratem:

$$320 + 80 = 400 = 20^2,$$

$$320 + 41 = 361 = 19^2,$$

$$80 + 41 = 121 = 11^2.$$

# 1 Pojęcie wielomianu

Już znamy pojęcie jednomianu. Teraz kilka jednomianów możemy do siebie dodać np. do jednomianu  $x$  możemy dodać  $2a$  otrzymując  $x + 2a$ . Innym przykładem sumy jednomianów może być:  $3x^2 + 5x - 7$ , a taką sumę nazywamy wielomianem jednej zmiennej.

Przykładami wielomianów są:

$$W(x) = 8x^{12} - 3x^6 + 5x^4 + 9x - 4,$$

$$P(x) = x - 3.$$

\*\*\*\*\*plik Sumy algebraiczne\*\*\*\*\*

Hasło: Sumy algebraiczne

Spójrzmy teraz na poniższą, pełną definicję wielomianu jednej zmiennej.

### DEFINICJA.

Wielomianem zmiennej  $x$  nazywamy wyrażenie postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  są liczbami rzeczywistymi i  $n \in \mathbb{N}_0$ .

W wielomianie

$$W(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

współczynnikami będą  $a_3 = 6, a_2 = 4, a_1 = 3$  i  $a_0 = 2$ .

A ile wynosi współczynnik przy  $x^{23}$  potędze w wielomianie  $2x^3 + x$ ? Odpowiedź wydaje się prosta,  $a_{23} = 0$ , ponieważ  $2x^3 + x = 0x^{23} + 2x^3 + x$ .

### Wprowadzimy pojęcie stopnia wielomianu.

Stopień wielomianu to największe  $n \in \mathbb{N}_0$  takie, że  $a_n \neq 0$ .

**Przykłady:**

$P(x) = 3x^6 + x^2 + 1$  jest wielomianem 6-tego stopnia,

ale wielomian  $Q(x) = 0x^{100} + 23x + 1$  jest wielomianem pierwszego stopnia, ponieważ  $a_1 = 23$  i  $a_{100} = 0$ .

Zauważmy, że funkcja stała  $f(x) = a$  jest wielomianem zerowego stopnia, gdy  $a \neq 0$ .

Natomiast gdy  $a = 0$  otrzymujemy wielomian zerowy (nie określamy stopnia wielomianu zerowego).

Funkcja liniowa jest wielomianem pierwszego stopnia, a funkcja kwadratowa jest wielomianem drugiego stopnia.



## 2 Uporządkowanie wielomianu

Porządkowanie wielomianów polega na ułożeniu kolejnych wyrazów wielomianu według rosnących wykładników potęg zmiennej (rosnąco) lub według malejących wykładników potęg zmiennej (malejąco).

Wielomianami uporządkowanymi malejąco będą:

$$W_1(x) = 10x^3 + 5x^2 + 7x + 10,$$

$$W_2(x) = x^{50} + 2x^{21} + 4x,$$

$$W_3(x) = x + 1.$$

Natomiast wielomianami uporządkowanymi rosnąco będą:

$$P_1(x) = 10 + 7x + 5x^2 + 10x^3,$$

$$P_2(x) = 4x + 2x^{21} + x^{50},$$

$$P_3(x) = 1 + x.$$

### 3 Równość wielomianów

Dwa wielomiany  $P$  i  $Q$  zmiennej  $x$  będą sobie równe, jeśli dla wszystkich  $x$  zachodzi  $P(x) = Q(x)$ , co charakteryzuje poniższe twierdzenie:

#### TWIERDZENIE

Dwa wielomiany zmiennej  $x$  są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia oraz współczynniki przy odpowiednich potęgach są sobie równe.

Na przykład wielomiany

$$A(x) = 10x^3 + 3x^2 + 4x \text{ oraz } B(x) = 10x^3 + 3x^2 + 4x$$

są równe,

$$\text{ale } C(x) = 9x^5 + 4x^2 + x \text{ oraz } D(x) = 10x^5 + 4x^2 + x$$

nie są równe.

## 4 Dodawanie i odejmowanie wielomianów.

Wielomiany możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. W kolejnych rozdziałach dowiemy się, jak to robić. Aby dodać wielomian musimy dodać wyrazy podobne oraz uporządkować je.

Zatem dodamy:

$$A(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 \text{ i } B(x) = 13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11.$$

$$A(x) + B(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 + 13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11 =$$

$$17x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x + 31.$$

Dodawanie wielomianów jest przemienne oraz łączne, co wynika z przemienności i łączności dodawania w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x) \text{ - przemienność,}$$

$$(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x)) \text{ - łączność.}$$

### Odejmowanie wielomianów

Od współczynników pierwszego wielomianu musimy odjąć współczynniki drugiego:

$$A(x) - B(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 - (13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11) = -9x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 8x + 9.$$

## 5 Mnożenie wielomianów

Mnożenie wielomianów polega na wymnożeniu przez siebie wyrazów obu wielomianów. Pomnożymy

$$A(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x \text{ oraz } B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10.$$

Wtedy

$$A(x)B(x) = (6x^3 + 3x^2 + 2x)(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10).$$

Mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= 6x^3(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) + \\ & 3x^2(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) + \\ & 2x(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) = \\ & 60x^7 + 42x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 60x^3 + 30x^6 + 21x^5 + 6x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 20x^5 + \\ & 14x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 20x. \end{aligned}$$

Redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy otrzymany wielomian:

$$A(x)B(x) = 60x^7 + 72x^6 + 53x^5 + 80x^4 + 93x^3 + 50x^2 + 20x.$$

## 6 Dzielenie wielomianów

Kolejnym działaniem na wielomianach jest dzielenie. Jedną z metod dzielenia jest metoda podobna do pisemnego dzielenia liczb. W przykładzie skupimy się na dzieleniu wielomianu przez dwumian. Wykonamy dzielenie wielomianu  $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$  przez  $(x - 3)$ .

\*\*\*\*\*plikdzielenie\*\*\*\*\*

### Ogólny schemat, jak wykonać dzielenie:

1. Nad kreską: dzielimy pierwszy jednomian z dzielnej przez pierwszy z dzielnika i wpisujemy w wynik, następnie wynik mnożymy po kolei przez jednomiany z dzielnika i zapisujemy ze zmienionym znakiem poniżej (nad kreską).

2. Dodajemy do siebie oba wielomiany nad kreską, zapisując wynik pod kreską; pod kreską uzyskujemy nową dzielną.

3. Nad kolejnymi kreskami: bierzemy pierwszy jednomian z nowej dzielnej (spod kreski) i znowu dzielimy przez pierwszy z dzielnika, dopisując do wyniku, po czym mnożymy wynik przez... tak jak w punkcie 1. i 2. dopóki w dzielnej jest niewiadoma  $x$  lub niższa potęga niż w dzielniku.

- W razie gdyby na końcu została jakaś reszta, zapisujemy w wyniku: (iloraz)(dzielnik)+(reszta)

- Ważne: uważamy na znak jednomianu!

Z dzieleniem wielomianu przez dwumian związane są pojęcia reszty i wartości wielomianu, gdzie przez  $W(a)$  oznaczmy wartość wielomianu dla argumentu  $a$ .

#### Twierdzenie o reszcie.

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x - a$  jest równa  $W(a)$ .

Z powyższego twierdzenia mamy także związek dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x - a$  i pierwiastka wielomianu  $a$ , czyli rozważamy przypadek, gdy  $W(a) = 0$ :

#### Twierdzenie Bezouta.

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x - a$ .

\*\*\*\*\*plik Reszta z dzielenia\*\*\*\*\*



Hasło: Reszta z dzielenia

Więcej o pierwiastkach:

**Twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.**

Jeżeli wielomian  $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek całkowity  $p$ , to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ .

**Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.**

Jeżeli wielomian  $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego  $\frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{C}$ ,  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ , zaś  $q$  jest dzielnikiem współczynnika  $a_n$  przy najwyższej potędze.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu.

Każdy wielomian stopnia  $n$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki.

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego o współczynnikach rzeczywistych.

Jeżeli liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$  stopnia  $n$ , to prawdziwa jest równość  $W(x) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_n)$ .

### Przykłady:

Rozkład wielomianu stopnia trzeciego na czynniki.

- Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias:

$$T(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x + 1)(x - 4).$$

- Grupowanie wyrazów:

$$W(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x^3 - 5x^2) + (2x - 10) = x^2(x - 5) + 2(x - 5) = (x - 5)(x^2 + 2).$$

- Zastosowanie twierdzenia Bézouta

$$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$

Pierwiastkiem tego wielomianu jest  $x = -4$ , ponieważ:  $W(-4) = 0$ .

Wielomian  $W(x)$ , na podstawie twierdzenia Bézouta, jest podzielny przez dwumian  $Q(x) = x + 4$ .

Wykonujemy dzielenie  $W(x) : Q(x)$ .

Otrzymujemy

$$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x + 4)(x^2 - 5x + 6) \text{ Niech: } P(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Dokonujemy rozkładu  $P(x)$ .

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Ostatecznie

$$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x + 4)(x - 2)(x - 3).$$

### Zadanie.

Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez  $(x + 2)$  daje resztę 8, a przy dzieleniu przez  $(x + 1)$  daje resztę -4.

Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian

$$P(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian np.  $P(x)$  (stopnia co najmniej 1) jest wielomianem o stopniu co najwyżej o 1 mniejszym niż dzielnik.

Zatem reszta z dzielenia przez trójmian kwadratowy może być liniowa, a jak dzielimy przez wielomian stopnia 3, to reszta może być kwadratowa itd.

Według tej zasady przy dzieleniu przez  $P(x) = x^2 + 3x + 2$  możemy otrzymać resztę liniową, czyli  $R(x) = ax + b$ . Zatem  $W(-2) = R(-2) = 8$ ,  $W(-1) = R(-1) = -4$ ,

$$-2a + b = 8, \quad -a + b = -4,$$

czyli

$$a = -12, \quad b = -16$$

Odpowiedź: Szukaną resztą jest  $R(x) = -12x - 16$ .

### Zadanie.

Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumiany  $(x - 1)$ ,  $(x + 2)$ ,  $(x - 3)$  daje reszty odpowiednio równe 5, 2, 27. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian  $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ .

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest stopnia drugiego, czyli  $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ , gdzie

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

dla pewnych rzeczywistych  $a, b, c$ . Z podanych informacji wiemy, że  $W(1) = 5$ ,  $W(-2) = 2$ ,  $W(3) = 27$ . Podstawiając te wartości w powyższej równości mamy

$$\begin{cases} 5 = a + b + c \\ 2 = 4x - 2b + c \\ 27 = 9a + 3b + c \end{cases} .$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze, a od ostatniego drugie, dostajemy

$$\begin{cases} -3 = 3a - 3b \\ 25 = 5a + 5b \end{cases} .$$

Natomiast dzieląc pierwsze równanie przez 3, a drugie przez 5 mamy

$$\begin{cases} -1 = a - b \\ 5 = a + b \end{cases} .$$

Dodając te równania stronami mamy  $a = 2$ ,  $b = 3$  i  $c = 0$ , stąd:  
odpowiedź:  $R(x) = 2x^2 + 3x$ .

## 7 Równania wielomianowe

Na początek definicja.

### DEFINICJA.

Równanie wielomianowe to równanie otrzymane poprzez przyrównanie danego wielomianu do zera.

Zobaczmy na [przykłady](#):

- $4x + 1 = 0$ ,
- $3x^2 + 2x - 5 = 0$ ,
- $x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0$ .

Rozwiązywanie równania wielomianowego polega na znalezieniu wszystkich  $x$ , dla których wielomian jest równy zero. W zadaniach trzeba będzie z reguły skorzystać:

- ze wzorów skróconego mnożenia,
  - z dzielenia wielomianów i twierdzenia Bézout'a,
  - z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych,
  - metody podstawiania
- (tzn. sprawdzamy, czy dla danego  $x$  zachodzi  $W(x) = 0$ ),  
...

### Przykład.

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia rozwiążemy równanie:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0.$$

Wyciągamy  $x$  przed nawias i otrzymujemy  
 $x(x^2 - 6x + 9) = 0.$

Korzystając ze wzoru  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  mamy:  $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ ,  
czyli badane równanie ma postać:

$$x(x-3)^2 = 0.$$

Powyższe równanie jest prawdziwe gdy:

$x = 0$  lub  $x - 3 = 0$ , czyli gdy:

$x = 0$  lub  $x = 3$ .

Zatem rozwiązaniem równania  $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$  jest zbiór  $\{0, 3\}$ .



## 8 Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową nazywamy nierówność postaci:  
 $W(x) < G(x)$ ,  $W(x) > G(x)$ ,  $W(x) \leq G(x)$  lub  $W(x) \geq G(x)$ ,  
gdzie  $W(x)$  i  $G(x)$  są wielomianami tej samej zmiennej.

### Przykłady

- $x^2 + 2 > 0$ , której rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych.
- $x^2 < 4$ , której rozwiązaniem jest zbiór  $(-2, 2)$ .
- $x^2 < 0$ , której rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Sposób rozwiązywania:

Aby rozwiązać nierówność wielomianową, należy wykonać następujące kroki:

- Przenosimy wszystkie liczby i niewiadome na lewą stronę, tak aby, prawa strona była równa zero.
- Za pomocą znanych już nam sposobów (grupowanie, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, obliczenie miejsc zerowych funkcji kwadratowej) rozkładamy wielomian po lewej stronie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.
- Następnie, dla każdego z wielomianów po rozkładzie znajdujemy przedział, w którym jest dodatni, miejsce zerowe i przedział, w którym jest ujemny.
- Budujemy tabelkę znaków wielomianu w poszczególnych przedziałach.
- Zapisujemy przedziały, w których wielomian jest dodatni, ujemny bądź równy zero.
- Formułujemy odpowiedź.

### Przykład.

Rozwiążemy nierówność:  $x^4 + \sqrt{20}x^3 + 2x^2 > -\sqrt{20}x - 1$ .

• Możemy ją przekształcić do postaci:  $x^4 + \sqrt{20}x^3 + 2x^2 + \sqrt{20}x + 1 > 0$  i metodą grupowania rozłożyć lewą stronę w następujący sposób:

$$x^4 + \sqrt{20}x^3 + x^2 + x^2 + \sqrt{20}x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{20}x + 1).$$

Pierwsze wyrażenie  $(x^2 + 1)$  nie ma miejsc zerowych, a więc nie da się go rozłożyć na wyrażenia stopnia pierwszego (gdyż  $\Delta < 0$ ).

•  $\Delta$  drugiego wyrażenia wynosi 16, a jego miejscami zerowymi są liczby  $\frac{\sqrt{20}-4}{2}$  i  $\frac{\sqrt{20}+4}{2}$ . Zatem możemy je zapisać w postaci:

•  $x^2 + \sqrt{20}x + 1 = (x - \frac{\sqrt{20}-4}{2})(x - \frac{\sqrt{20}+4}{2})$

A cała nierówność ma postać:

$$(x^2 + 1)(x - \frac{\sqrt{20}-4}{2})(x - \frac{\sqrt{20}+4}{2}) > 0.$$

Możemy więc zbudować tabelę znaków wielomianu i jego czynników:

	$x^2 + 1$	$x - \frac{\sqrt{20}-4}{2}$	$x - \frac{\sqrt{20}+4}{2}$	lewa strona nierówności
$x \in (-\infty, \frac{\sqrt{20}-4}{2})$	+	-	-	+
$x = \frac{\sqrt{20}-4}{2}$	+	0	-	0
$x \in (\frac{\sqrt{20}-4}{2}, \frac{\sqrt{20}+4}{2})$	+	+	-	-
$x = \frac{\sqrt{20}+4}{2}$	+	+	0	0
$x \in (\frac{\sqrt{20}+4}{2}, \infty)$	+	+	+	+

Widzimy, że nierówność zachodzi (lewa strona jest dodatnia) gdy  $x \in (-\infty, \frac{\sqrt{20}-4}{2}) \cup (\frac{\sqrt{20}+4}{2}, \infty)$ .

\*\*\*\*\*plik Równanie trzeciego stopnia\*\*\*\*\*

Hasło: **Równanie trzeciego stopnia**

## Zadania

zad. 1. Rozłóż na czynniki:

$$Q(x) = 2x^3 - 8x^2 + x - 4.$$

Rozwiązanie:

$$(x - 4)(2x^2 + 1).$$

zad. 2. Uporządkuj malejąco wielomiany:

- $W(x) = 10x^4 + 7x^9 + x + 10 + 13x^{13}$ ,

- $W(x) = 11x^{20} + 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11}$ .

Rozwiązanie:

- $W(x) = 13x^{13} + 7x^9 + 10x^4 + x + 10,$

- $W(x) = 11x^{20} + 21x^{11} + 4x^6 + 4x^5.$



zad. 3. Uporządkuj rosnąco wielomiany:

- $W(x) = 10x^4 + 7x^9 + x + 10 + 13x^{13}$ ,

- $W(x) = 11x^{20} + 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11}$ .

Rozwiązanie:

- $W(x) = 10 + 10x^4 + 7x^9 + x + 13x^{13},$

- $W(x) = 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11} + 11x^{20}.$

zad. 4. Czy poniższe wielomiany są równe:

- $A(x) = 41x^5 + 7x^2 + x$  oraz  $B(x) = 7x^2 + 41x^5 + x$ ,
- $C(x) = x^7 + 4x^3 + x^9 + x$  oraz  $D(x) = 2x^7 + 4x^3 + x^9 + x$ ,
- $C(x) = 11x^2 + x + 10$  oraz  $D(x) = 11x^3 + x^2 + 10$ .

Rozwiązanie:

- tak,
- nie,
- nie.

zad. 5. Dla jakich wartości parametru  $a$  i  $b$  poniższe wielomiany są równe:

- $A(x) = ax^6 + 10x^4 + x + 1$  oraz  $B(x) = 7x^6 + bx^4 + x + 1$ ,

- $C(x) = (a + 1)x^7 + (b - 3)x^5 + 5$  oraz  $D(x) = 11x^7 + (b - 3)x^5 + 5$ .

Rozwiązanie:

- $a = 7, b = 10$
- $a = 10, b \in \mathbb{R}.$

zad. 6. Dane są wielomiany:

$$W(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3, Q(x) = 8x - 5 \text{ i } R(x) = x^2 + x + 2.$$

Oblicz

$$3W(x) - 2Q(x)R(x).$$

Rozwiązanie:

$$-4x^3 - 12x^2 - 25x + 29.$$



zad. 7. Należy rozwiązać równanie

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0.$$

Rozwiązanie:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

zad. 8. Rozwiąż nierówność:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0.$$

Rozwiązanie:

$$(-\infty, -2) \cup (-1, 1).$$

## Test

1) Dodając wielomiany:

$$A(x) = 6x^3 + 13x^2 + 20x$$

oraz

$$B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$$

mamy:

a)  $A(x) + B(x) = 13x^3 + 15x^2 + 30x + 10,$

b)  $A(x) + B(x) = 10x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 30x + 10,$

c)  $A(x) + B(x) = 10x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 30x.$

Rozwiązanie:

b).

2) Odejmując wielomian

$$B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$$

od

$$A(x) = 6x^3 + 13x^2 + 20x$$

otrzymujemy:

a)  $A(x) - B(x) = -10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x - 10,$

b)  $A(x) - B(x) = 10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x - 10,$

c)  $A(x) - B(x) = -10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x + 10.$

Rozwiązanie:

a).



3)  $W(x) = 4x^6 + 9x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$  i  $P(x) = 3x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 3x + 10$ .  
Podaj wzór wielomianu  $Q(x)$  jeśli:

$$W(x) + Q(x) = P(x).$$

a)  $Q(x) = x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 9,$

b)  $Q(x) = -x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 10,$

c)  $Q(x) = -x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 9.$

Rozwiązanie:

c).

4) Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumiany  $(x - 2)$ ,  $(x + 4)$ , daje reszty odpowiednio równe  $-3$  oraz  $-51$ . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ , wiedząc, że liczba  $-1$  jest miejscem zerowym wielomianu  $W(x)$ .

Poszukiwaną resztą jest:

a)  $R(x) = -3x^2 + 2x + 5$ ,

b)  $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$ ,

c)  $R(x) = -3x^2 - 2x + 5$ .

Rozwiązanie:

a).

5) Rozwiązaniem równania

$$(x^2 - 9)^3 = (2x^2 - 10)^3$$

jest:

a)  $x = 1, x = -1$ , b)  $x = 1$ , c)  $x = -1$ .

Rozwiązanie:

a).

6) Rozwiązaniem równania

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$$

jest:

a)  $x = 0, x = 2, x = 3,$

b)  $x = 0, x = -2, x = 3,$

c)  $x = 0, x = 2, x = -3.$

Rozwiązanie:

a).



7) Rozwiązaniem nierówności:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \leq 0$$

jest:

a)  $x \in (-\infty, 3)$ , b)  $x \in (-\infty, -3)$ , c)  $x \in (-\infty, -3)$ .

Rozwiązanie:

a).

## Slajd

Tyle jest w każdym poznaniu nauki, ile jest w nim matematyki.  
(Immanuel Kant).

W ramach tego kursu poznamy wielomiany jednej zmiennej i ich własności: stopień wielomianu, pierwiastek wielomianu oraz między innymi takie pojęcia jak: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wielomianów, w tym twierdzenie Bezouta. Poznamy jak wykonać rozkład wielomianów na czynniki. Omówimy także rozwiązywanie równań i nierówności wielomianowych.

Zagadka

Zadanie Diofantosa.

Znaleźć trzy takie liczby, których suma, a także suma każdej pary tych liczb jest kwadratem innej liczby. Zadanie to podał i rozwiązał Diofantos, ostatni wielki matematyk grecki, żyjący w III w n.e. w Aleksandrii.

Odpowiedź:  
Liczby te to 80, 320, 41.

Istotnie:

$$80 + 320 + 41 = 441 = 21^2.$$

Suma każdej pary tych liczb jest również kwadratem:

$$320 + 80 = 400 = 20^2,$$

$$320 + 41 = 361 = 19^2,$$

$$80 + 41 = 121 = 11^2.$$

# 1 Pojęcie wielomianu

Już znamy pojęcie jednomianu. Teraz kilka jednomianów możemy do siebie dodać np. do jednomianu  $x$  możemy dodać  $2a$  otrzymując  $x + 2a$ . Innym przykładem sumy jednomianów może być:  $3x^2 + 5x - 7$ , a taką sumę nazywamy wielomianem jednej zmiennej.

Przykładami wielomianów są:

$$W(x) = 8x^{12} - 3x^6 + 5x^4 + 9x - 4,$$

$$P(x) = x - 3.$$

\*\*\*\*\*plik Sumy algebraiczne\*\*\*\*\*

Hasło: Sumy algebraiczne



Spójrzmy teraz na poniższą, pełną definicję wielomianu jednej zmiennej.

### DEFINICJA.

Wielomianem zmiennej  $x$  nazywamy wyrażenie postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie współczynniki  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  są liczbami rzeczywistymi i  $n \in \mathbb{N}_0$ .

W wielomianie

$$W(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

współczynnikami będą  $a_3 = 6, a_2 = 4, a_1 = 3$  i  $a_0 = 2$ .

A ile wynosi współczynnik przy  $x^{23}$  potędze w wielomianie  $2x^3 + x$ ? Odpowiedź wydaje się prosta,  $a_{23} = 0$ , ponieważ  $2x^3 + x = 0x^{23} + 2x^3 + x$ .

### Wprowadzimy pojęcie stopnia wielomianu.

Stopień wielomianu to największe  $n \in \mathbb{N}_0$  takie, że  $a_n \neq 0$ .

**Przykłady:**

$P(x) = 3x^6 + x^2 + 1$  jest wielomianem 6-tego stopnia,

ale wielomian  $Q(x) = 0x^{100} + 23x + 1$  jest wielomianem pierwszego stopnia, ponieważ  $a_1 = 23$  i  $a_{100} = 0$ .

Zauważmy, że funkcja stała  $f(x) = a$  jest wielomianem zerowego stopnia, gdy  $a \neq 0$ .

Natomiast gdy  $a = 0$  otrzymujemy wielomian zerowy (nie określamy stopnia wielomianu zerowego).

Funkcja liniowa jest wielomianem pierwszego stopnia, a funkcja kwadratowa jest wielomianem drugiego stopnia.

## 2 Uporządkowanie wielomianu

Porządkowanie wielomianów polega na ułożeniu kolejnych wyrazów wielomianu według rosnących wykładników potęg zmiennej (rosnąco) lub według malejących wykładników potęg zmiennej (malejąco).

Wielomianami uporządkowanymi malejąco będą:

$$W_1(x) = 10x^3 + 5x^2 + 7x + 10,$$

$$W_2(x) = x^{50} + 2x^{21} + 4x,$$

$$W_3(x) = x + 1.$$

Natomiast wielomianami uporządkowanymi rosnąco będą:

$$P_1(x) = 10 + 7x + 5x^2 + 10x^3,$$

$$P_2(x) = 4x + 2x^{21} + x^{50},$$

$$P_3(x) = 1 + x.$$

### 3 Równość wielomianów

Dwa wielomiany  $P$  i  $Q$  zmiennej  $x$  będą sobie równe, jeśli dla wszystkich  $x$  zachodzi  $P(x) = Q(x)$ , co charakteryzuje poniższe twierdzenie:

#### TWIERDZENIE

Dwa wielomiany zmiennej  $x$  są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia oraz współczynniki przy odpowiednich potęgach są sobie równe.

Na przykład wielomiany

$$A(x) = 10x^3 + 3x^2 + 4x \text{ oraz } B(x) = 10x^3 + 3x^2 + 4x$$

są równe,

$$\text{ale } C(x) = 9x^5 + 4x^2 + x \text{ oraz } D(x) = 10x^5 + 4x^2 + x$$

nie są równe.

## 4 Dodawanie i odejmowanie wielomianów.

Wielomiany możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. W kolejnych rozdziałach dowiemy się, jak to robić. Aby dodać wielomian musimy dodać wyrazy podobne oraz uporządkować je.

Zatem dodamy:

$$A(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 \text{ i } B(x) = 13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11.$$

$$A(x) + B(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 + 13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11 =$$

$$17x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 8x + 31.$$

Dodawanie wielomianów jest przemienne oraz łączne, co wynika z przemienności i łączności dodawania w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$A(x) + B(x) = B(x) + A(x) \text{ - przemienność,}$$

$$(A(x) + B(x)) + C(x) = A(x) + (B(x) + C(x)) \text{ - łączność.}$$

### Odejmowanie wielomianów

Od współczynników pierwszego wielomianu musimy odjąć współczynniki drugiego:

$$A(x) - B(x) = 4x^5 + x^3 + 2x^2 + 8x + 20 - (13x^5 + 7x^4 + x^3 + 11) = -9x^5 - 7x^4 + 2x^2 + 8x + 9.$$

## 5 Mnożenie wielomianów

Mnożenie wielomianów polega na wymnożeniu przez siebie wyrazów obu wielomianów. Pomnożymy

$$A(x) = 6x^3 + 3x^2 + 2x \text{ oraz } B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10.$$

Wtedy

$$A(x)B(x) = (6x^3 + 3x^2 + 2x)(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10).$$

Mnożymy każdy wyraz pierwszego wielomianu przez każdy wyraz drugiego:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= 6x^3(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) + \\ & 3x^2(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) + \\ & 2x(10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10) = \\ & 60x^7 + 42x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 60x^3 + 30x^6 + 21x^5 + 6x^4 + 30x^3 + 30x^2 + 20x^5 + \\ & 14x^4 + 4x^3 + 20x^2 + 20x. \end{aligned}$$

Redukujemy wyrazy podobne i porządkujemy otrzymany wielomian:

$$A(x)B(x) = 60x^7 + 72x^6 + 53x^5 + 80x^4 + 93x^3 + 50x^2 + 20x.$$

## 6 Dzielenie wielomianów

Kolejnym działaniem na wielomianach jest dzielenie. Jedną z metod dzielenia jest metoda podobna do pisemnego dzielenia liczb. W przykładzie skupimy się na dzieleniu wielomianu przez dwumian. Wykonamy dzielenie wielomianu  $x^3 - 2x^2 - 2x - 3$  przez  $(x - 3)$ .

\*\*\*\*\*plikdzielenie\*\*\*\*\*

### Ogólny schemat, jak wykonać dzielenie:

1. Nad kreską: dzielimy pierwszy jednomian z dzielnej przez pierwszy z dzielnika i wpisujemy w wynik, następnie wynik mnożymy po kolei przez jednomiany z dzielnika i zapisujemy ze zmienionym znakiem poniżej (nad kreską).

2. Dodajemy do siebie oba wielomiany nad kreską, zapisując wynik pod kreską; pod kreską uzyskujemy nową dzielną.

3. Nad kolejnymi kreskami: bierzemy pierwszy jednomian z nowej dzielnej (spod kreski) i znowu dzielimy przez pierwszy z dzielnika, dopisując do wyniku, po czym mnożymy wynik przez... tak jak w punkcie 1. i 2. dopóki w dzielnej jest niewiadoma  $x$  lub niższa potęga niż w dzielniku.

- W razie gdyby na końcu została jakaś reszta, zapisujemy w wyniku: (iloraz)(dzielnik)+(reszta)

- Ważne: uważamy na znak jednomianu!

Z dzieleniem wielomianu przez dwumian związane są pojęcia reszty i wartości wielomianu, gdzie przez  $W(a)$  oznaczmy wartość wielomianu dla argumentu  $a$ .

#### Twierdzenie o reszcie.

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x - a$  jest równa  $W(a)$ .

Z powyższego twierdzenia mamy także związek dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez dwumian  $x - a$  i pierwiastka wielomianu  $a$ , czyli rozważamy przypadek, gdy  $W(a) = 0$ :

#### Twierdzenie Bezouta.

Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $W(x)$  jest podzielny przez dwumian  $x - a$ .



\*\*\*\*\*plik Reszta z dzielenia\*\*\*\*\*

Hasło: Reszta z dzielenia

Więcej o pierwiastkach:

**Twierdzenie o całkowitych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.**

Jeżeli wielomian  $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek całkowity  $p$ , to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ .

**Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych.**

Jeżeli wielomian  $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_0 \neq 0$ , o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego  $\frac{p}{q}$ ,  $p \in \mathbb{C}$ ,  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , to  $p$  jest dzielnikiem wyrazu wolnego  $a_0$ , zaś  $q$  jest dzielnikiem współczynnika  $a_n$  przy najwyższej potędze.

Twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu.

Każdy wielomian stopnia  $n$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków.

Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki.

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego o współczynnikach rzeczywistych.

Jeżeli liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są pierwiastkami wielomianu  $W(x)$  stopnia  $n$ , to prawdziwa jest równość  $W(x) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_n)$ .

### Przykłady:

Rozkład wielomianu stopnia trzeciego na czynniki.

- Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias:

$$T(x) = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x + 1)(x - 4).$$

- Grupowanie wyrazów:

$$W(x) = x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x^3 - 5x^2) + (2x - 10) = x^2(x - 5) + 2(x - 5) = (x - 5)(x^2 + 2).$$

- Zastosowanie twierdzenia Bézouta

$$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24.$$

Pierwiastkiem tego wielomianu jest  $x = -4$ , ponieważ:  $W(-4) = 0$ .

Wielomian  $W(x)$ , na podstawie twierdzenia Bézouta, jest podzielny przez dwumian  $Q(x) = x + 4$ .

Wykonujemy dzielenie  $W(x) : Q(x)$ .

Otrzymujemy

$$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x + 4)(x^2 - 5x + 6) \text{ Niech: } P(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Dokonujemy rozkładu  $P(x)$ .

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Ostatecznie

$$W(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24 = (x + 4)(x - 2)(x - 3).$$

### Zadanie.

Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez  $(x + 2)$  daje resztę 8, a przy dzieleniu przez  $(x + 1)$  daje resztę -4.

Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian

$$P(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian np.  $P(x)$  (stopnia co najmniej 1) jest wielomianem o stopniu co najwyżej o 1 mniejszym niż dzielnik.

Zatem reszta z dzielenia przez trójmian kwadratowy może być liniowa, a jak dzielimy przez wielomian stopnia 3, to reszta może być kwadratowa itd.

Według tej zasady przy dzieleniu przez  $P(x) = x^2 + 3x + 2$  możemy otrzymać resztę liniową, czyli  $R(x) = ax + b$ . Zatem  $W(-2) = R(-2) = 8$ ,  $W(-1) = R(-1) = -4$ ,

$$-2a + b = 8, \quad -a + b = -4,$$

czyli

$$a = -12, \quad b = -16$$

Odpowiedź: Szukaną resztą jest  $R(x) = -12x - 16$ .

### Zadanie.

Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumiany  $(x - 1)$ ,  $(x + 2)$ ,  $(x - 3)$  daje reszty odpowiednio równe 5, 2, 27. Wyznacz resztę z dzielenia tego wielomianu przez wielomian  $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ .

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez  $P(x)$  jest stopnia drugiego, czyli  $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$ , gdzie

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

dla pewnych rzeczywistych  $a, b, c$ . Z podanych informacji wiemy, że  $W(1) = 5$ ,  $W(-2) = 2$ ,  $W(3) = 27$ . Podstawiając te wartości w powyższej równości mamy

$$\begin{cases} 5 = a + b + c \\ 2 = 4x - 2b + c \\ 27 = 9a + 3b + c \end{cases} .$$

Odejmując od drugiego równania pierwsze, a od ostatniego drugie, dostajemy

$$\begin{cases} -3 = 3a - 3b \\ 25 = 5a + 5b \end{cases} .$$

Natomiast dzieląc pierwsze równanie przez 3, a drugie przez 5 mamy

$$\begin{cases} -1 = a - b \\ 5 = a + b \end{cases} .$$

Dodając te równania stronami mamy  $a = 2$ ,  $b = 3$  i  $c = 0$ , stąd:  
odpowiedź:  $R(x) = 2x^2 + 3x$ .

## 7 Równania wielomianowe

Na początek definicja.

### DEFINICJA.

Równanie wielomianowe to równanie otrzymane poprzez przyrównanie danego wielomianu do zera.

Zobaczmy na [przykłady](#):

- $4x + 1 = 0$ ,
- $3x^2 + 2x - 5 = 0$ ,
- $x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0$ .

Rozwiązywanie równania wielomianowego polega na znalezieniu wszystkich  $x$ , dla których wielomian jest równy zero. W zadaniach trzeba będzie z reguły skorzystać:

- ze wzorów skróconego mnożenia,
  - z dzielenia wielomianów i twierdzenia Bézout'a,
  - z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych,
  - metody podstawiania
- (tzn. sprawdzamy, czy dla danego  $x$  zachodzi  $W(x) = 0$ ),  
...



### Przykład.

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia rozwiążemy równanie:

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 0.$$

Wyciągamy  $x$  przed nawias i otrzymujemy  
 $x(x^2 - 6x + 9) = 0.$

Korzystając ze wzoru  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  mamy:  $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ ,  
czyli badane równanie ma postać:

$$x(x-3)^2 = 0.$$

Powyższe równanie jest prawdziwe gdy:

$x = 0$  lub  $x - 3 = 0$ , czyli gdy:

$x = 0$  lub  $x = 3$ .

Zatem rozwiązaniem równania  $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$  jest zbiór  $\{0, 3\}$ .

## 8 Nierówność wielomianowa

Nierównością wielomianową nazywamy nierówność postaci:  
 $W(x) < G(x)$ ,  $W(x) > G(x)$ ,  $W(x) \leq G(x)$  lub  $W(x) \geq G(x)$ ,  
gdzie  $W(x)$  i  $G(x)$  są wielomianami tej samej zmiennej.

### Przykłady

- $x^2 + 2 > 0$ , której rozwiązaniem jest zbiór liczb rzeczywistych.
- $x^2 < 4$ , której rozwiązaniem jest zbiór  $(-2, 2)$ .
- $x^2 < 0$ , której rozwiązaniem jest zbiór pusty.

Sposób rozwiązywania:

Aby rozwiązać nierówność wielomianową, należy wykonać następujące kroki:

- Przenosimy wszystkie liczby i niewiadome na lewą stronę, tak aby, prawa strona była równa zero.
- Za pomocą znanych już nam sposobów (grupowanie, wykorzystanie wzorów skróconego mnożenia, obliczenie miejsc zerowych funkcji kwadratowej) rozkładamy wielomian po lewej stronie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.
- Następnie, dla każdego z wielomianów po rozkładzie znajdujemy przedział, w którym jest dodatni, miejsce zerowe i przedział, w którym jest ujemny.
- Budujemy tabelkę znaków wielomianu w poszczególnych przedziałach.
- Zapisujemy przedziały, w których wielomian jest dodatni, ujemny bądź równy zero.
- Formułujemy odpowiedź.

### Przykład.

Rozwiążemy nierówność:  $x^4 + \sqrt{20}x^3 + 2x^2 > -\sqrt{20}x - 1$ .

• Możemy ją przekształcić do postaci:  $x^4 + \sqrt{20}x^3 + 2x^2 + \sqrt{20}x + 1 > 0$  i metodą grupowania rozłożyć lewą stronę w następujący sposób:

$$x^4 + \sqrt{20}x^3 + x^2 + x^2 + \sqrt{20}x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{20}x + 1).$$

Pierwsze wyrażenie  $(x^2 + 1)$  nie ma miejsc zerowych, a więc nie da się go rozłożyć na wyrażenia stopnia pierwszego (gdyż  $\Delta < 0$ ).

•  $\Delta$  drugiego wyrażenia wynosi 16, a jego miejscami zerowymi są liczby  $\frac{\sqrt{20}-4}{2}$  i  $\frac{\sqrt{20}+4}{2}$ . Zatem możemy je zapisać w postaci:

•  $x^2 + \sqrt{20}x + 1 = (x - \frac{\sqrt{20}-4}{2})(x - \frac{\sqrt{20}+4}{2})$

A cała nierówność ma postać:

$$(x^2 + 1)(x - \frac{\sqrt{20}-4}{2})(x - \frac{\sqrt{20}+4}{2}) > 0.$$

Możemy więc zbudować tabelę znaków wielomianu i jego czynników:

	$x^2 + 1$	$x - \frac{\sqrt{20}-4}{2}$	$x - \frac{\sqrt{20}+4}{2}$	lewa strona nierówności
$x \in (-\infty, \frac{\sqrt{20}-4}{2})$	+	-	-	+
$x = \frac{\sqrt{20}-4}{2}$	+	0	-	0
$x \in (\frac{\sqrt{20}-4}{2}, \frac{\sqrt{20}+4}{2})$	+	+	-	-
$x = \frac{\sqrt{20}+4}{2}$	+	+	0	0
$x \in (\frac{\sqrt{20}+4}{2}, \infty)$	+	+	+	+

Widzimy, że nierówność zachodzi (lewa strona jest dodatnia) gdy  $x \in (-\infty, \frac{\sqrt{20}-4}{2}) \cup (\frac{\sqrt{20}+4}{2}, \infty)$ .

\*\*\*\*\*plik Równanie trzeciego stopnia\*\*\*\*\*

Hasło: **Równanie trzeciego stopnia**

## Zadania

zad. 1. Rozłóż na czynniki:

$$Q(x) = 2x^3 - 8x^2 + x - 4.$$

Rozwiązanie:

$$(x - 4)(2x^2 + 1).$$

zad. 2. Uporządkuj malejąco wielomiany:

- $W(x) = 10x^4 + 7x^9 + x + 10 + 13x^{13}$ ,

- $W(x) = 11x^{20} + 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11}$ .



Rozwiązanie:

- $W(x) = 13x^{13} + 7x^9 + 10x^4 + x + 10,$

- $W(x) = 11x^{20} + 21x^{11} + 4x^6 + 4x^5.$

zad. 3. Uporządkuj rosnąco wielomiany:

- $W(x) = 10x^4 + 7x^9 + x + 10 + 13x^{13}$ ,

- $W(x) = 11x^{20} + 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11}$ .

Rozwiązanie:

- $W(x) = 10 + 10x^4 + 7x^9 + x + 13x^{13},$

- $W(x) = 4x^5 + 4x^6 + 21x^{11} + 11x^{20}.$

zad. 4. Czy poniższe wielomiany są równe:

- $A(x) = 41x^5 + 7x^2 + x$  oraz  $B(x) = 7x^2 + 41x^5 + x$ ,

- $C(x) = x^7 + 4x^3 + x^9 + x$  oraz  $D(x) = 2x^7 + 4x^3 + x^9 + x$ ,

- $C(x) = 11x^2 + x + 10$  oraz  $D(x) = 11x^3 + x^2 + 10$ .

Rozwiązanie:

- tak,
- nie,
- nie.

zad. 5. Dla jakich wartości parametru  $a$  i  $b$  poniższe wielomiany są równe:

- $A(x) = ax^6 + 10x^4 + x + 1$  oraz  $B(x) = 7x^6 + bx^4 + x + 1$ ,

- $C(x) = (a + 1)x^7 + (b - 3)x^5 + 5$  oraz  $D(x) = 11x^7 + (b - 3)x^5 + 5$ .

Rozwiązanie:

- $a = 7, b = 10$
- $a = 10, b \in \mathbb{R}.$

zad. 6. Dane są wielomiany:

$$W(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3, Q(x) = 8x - 5 \text{ i } R(x) = x^2 + x + 2.$$

Oblicz

$$3W(x) - 2Q(x)R(x).$$



Rozwiązanie:

$$-4x^3 - 12x^2 - 25x + 29.$$

zad. 7. Należy rozwiązać równanie

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0.$$

Rozwiązanie:

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = 3.$$

zad. 8. Rozwiąż nierówność:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0.$$

Rozwiązanie:

$$(-\infty, -2) \cup (-1, 1).$$

## Test

1) Dodając wielomiany:

$$A(x) = 6x^3 + 13x^2 + 20x$$

oraz

$$B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$$

mamy:

a)  $A(x) + B(x) = 13x^3 + 15x^2 + 30x + 10,$

b)  $A(x) + B(x) = 10x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 30x + 10,$

c)  $A(x) + B(x) = 10x^4 + 13x^3 + 15x^2 + 30x.$

Rozwiązanie:

b).

2) Odejmując wielomian

$$B(x) = 10x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 10x + 10$$

od

$$A(x) = 6x^3 + 13x^2 + 20x$$

otrzymujemy:

a)  $A(x) - B(x) = -10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x - 10,$

b)  $A(x) - B(x) = 10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x - 10,$

c)  $A(x) - B(x) = -10x^4 - x^3 + 11x^2 + 10x + 10.$



Rozwiązanie:

a).

3)  $W(x) = 4x^6 + 9x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$  i  $P(x) = 3x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 3x + 10$ .  
Podaj wzór wielomianu  $Q(x)$  jeśli:

$$W(x) + Q(x) = P(x).$$

a)  $Q(x) = x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 9,$

b)  $Q(x) = -x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 10,$

c)  $Q(x) = -x^6 + x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 2x + 9.$

Rozwiązanie:

c).

4) Wielomian  $W(x)$  przy dzieleniu przez dwumiany  $(x - 2)$ ,  $(x + 4)$ , daje reszty odpowiednio równe  $-3$  oraz  $-51$ . Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $W(x)$  przez wielomian  $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ , wiedząc, że liczba  $-1$  jest miejscem zerowym wielomianu  $W(x)$ .

Poszukiwaną resztą jest:

a)  $R(x) = -3x^2 + 2x + 5$ ,

b)  $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$ ,

c)  $R(x) = -3x^2 - 2x + 5$ .

Rozwiązanie:

a).

5) Rozwiązaniem równania

$$(x^2 - 9)^3 = (2x^2 - 10)^3$$

jest:

a)  $x = 1, x = -1$ , b)  $x = 1$ , c)  $x = -1$ .

Rozwiązanie:

a).

6) Rozwiązaniem równania

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$$

jest:

a)  $x = 0, x = 2, x = 3,$

b)  $x = 0, x = -2, x = 3,$

c)  $x = 0, x = 2, x = -3.$



Rozwiązanie:

a).

7) Rozwiązaniem nierówności:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 9 \leq 0$$

jest:

a)  $x \in (-\infty, 3)$ , b)  $x \in (-\infty, -3)$ , c)  $x \in (-\infty, -3)$ .

Rozwiązanie:

a).