Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Twierdzenie Talesa

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

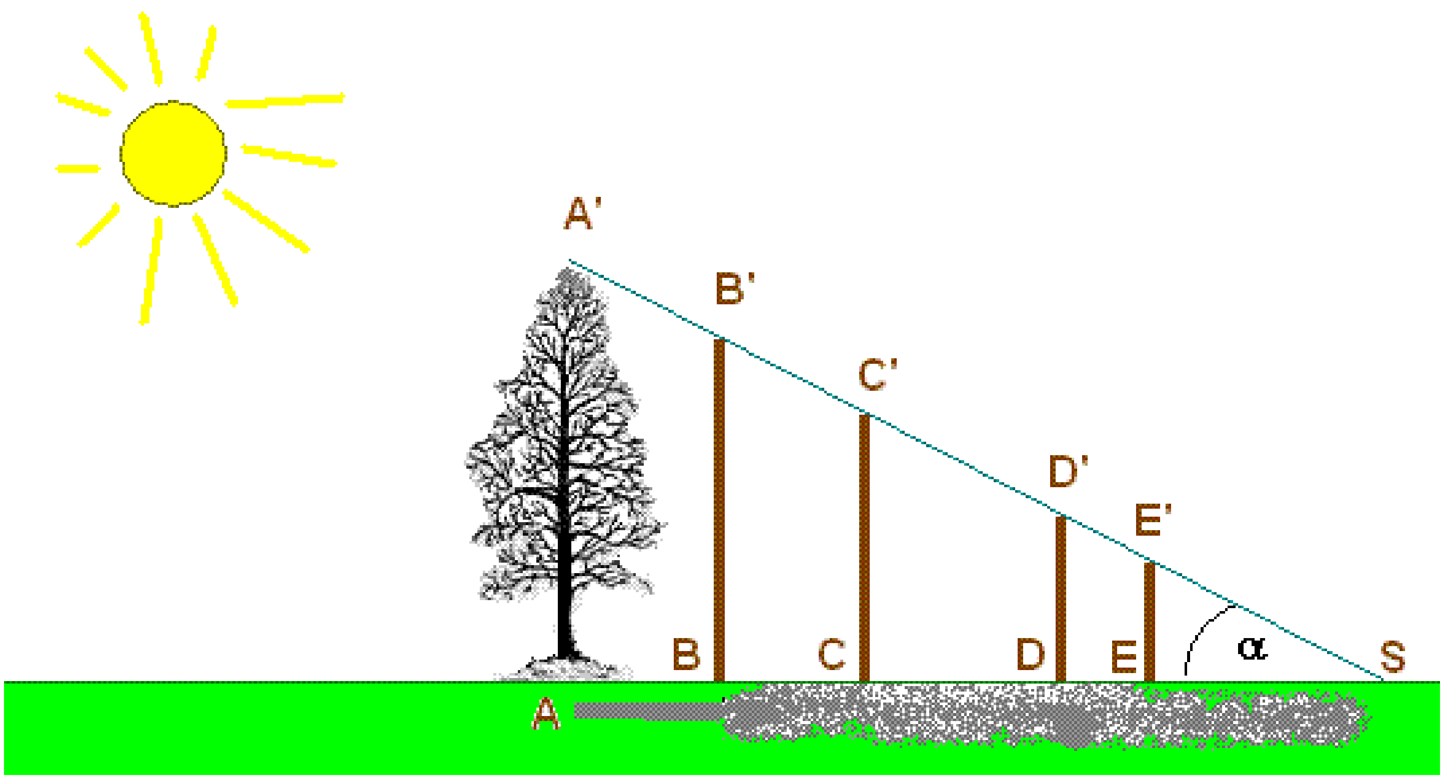
Kurs „Twierdzenie Talesa” przeprowadzi Cię przez kilka zagadnień związanych z tym twierdzeniem wraz z ukazaniem jego praktycznych aspektów.

W tekście pojawi się czasami polecenie zakończone niebieską liczbą zapisaną w nawiasie. Oznacza to, że polecenie to masz wykonać, rozwiązać lub wyjaśnić a następnie przesłać na platformę e-learningową swojemu nauczycielowi matematyki.
Pewnie będziesz za to oceniany.

Ważniejsze fakty, które powinieneś zapamiętać na całe życie wyróżnione będą czerwonym pogrubionym kolorem.

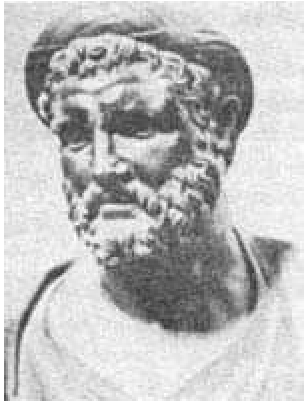
Życzę Ci miłej zabawy, w której wiele się nauczysz!

Już w Starożytności zauważono, że cień drzewa jaki pada na Ziemię pozwala obliczyć wysokość tego drzewa, stosując odpowiednie proporcje, które zachowują się, jeśli tylko odpowiednie odcinki są równoległe.



Wykorzystywano do tego wiedzę, którą odkrył Tales z Miletu, choć badali to już wcześniej w Starożytności Eudoksos i Euklides.

Eudoksos z Knidos (408 - 355 p.n.e.)



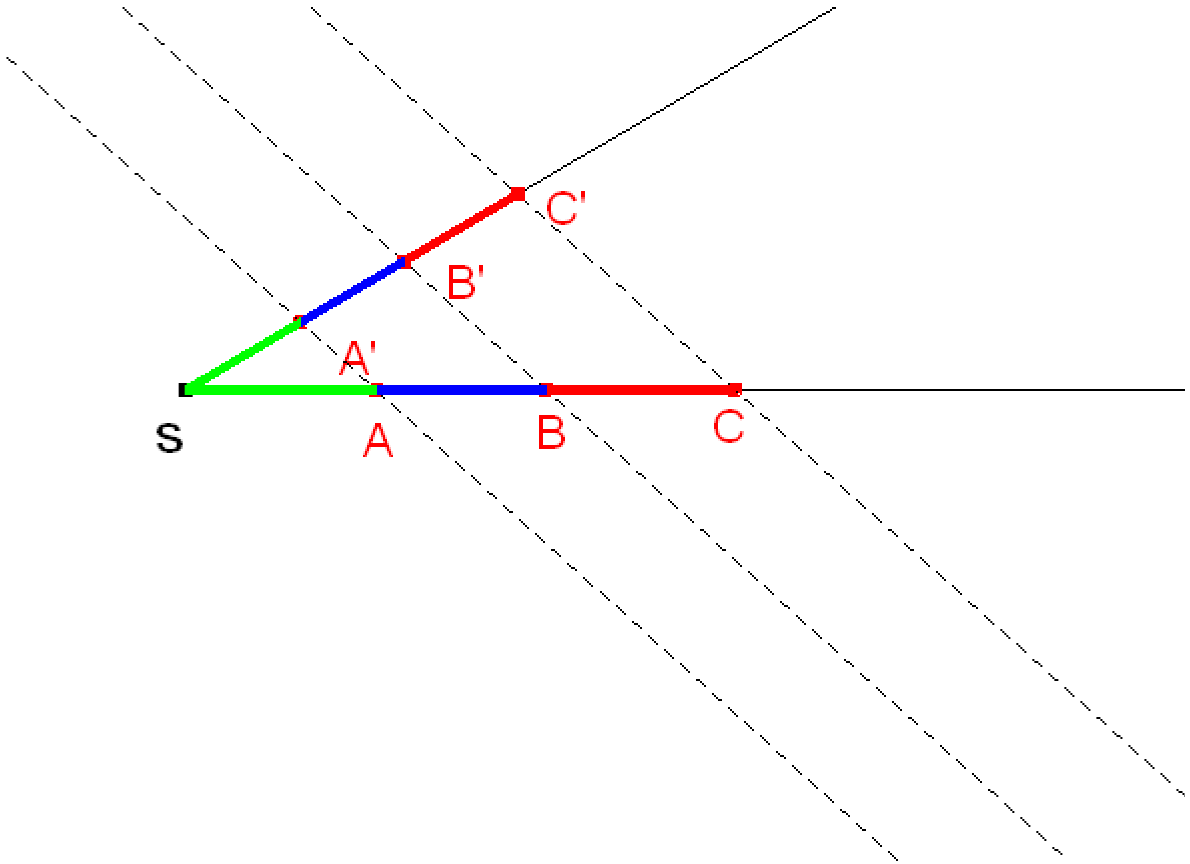
Euklides (325 - 265 p.n.e.).

Teraz Ty będziesz młodym odkrywcą dwóch być może nieznanych Ci twierdzeń.

Na apletach CABRI zamieszczonych na kolejnych slajdach będziesz miał możliwość poruszania wybranymi odpowiednio obiektami i obserwowania tego, co się nie zmienia.

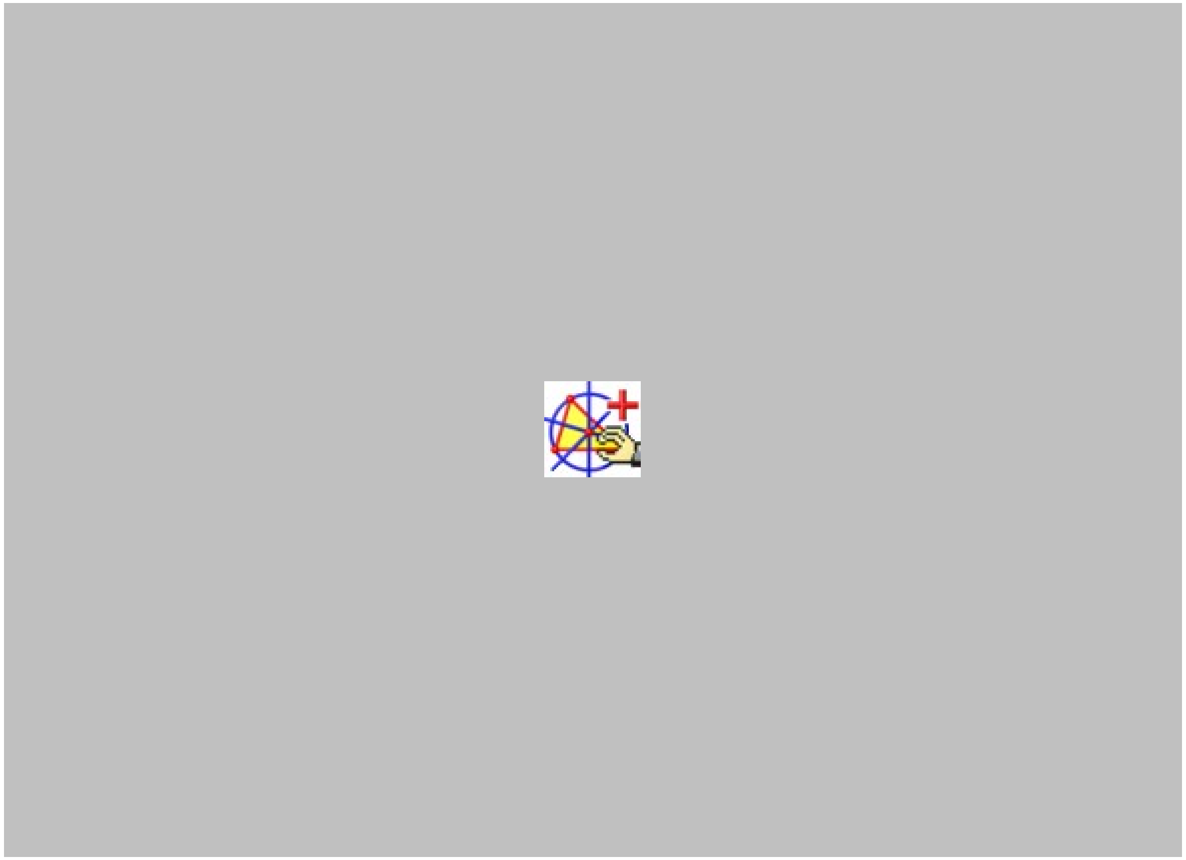
Poruszaj na trzech kolejnych apletach punktami ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** oraz ***A'.***

Co zauważyłeś **(01)?**



Poruszaj punktami ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** oraz ***A'.***

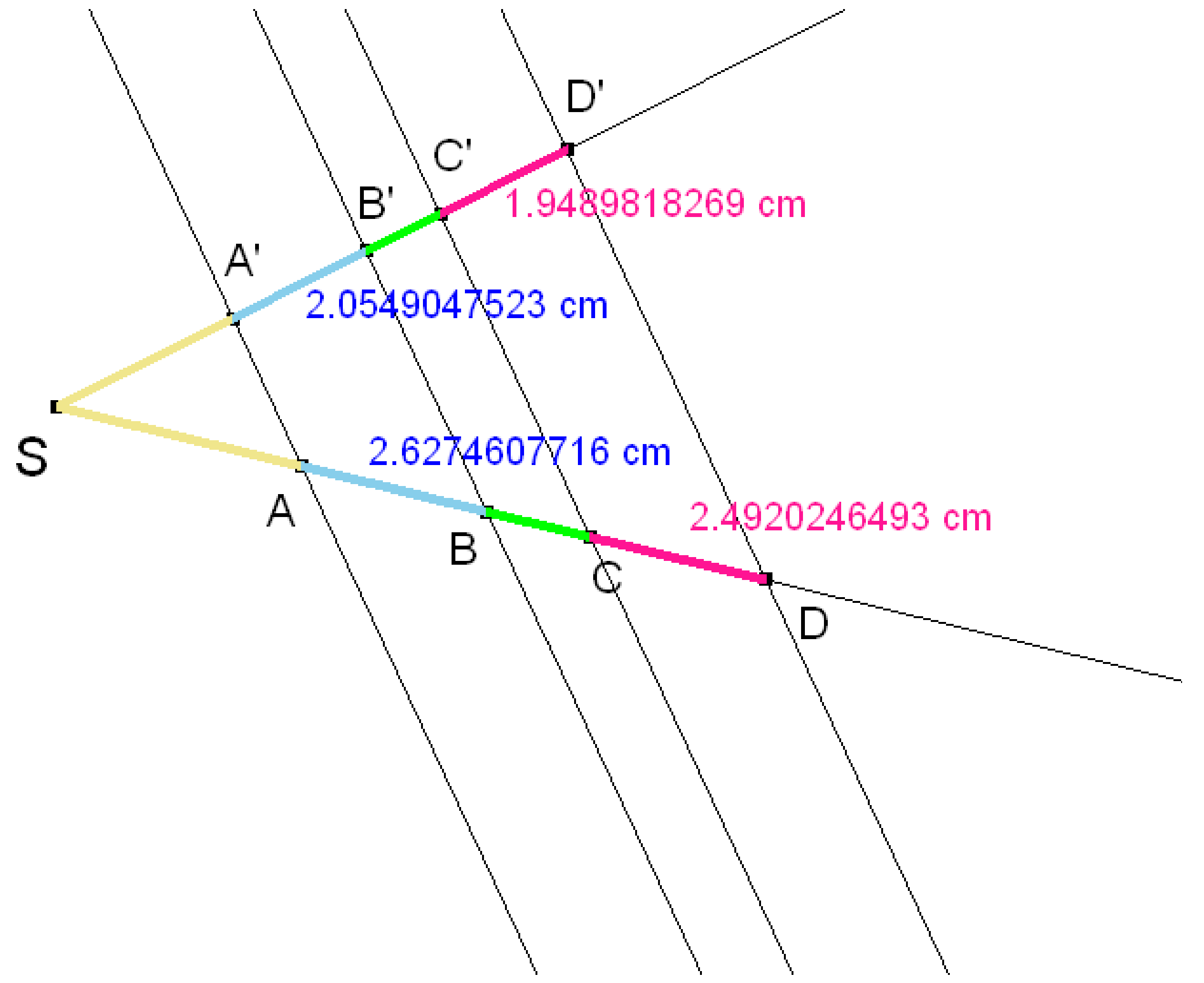
Co zauważyłeś **(01)?**



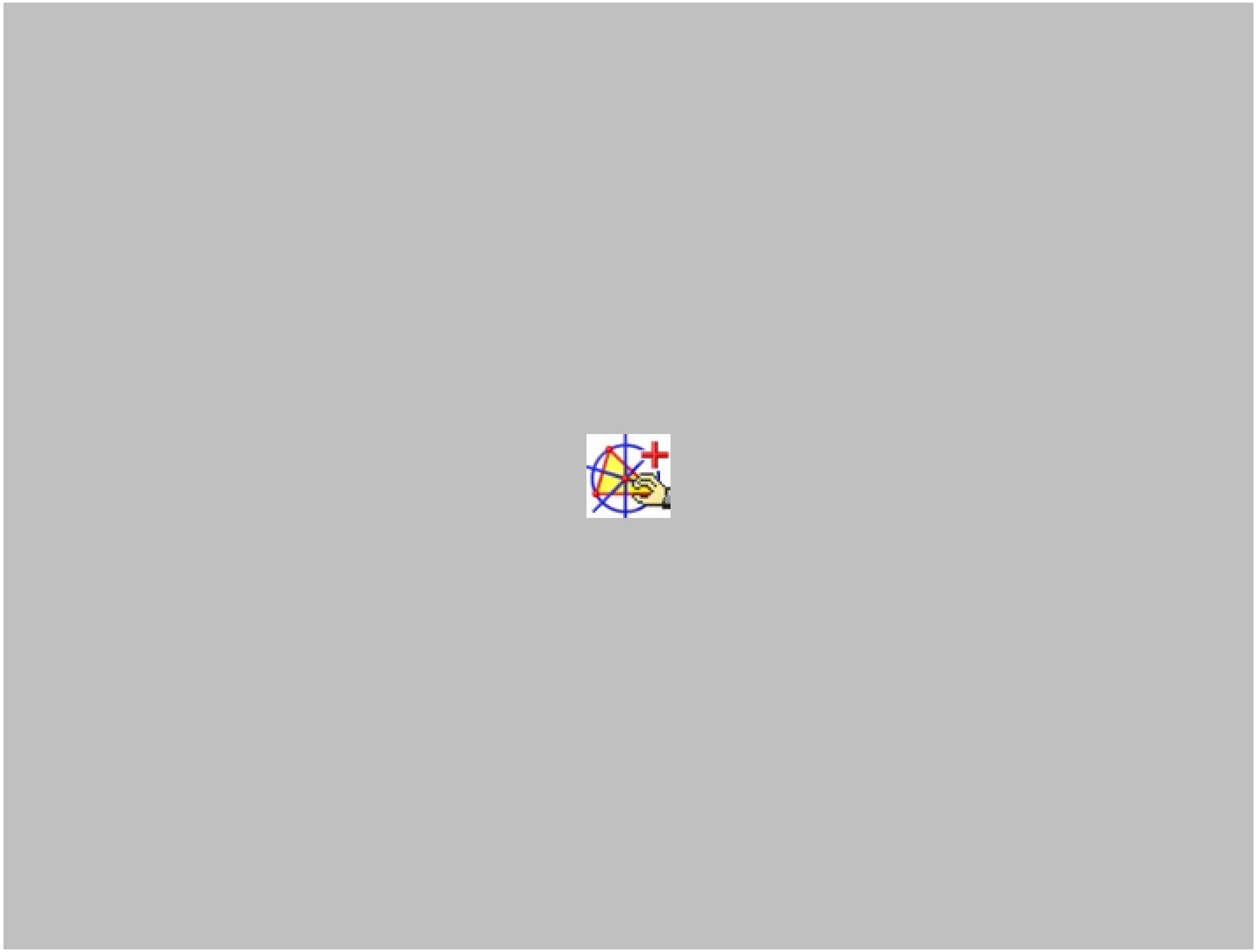
Poruszaj punktami ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** oraz ***A'.***

Co zauważyłeś **(01)?**

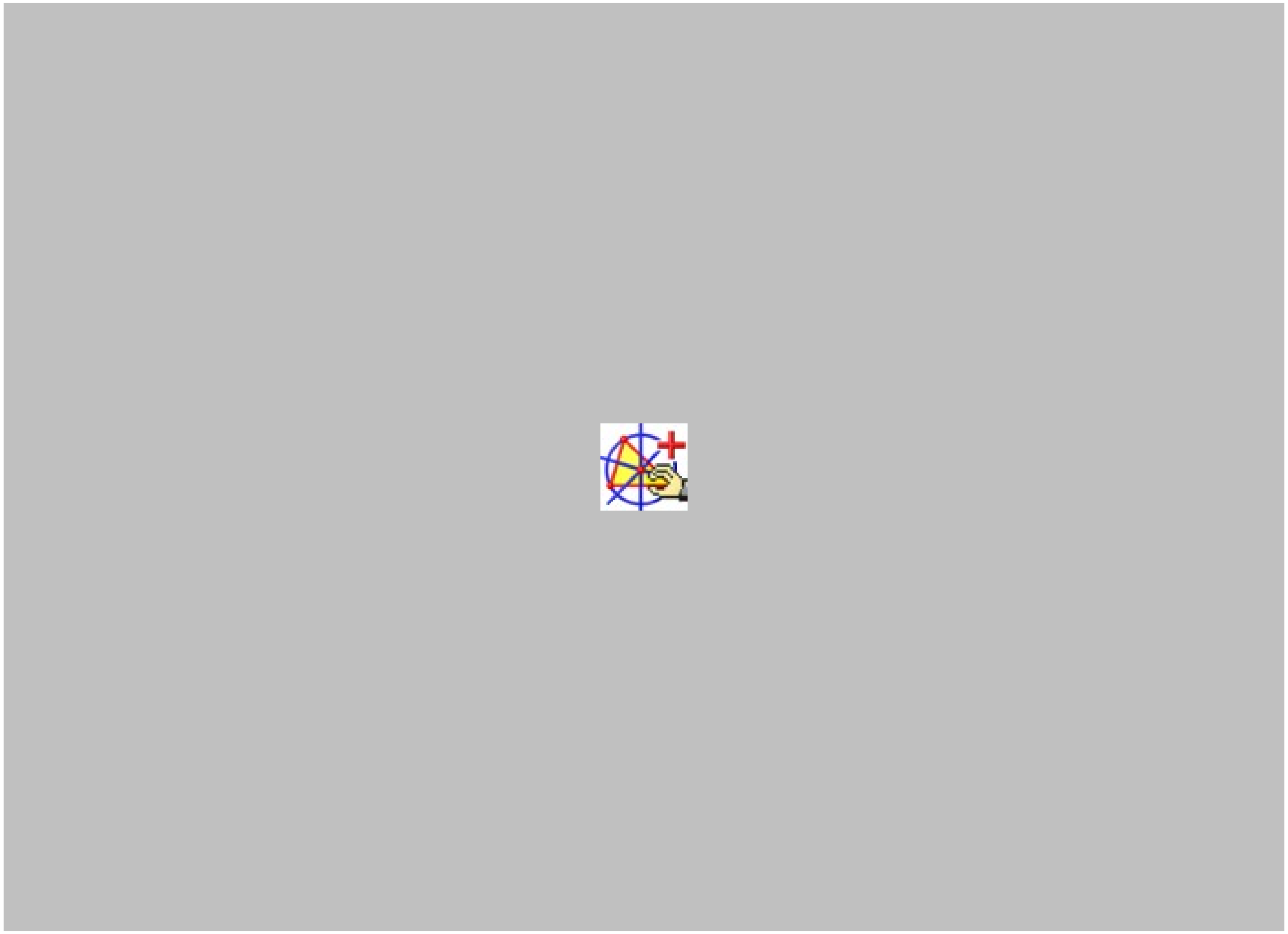
Teraz komputer zmierzył dość dokładnie wybrane odcinki i obliczył na kalkulatorze ilorazy długości niektórych z nich:



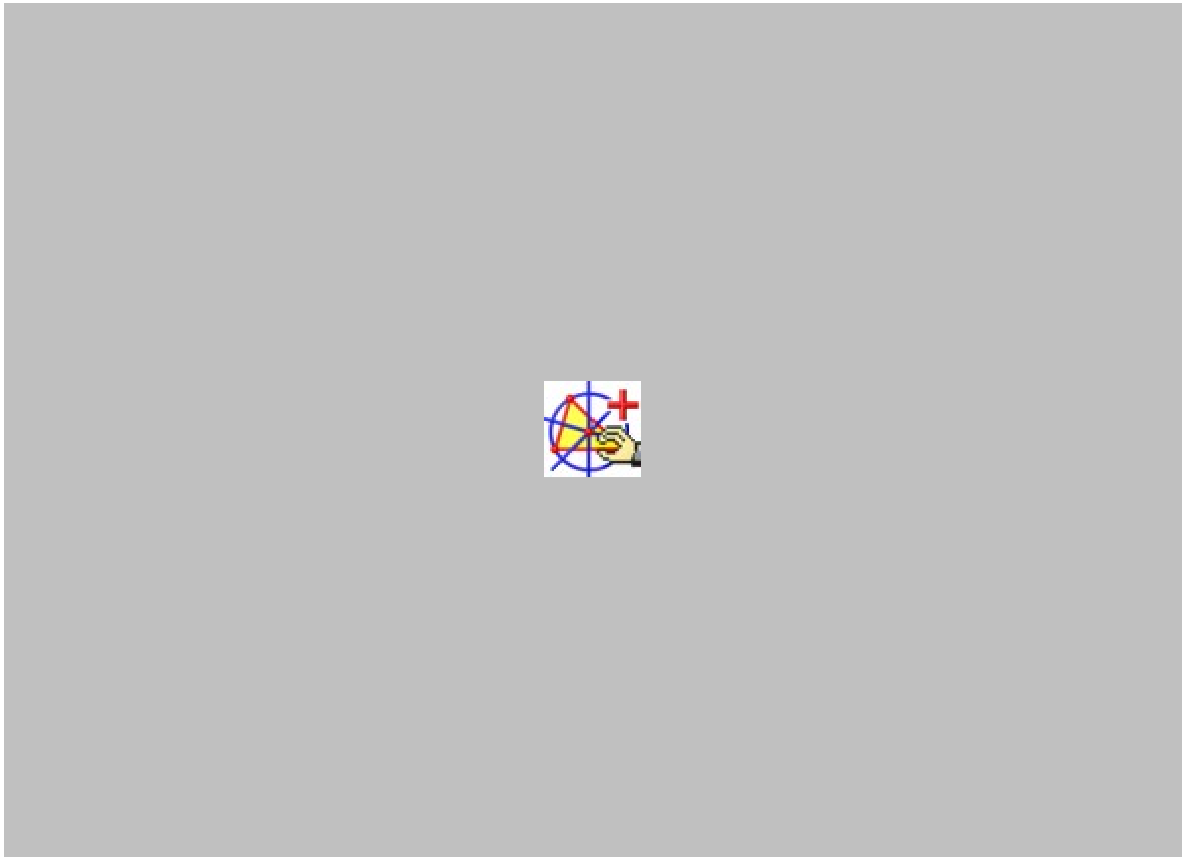
Teraz komputer zmierzył dość dokładnie wybrane odcinki i obliczył na kalkulatorze ilorazy długości niektórych z nich:



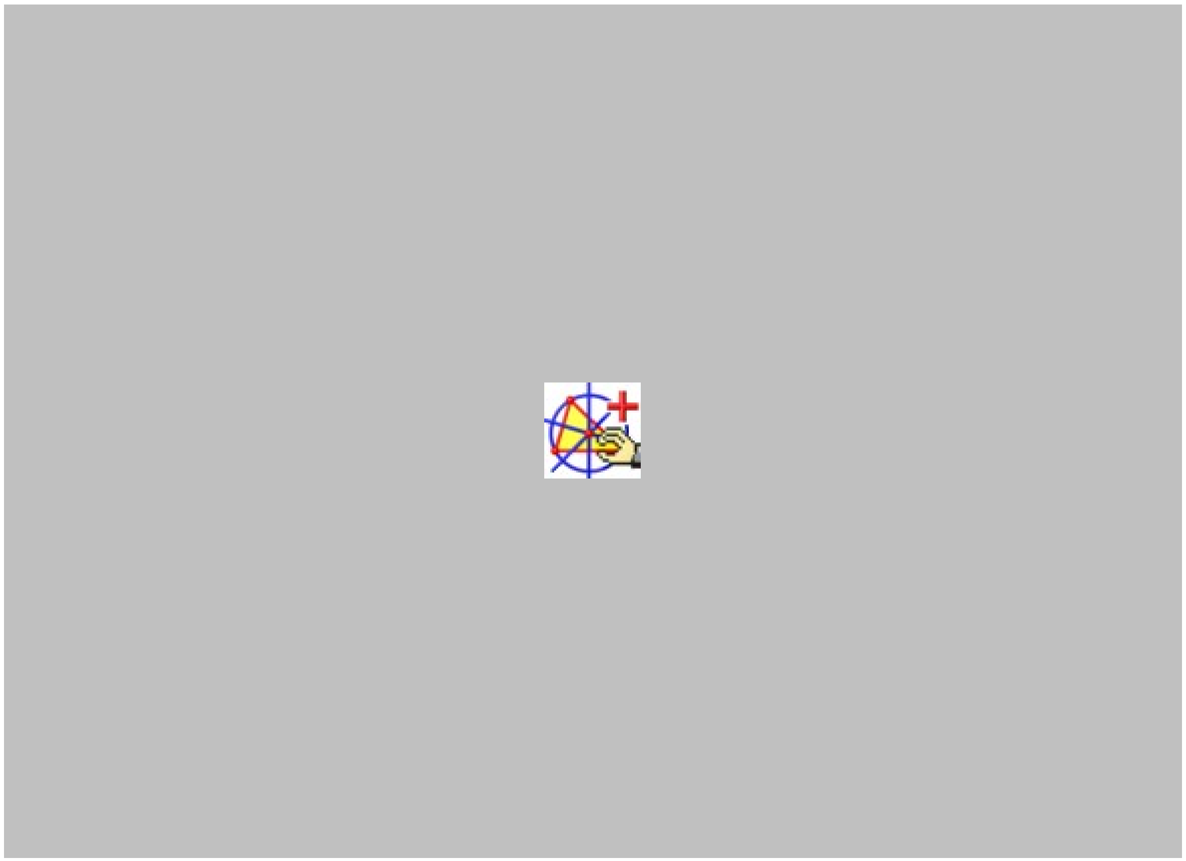
Teraz komputer zmierzył dość dokładnie wybrane odcinki i obliczył na kalkulatorze ilorazy długości niektórych z nich:



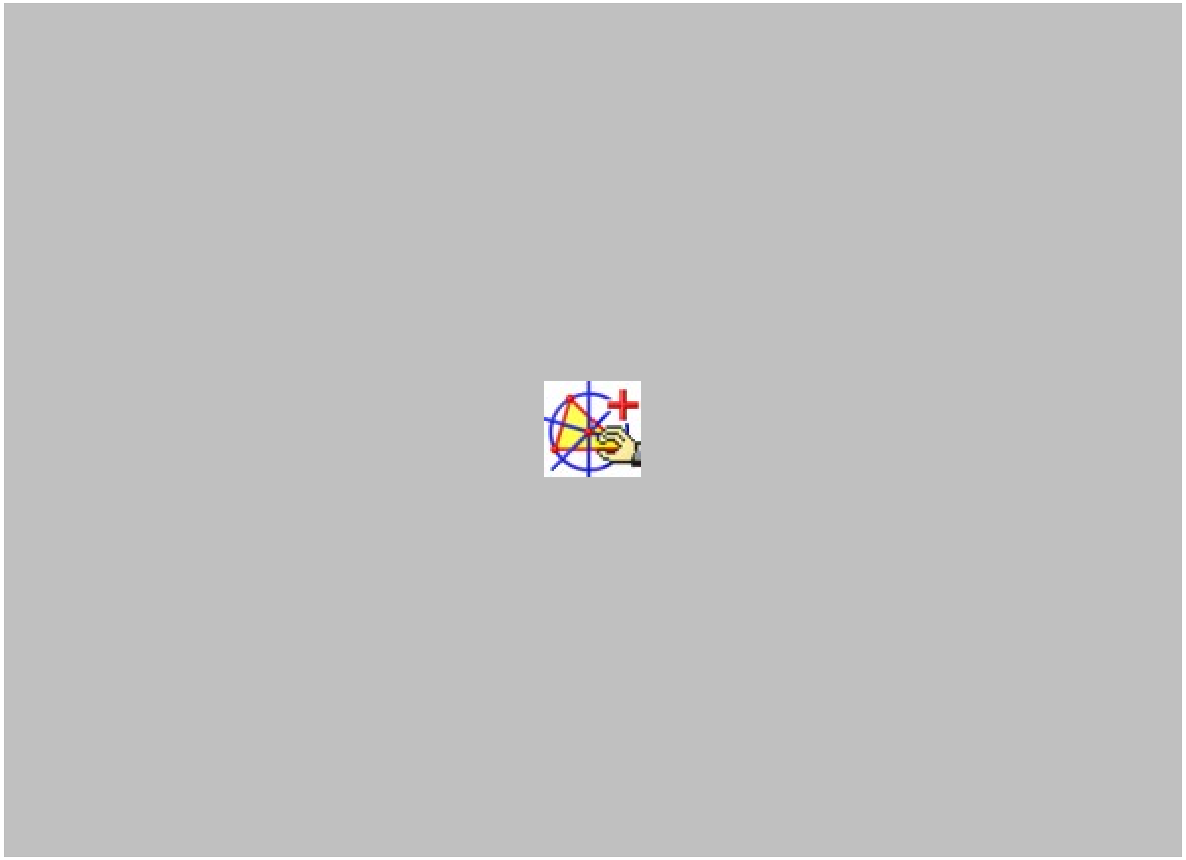
Teraz ilorazy te obliczy za Ciebie program CABRI.
Poruszaj punktami ***A***, ***B***, ***C*** , ***D*** oraz ***A’.***



Teraz ilorazy te obliczy za Ciebie program CABRI.
Poruszaj punktami ***A***, ***B***, ***C*** , ***D*** oraz ***A’.***



Teraz ilorazy te obliczy za Ciebie program CABRI.
Poruszaj punktami ***A***, ***B***, ***C*** , ***D*** oraz ***A'.***



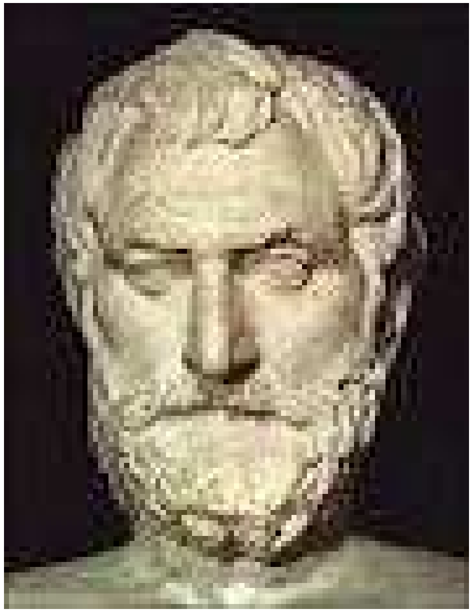
Co zauważyłeś wykonując te doświadczenia?
Spróbuj opisać hipotezę (przypuszczenie),

którą odkryłeś **(02)**.

Tales z Miletu (620 - 546 p.n.e.) – grecki filozof, matematyk i astronom.

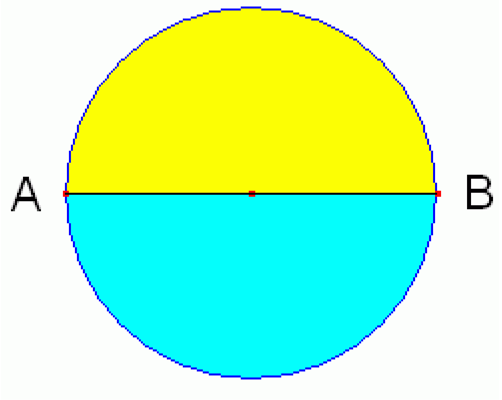
Na podstawie długości rzucanego cienia

obliczył wysokość piramidy.

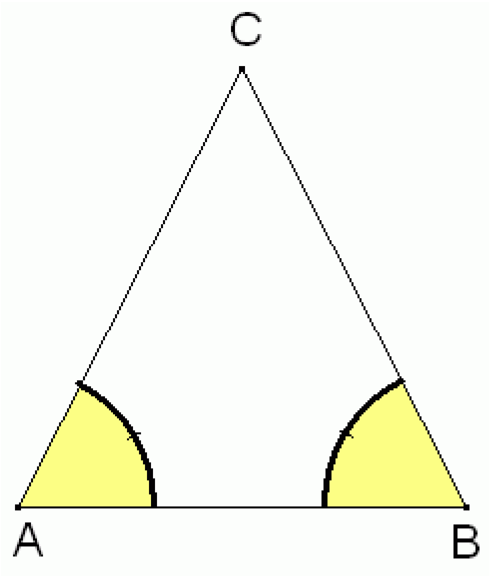


Jemu zawdzięczamy szereg odkrytych twierdzeń, które dziś są dla nas zupełnie oczywiste:

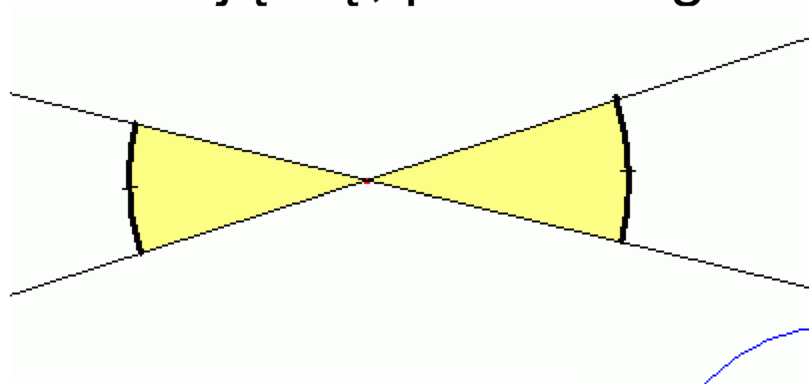
- średnica dzieli okrąg na połowy,



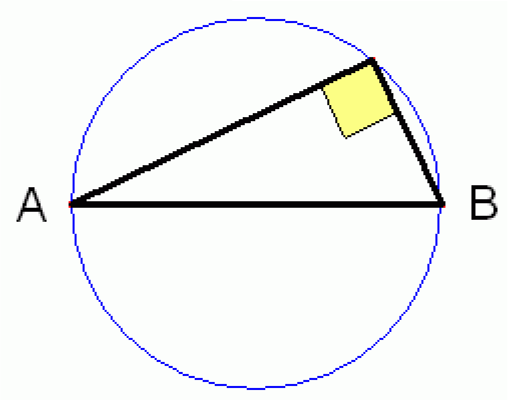
- dwa kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe,



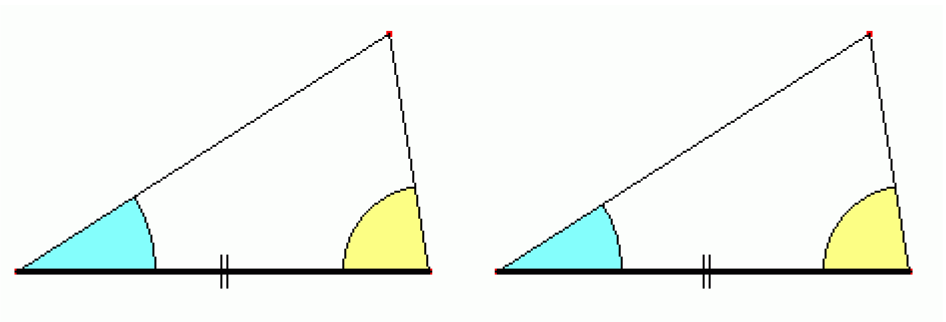
-jeżeli dwie linie proste przecinają się, przeciwległe kąty są równe (kąty wierzchołkowe),



- kąt wpisany w półkole jest kątem prostym,

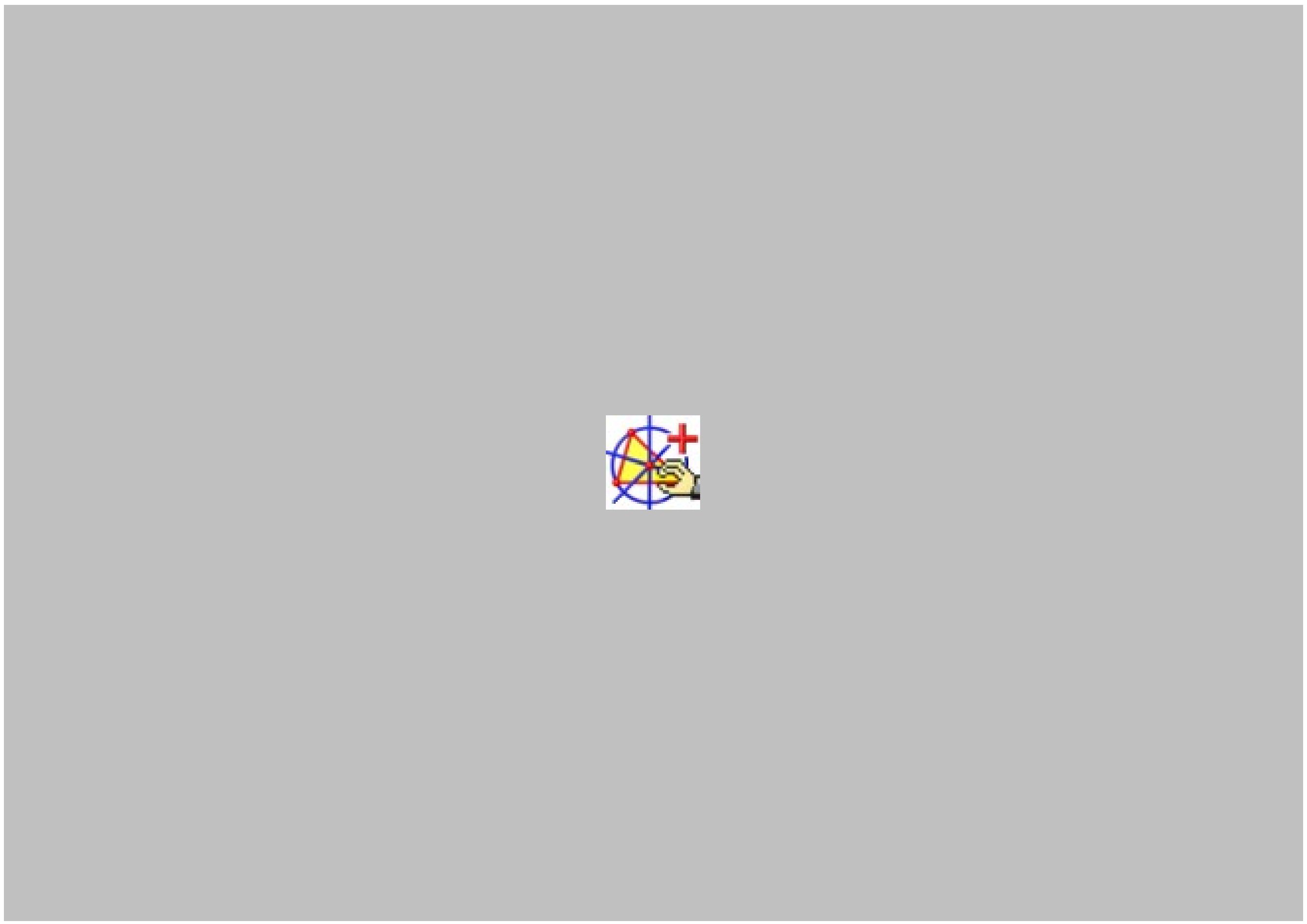


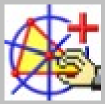
- trójkąt jest określony, jeżeli dana jest jego podstawa i kąty przy podstawie.



Ale najważniejsze z twierdzeń odkrytych przez Talesa jest to, które być może poznałeś w gimnazjum, lub odkryłeś na poprzednich slajdach:

Jeżeli ramiona kąta (lub jego przedłużenia) przetniemy dwiema (lub kilkoma) prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta, są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu kąta.





Praktyczne jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

Twierdzenie odwrotne powstaje poprzez zamianę założenia z tezą.

Np. twierdzenie:

Jeśli liczba jest podzielna przez 4 to jest parzysta.

ma założenie wyróżnione kolorem różowym, a tezę jasnoniebieskim

Twierdzenie do niego odwrotne ma postać:

Jeśli liczba jest parzysta to jest podzielna przez 4

i jest ono fałszywe (liczba 6 go nie spełnia)

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa, pozwala zastosować to twierdzenie praktycznie do badania równoległości obiektów (prostych, odcinków).

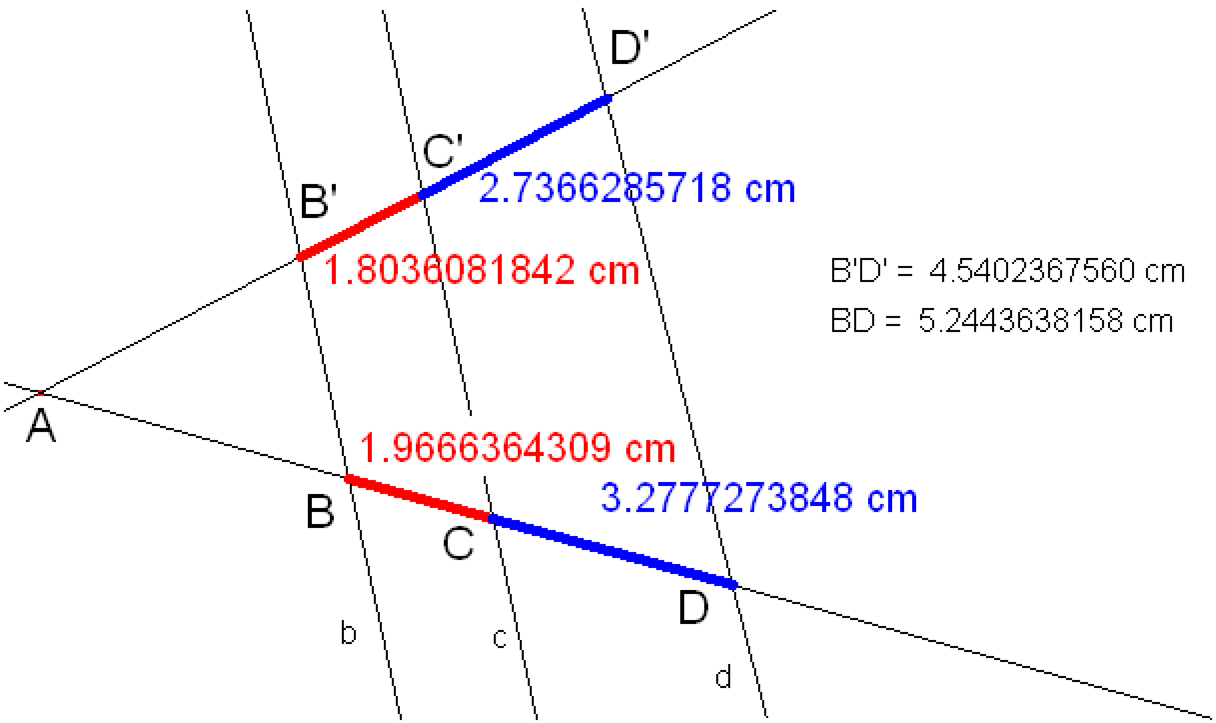
Twierdzenie to ma następującą postać:

Jeżeli odcinki wyznaczone przez proste na jednym ramieniu kąta, są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta, to

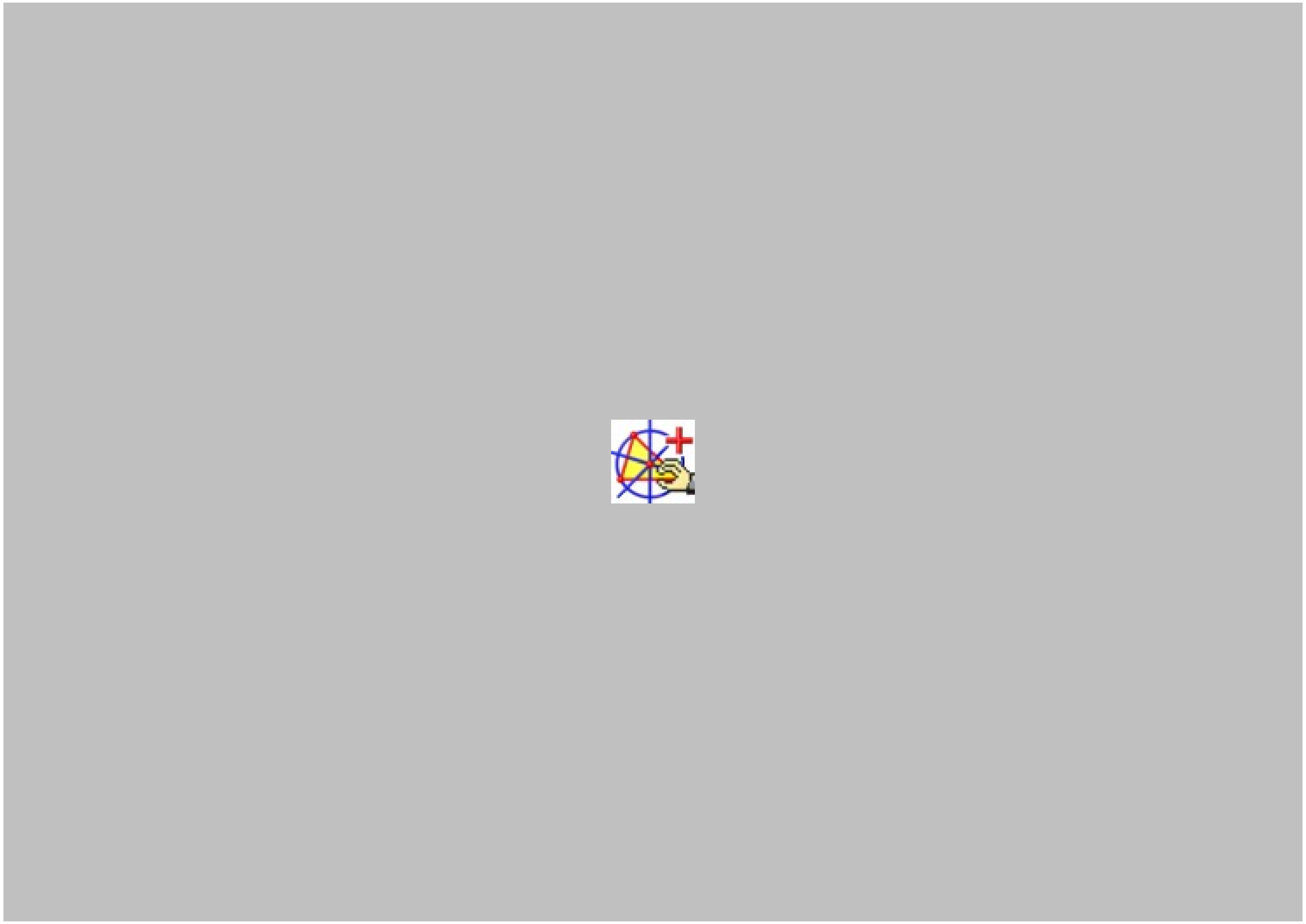
proste są równoległe.

Tak więc za pomocą tego twierdzenia można sprawdzić, czy dwie proste są równoległe.

Sprawdź, czy proste ***b, c*** i ***d*** na poniższym rysunku są równoległe? Czy na podstawie tych danych możesz stwierdzić, która prosta nie jest równoległa do pozostałych? Jeśli tak, to która? **(03)**



A teraz podobna konstrukcja, ale tym razem będziesz badał długości innych odcinków.

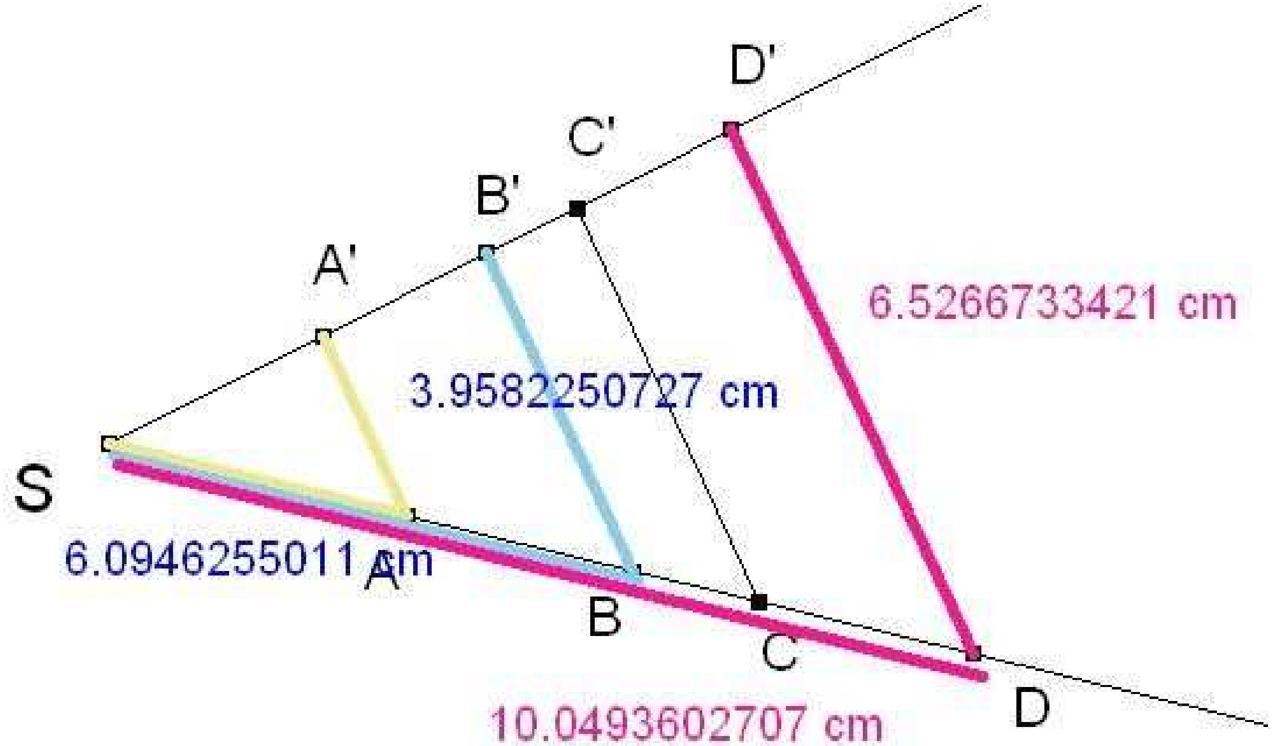


Wprowadźmy kalkulator CABRI.
On ułatwi Ci dostrzeżenie ważnych faktów.

Spróbuj i tym razem odkryć pewną hipotezę.
Wyślij ją również swojemu nauczycielowi **(04)**

Zauważyłeś prawdopodobnie, że zachowane są też inne proporcje długości odcinków, niż te, które poznałeś w twierdzeniu Talesa:

$$\frac{SB}{BB'} = \frac{SD}{DD'}$$



SB / BB' = 1.5397369753
SD / DD' = 1.5397369753

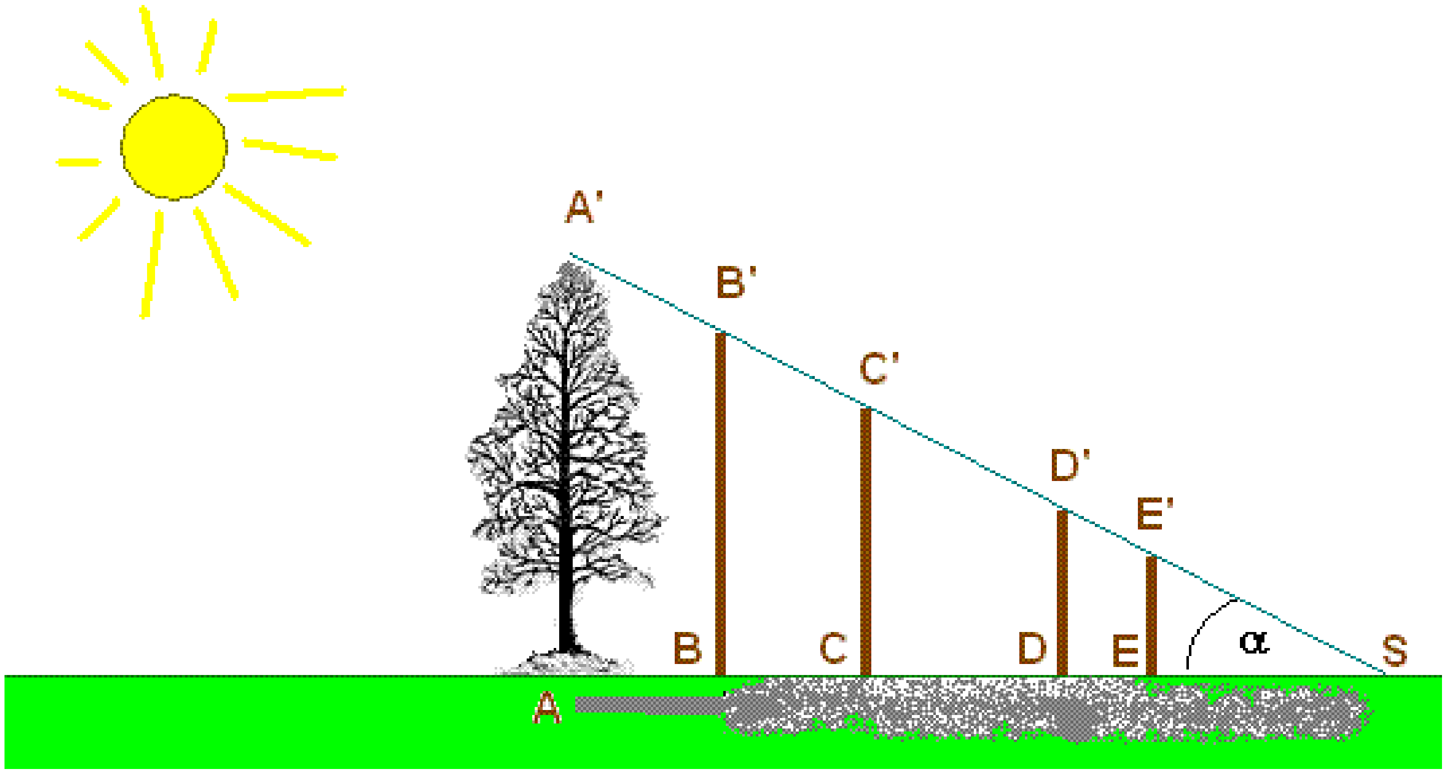
Spójrz na kształty trójkątów ***SBB'*** i ***SDD'*** – ich rozmiar i ich kąty. Potem dowiesz się, jakie przekształcenie geometryczne pozwala z jednego trójkąta uzyskać drugi.

Zauważ też, że kąty w tych trójkątach mają te same miary. Dlaczego? **(05)**

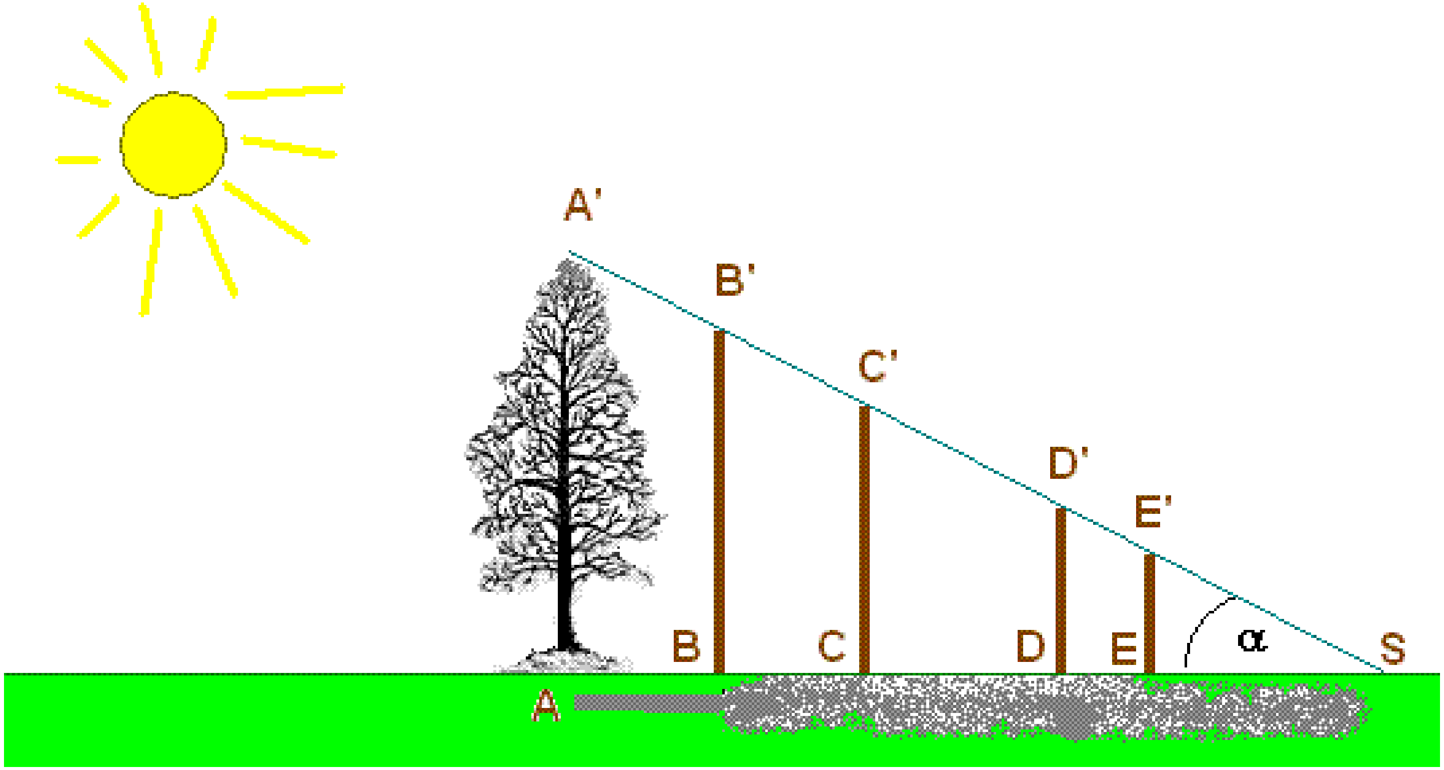
Wróćmy do mierzenia wysokości drzewa.

Odkryte przed chwilą przez Ciebie twierdzenie oznacza dokładnie to samo, co przedstawia poniższy rysunek:

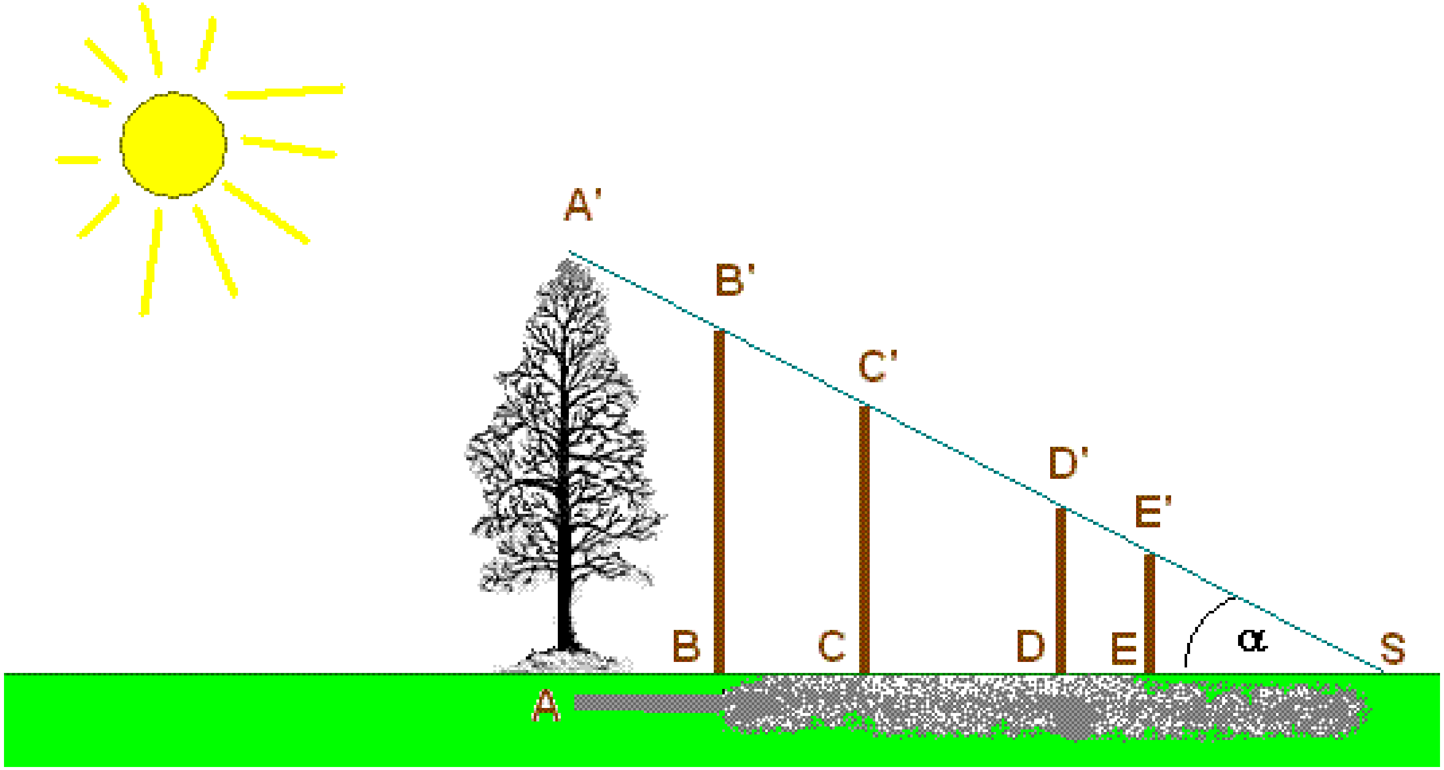
$$\frac{AA'}{AS} = \frac{BB'}{BS} = \ldots = \frac{EE'}{ES}$$



Oznacza to, że stosunek długości odcinka ***AA'*** do długości odcinka ***AS*** jest taki sam, jak na przykład stosunek długości odcinka ***CC'*** do długości odcinka ***CS***, czy ***EE'*** do ***ES***.



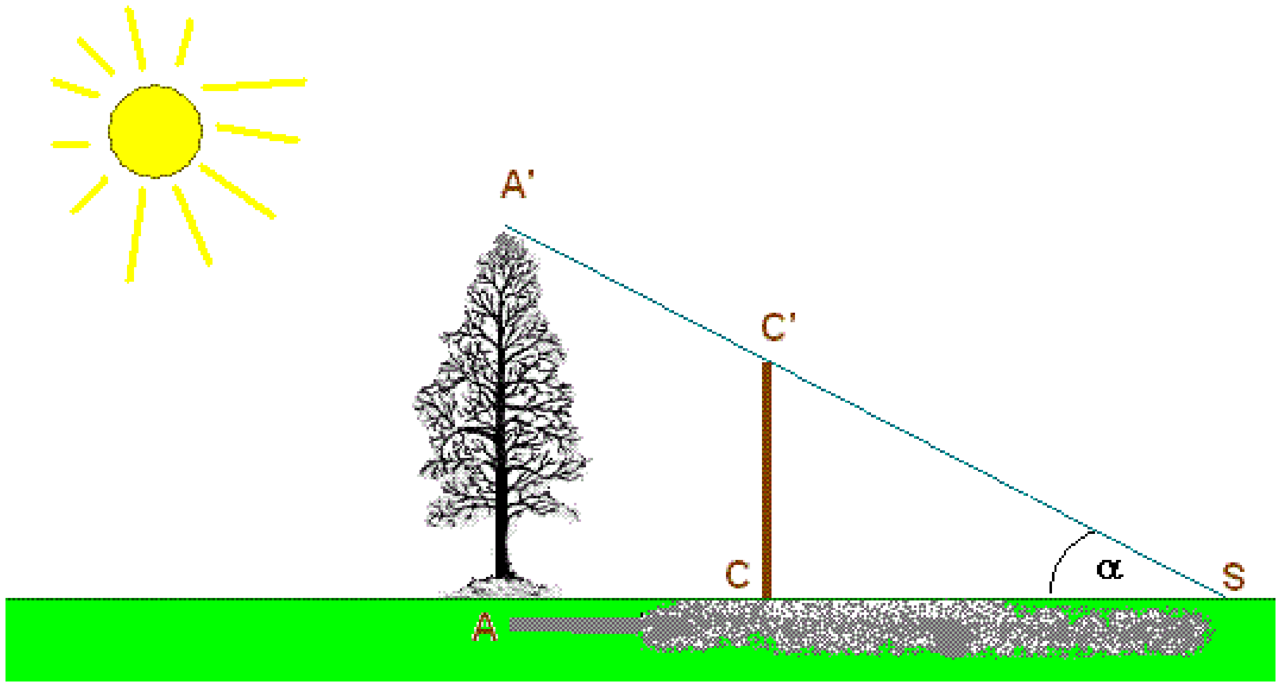
Podobnie możemy zapisać jeszcze inne proporcje długości odcinków. Wypisz wszystkie proporcje, które dostrzegasz na tym rysunku przy założeniu, że odcinki brązowego koloru są do siebie równoległe.



Równoległość i związana z nią proporcja długości odcinków jest wykorzystywana w różnych sytuacjach w geometrii i zadaniach geometrycznych, dlatego też warto dobrze przyswoić twierdzenie Talesa.

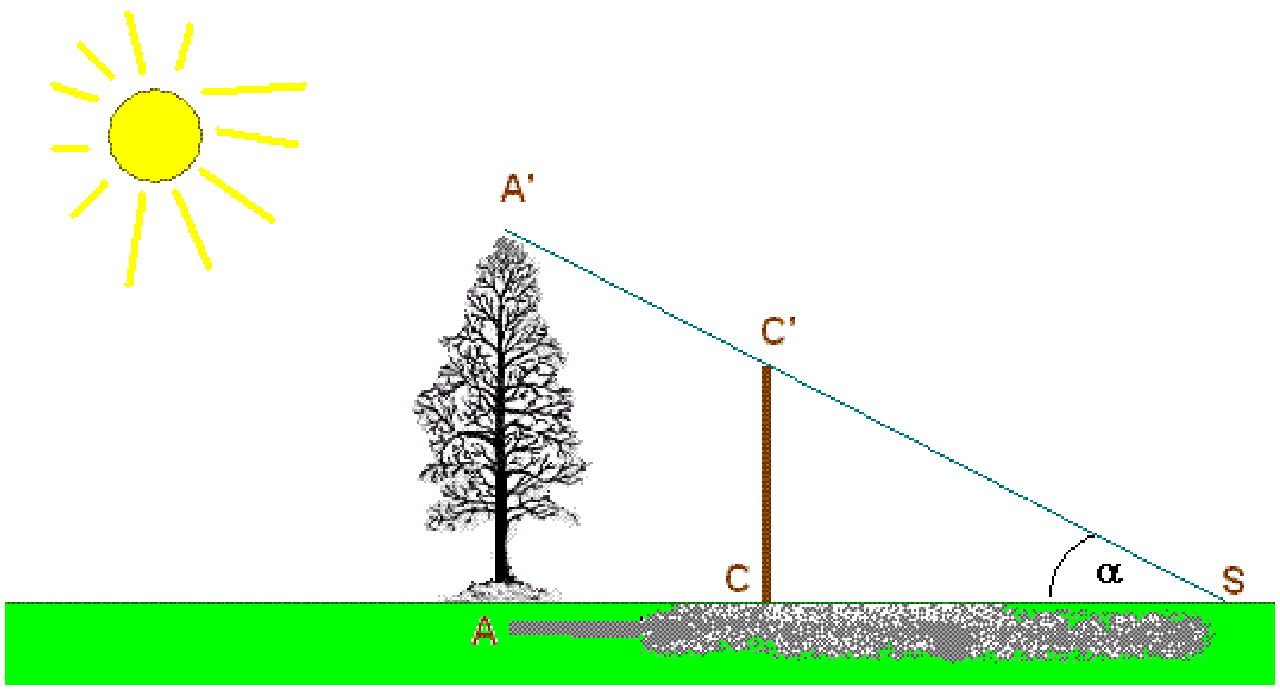
Można go np. wykorzystać do pomiaru niedostępnych wysokości lub szerokości.

W przypadku drzewa jego wysokość można obliczyć ustawiając równoległe do drzewa pręt o znanej długości tak, by koniec cienia drzewa pokrywał się z końcem cienia pręta.

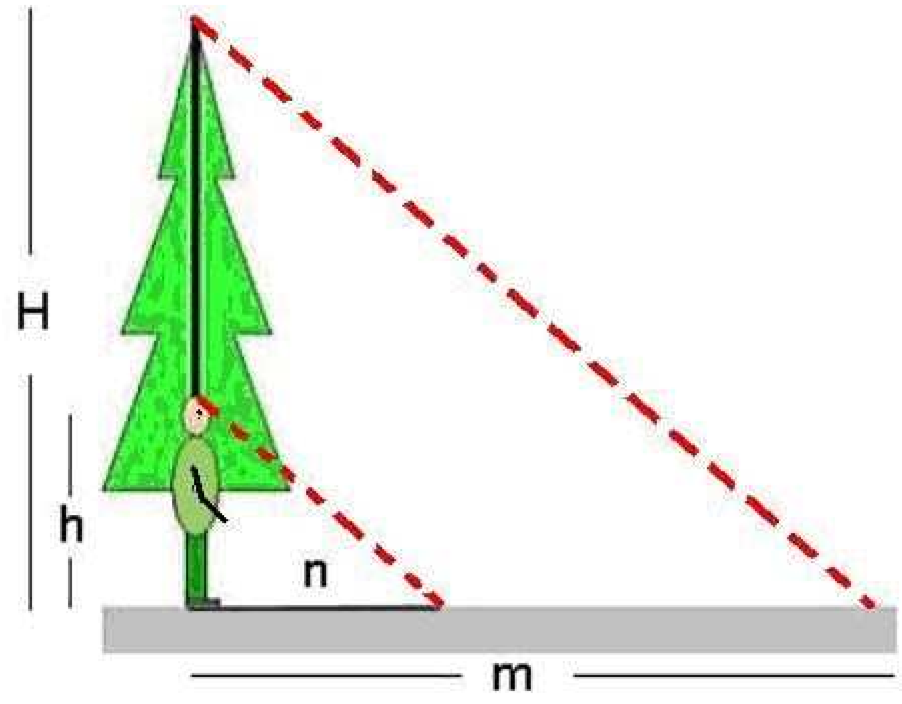


Wówczas stosunek wysokości drzewa do długości jego cienia jest równy stosunkowi długości pręta do długości jego cienia

Mamy więc proporcję: $\frac{AA'}{AS} = \frac{CC'}{CS}$ skąd $AA' = \frac{AS \cdot CC'}{CS}$

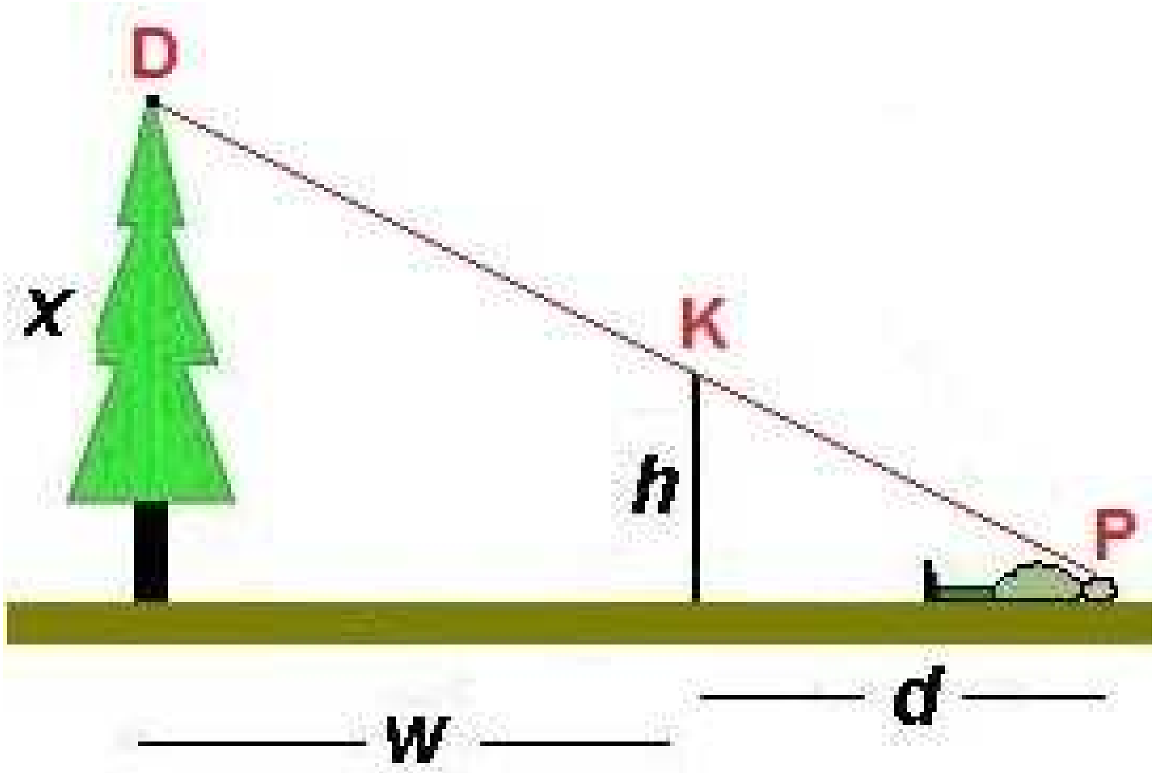


Jeśli nie masz możliwości znalezienie pręta, możesz wykorzystać znajomość swojego wzrostu. Wówczas stajesz obok drzewa tak, by słońce pozostawiło Twój cień obok cienia drzewa i mierzysz długości obu cieni – twojego i drzewa.
W przybliżeniu możesz założyć, że twoja wysokość wynosi 2 m. Napisz odpowiednią proporcję i wyznacz z niej wzór na wysokość drzewa. Prześlij ją swojemu nauczycielowi **(06)**



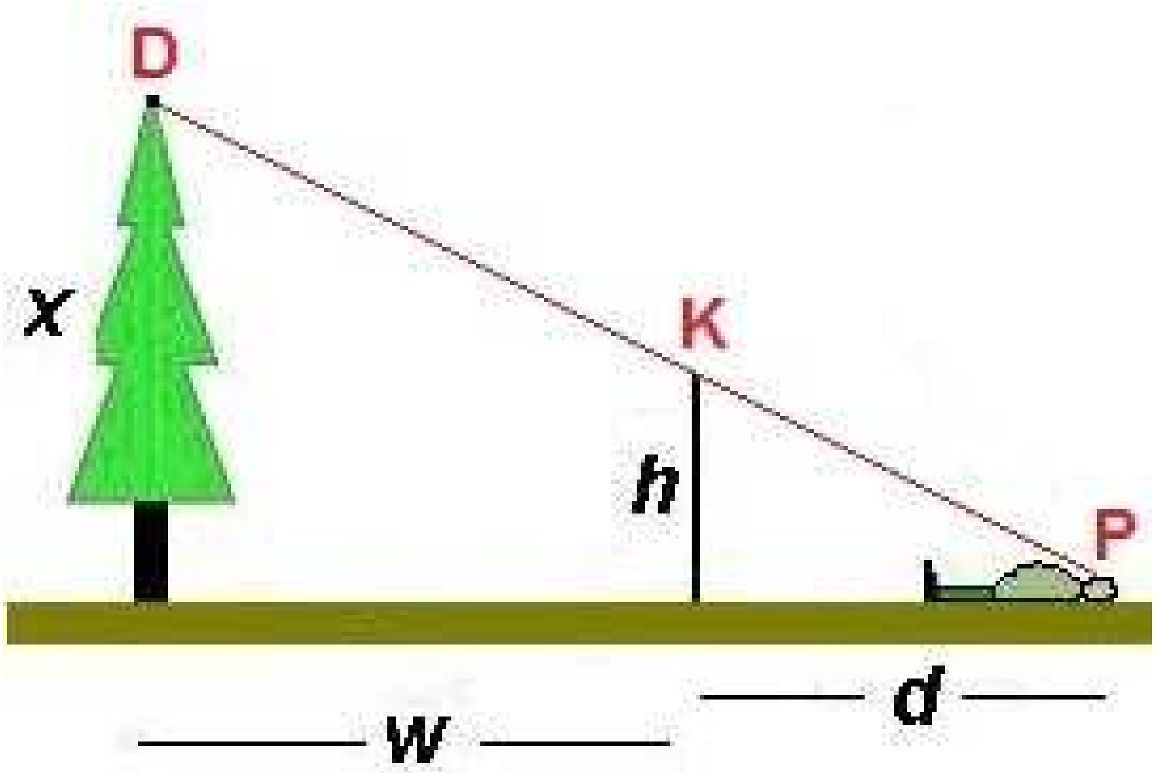
A co zrobić, gdy słońce przykryły chmury?

Wystarczy wówczas umieścić oko w takim punkcie ***P***, by linia łącząca czubek drzewa ***D*** z końcem ***K*** pręta przechodziła również przez punkt ***P***.



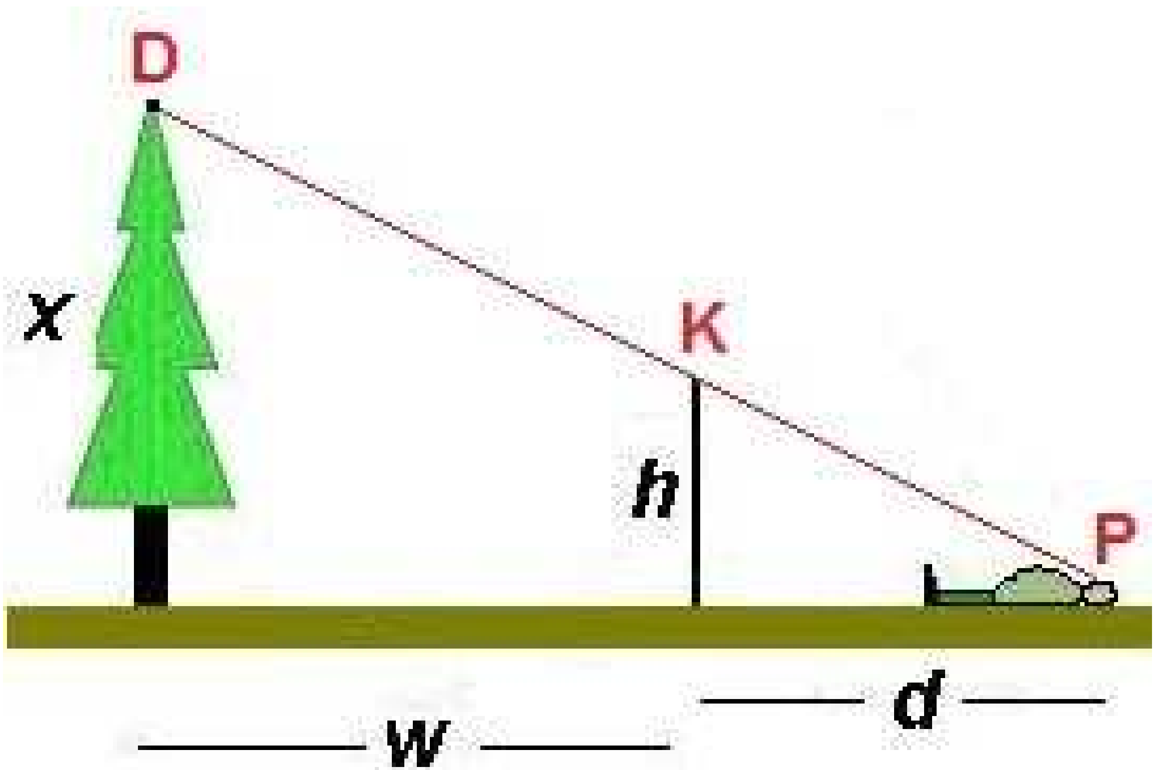
Wówczas układamy proporcję:

$$\frac{x}{w+d} = \frac{h}{d} \quad \text{skąd} \quad x = \frac{h\,(w+d)}{d}$$

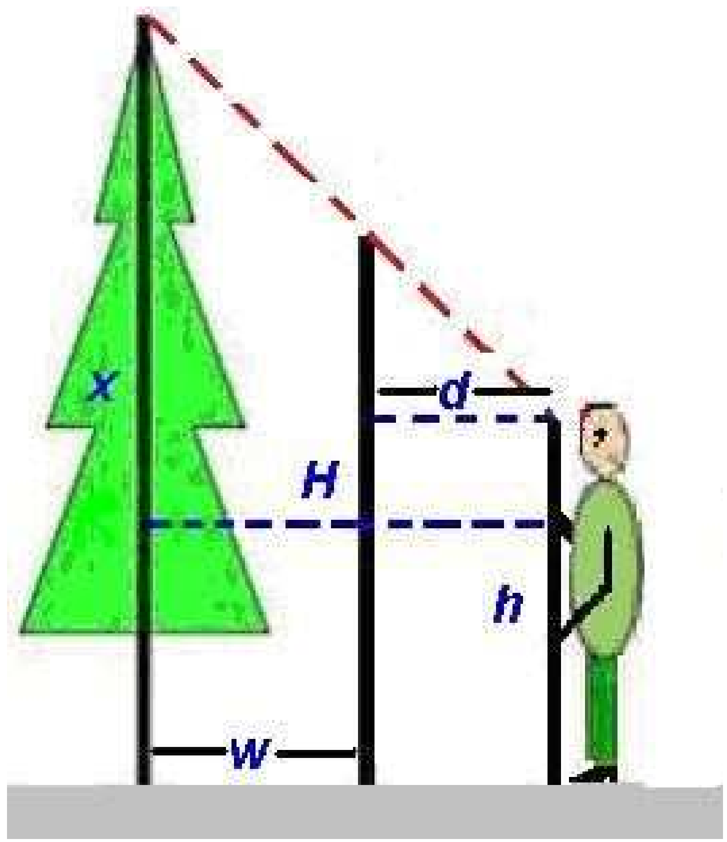


Jeśli pręt ma długość 1 m, wówczas wynik przyjmie prostszą postać:

$$x = \frac{w + d}{d}$$

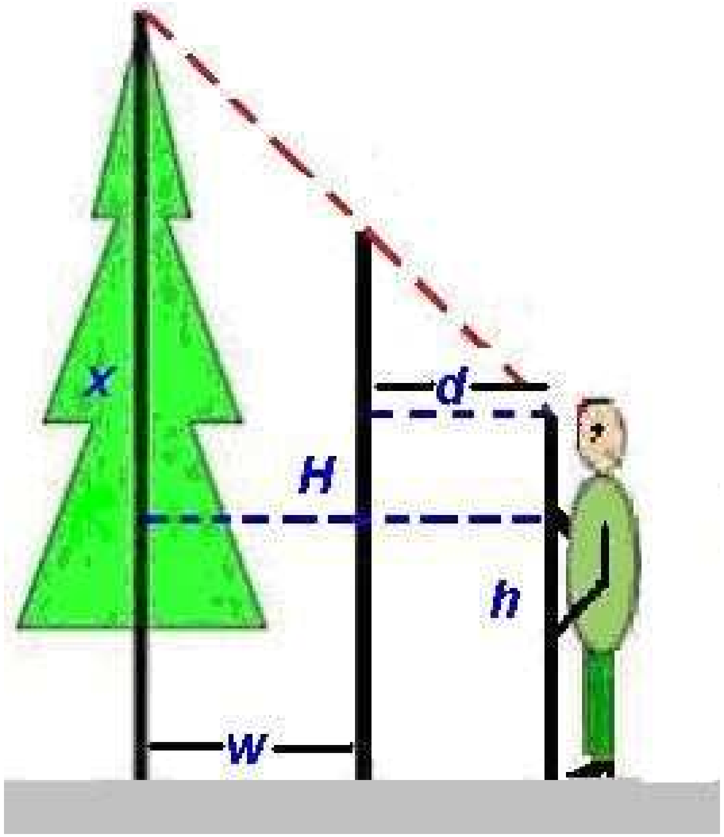


Jeśli jest deszczowo i nie masz możliwości położyć się na trawie, możesz wysokość drzewa wyznaczyć używając w tym celu dwóch prętów ustawionych pionowo tak, jak to przedstawia poniższy rysunek.



Oznaczmy długość krótszego pręta literą ***h***, a dłuższego ***H***, zaś wysokość drzewa jako ***x***.

Niech odległość między prętami wynosi ***d***, zaś między dłuższym prętem a drzewem ***w***.

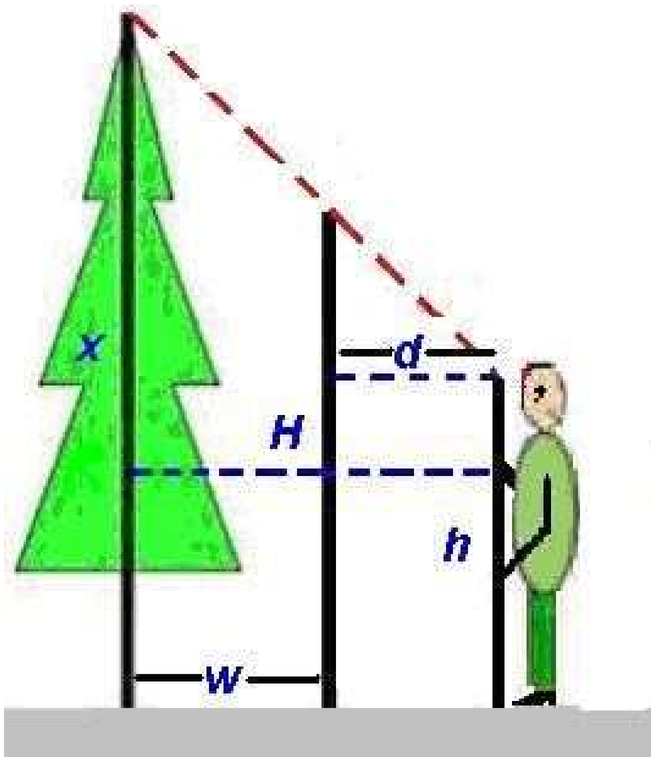


Wówczas zachodzą poniższe proporcje, z których można wyznaczyć wysokość ***x*** drzewa.

$$\frac{H-h}{d}=\frac{x-h}{w+d} \iff d\cdot(x-h)=(H-h)\cdot(w+d)$$

$$dx-dh=(H-h)\cdot(w+d)$$

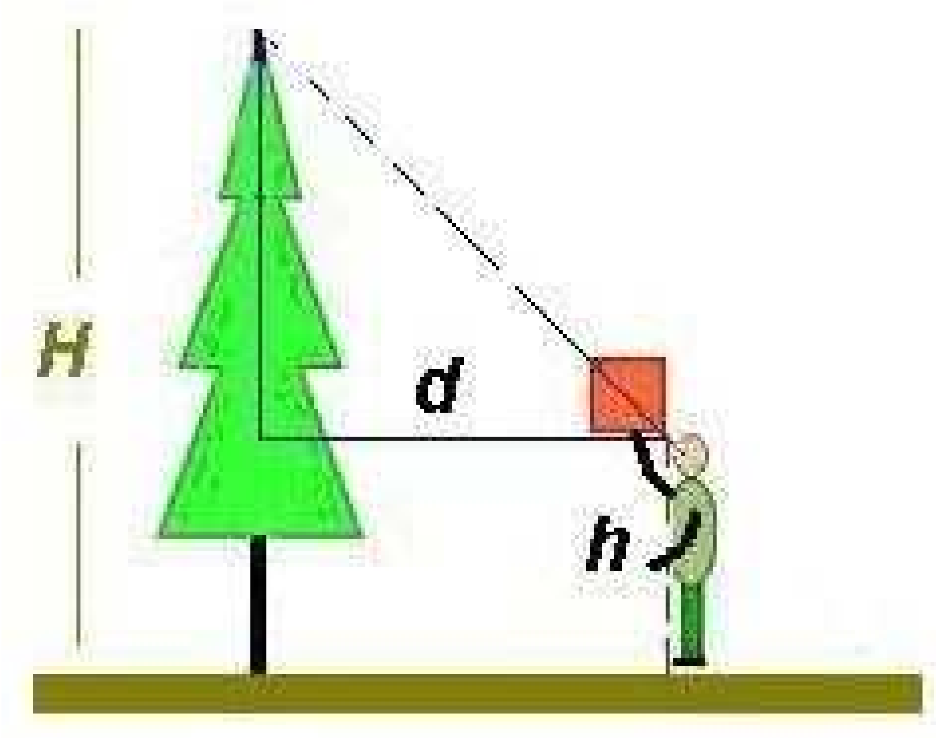
$$x=\frac{(H-h)\cdot(w+d)+dh}{d}$$



Być może jest Ci znany program komputerowy Google Sketh Up („szkic w górę”), który umożliwia w bardzo szybki sposób tworzyć modele wirtualne budynków, zamków i kościołów.

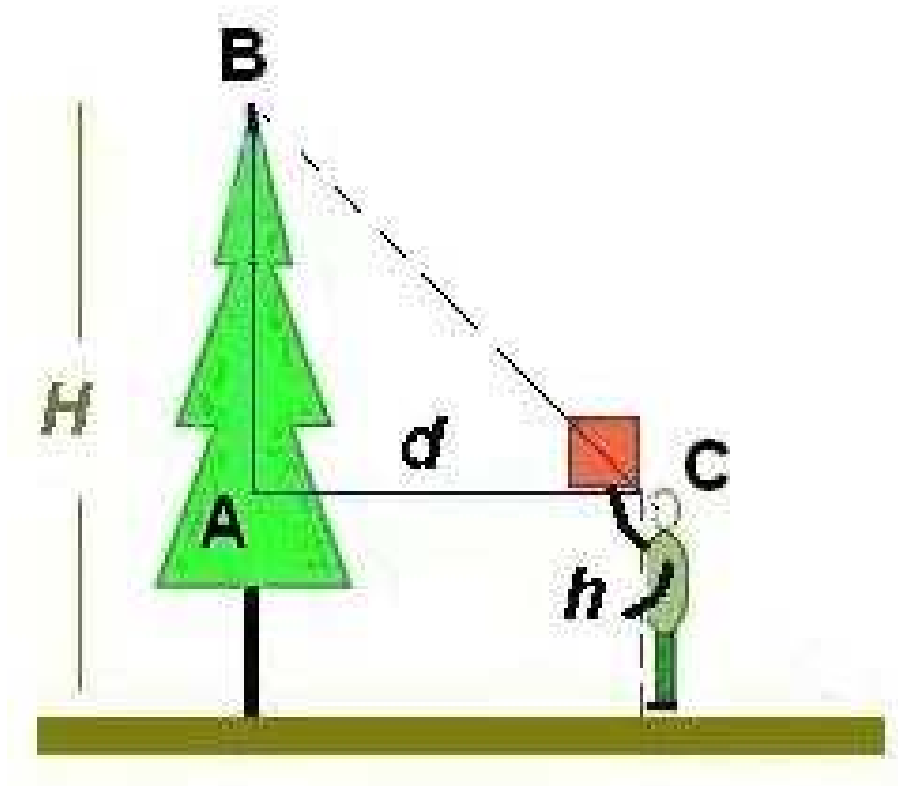
Jeśli zapragniesz w nim skonstruować dom,
w którym mieszkasz, to będziesz miał problem
z wyznaczeniem jego wysokości. Jest na to sprytny sposób,
wykorzystujący twierdzenie Talesa.

Zbuduj z kawałka plastiku lub drzewa tzw. kwadrant - kwadrat, którego przekątna jak wiadomo jest nachylona pod kątem 45° do boku kwadratu.
Przyłóż ten kwadrant do swoich oczu i tak go ułóż, by w linii zawierającej przekątna tego kwadrantu znajdował się czubek drzewa, budynku lub innego przedmiotu, którego wysokość chcesz wyznaczyć.



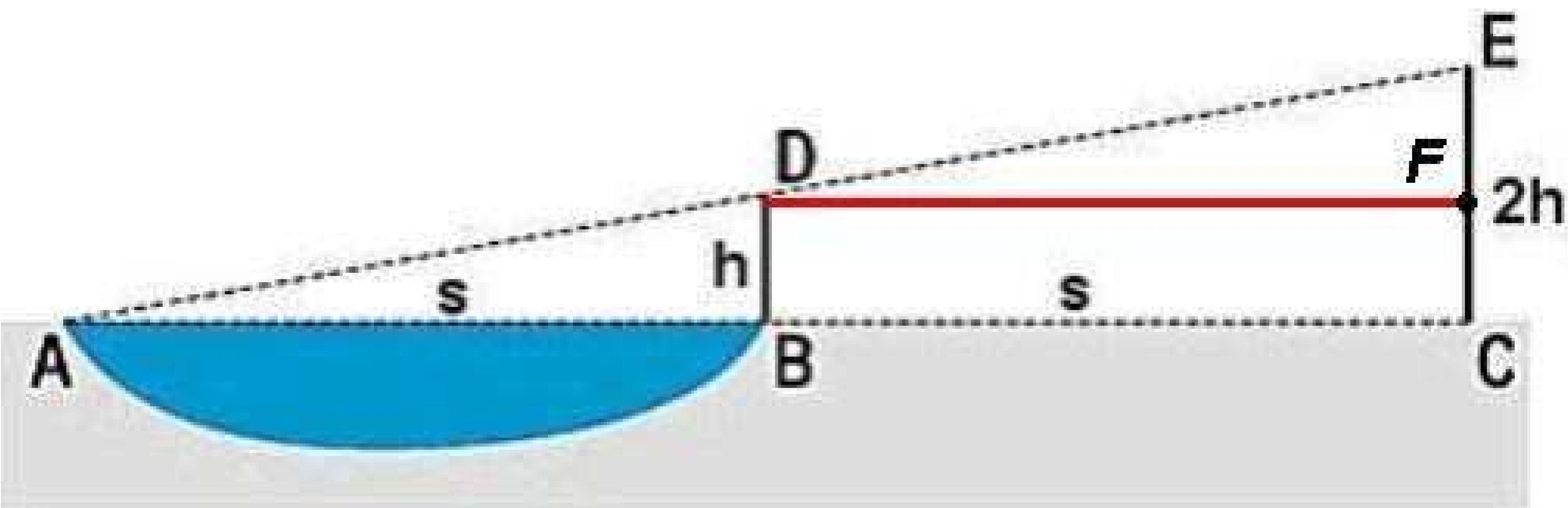
Zauważ, że trójkąt ***ABC*** jest równoramienny, czyli ***AB = AC***. Stąd więc ***BA = d***, zatem wysokość drzewa to suma długości ***d*** i Twojego wzrostu ***h***.

Wysokość drzewa wynosi więc ***H = d + h.***



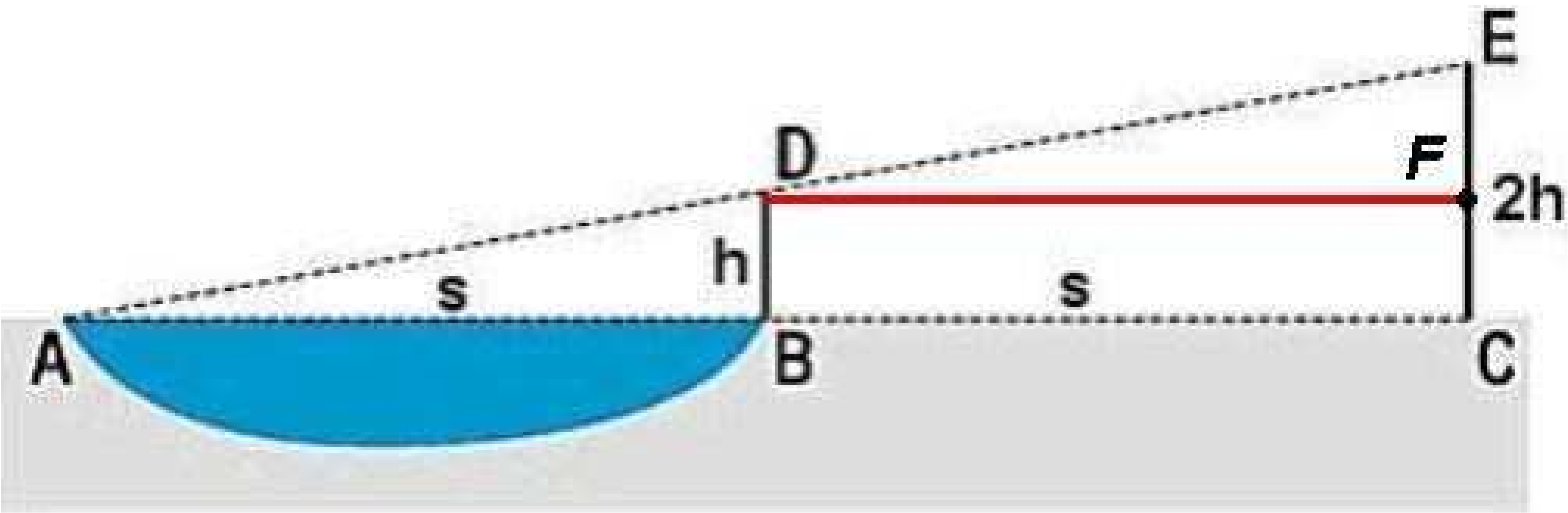
Podobnie możemy zmierzyć szerokość rzeki, dla której chcemy przełożyć kładkę łączącą jej brzegi.

W tym wypadku równoległe odcinki utworzą nam dwa pręty **BD** i **CE** ułożone pionowo do lustra wody.



Najlepiej będzie, gdy długość dłuższego z nich będzie dwukrotnością krótszego.

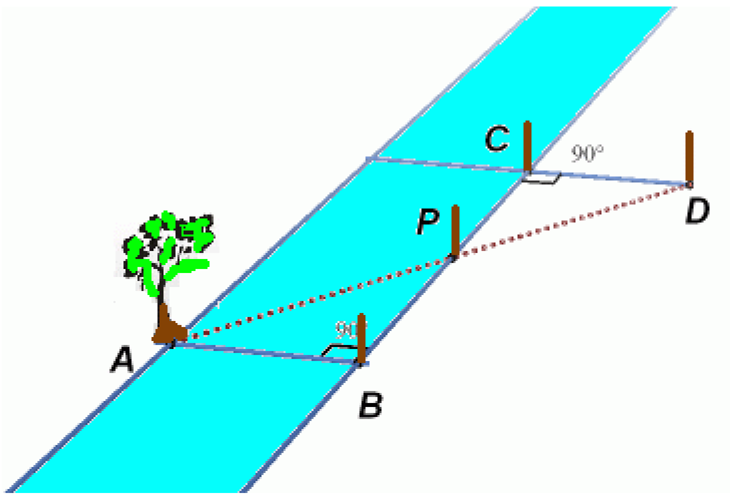
Ustawiamy krótszy na brzegu rzeki, a dłuższy przesuwamy tak długo, aż punkty ***A***, ***D*** i ***E*** ułożą się na jednej prostej.

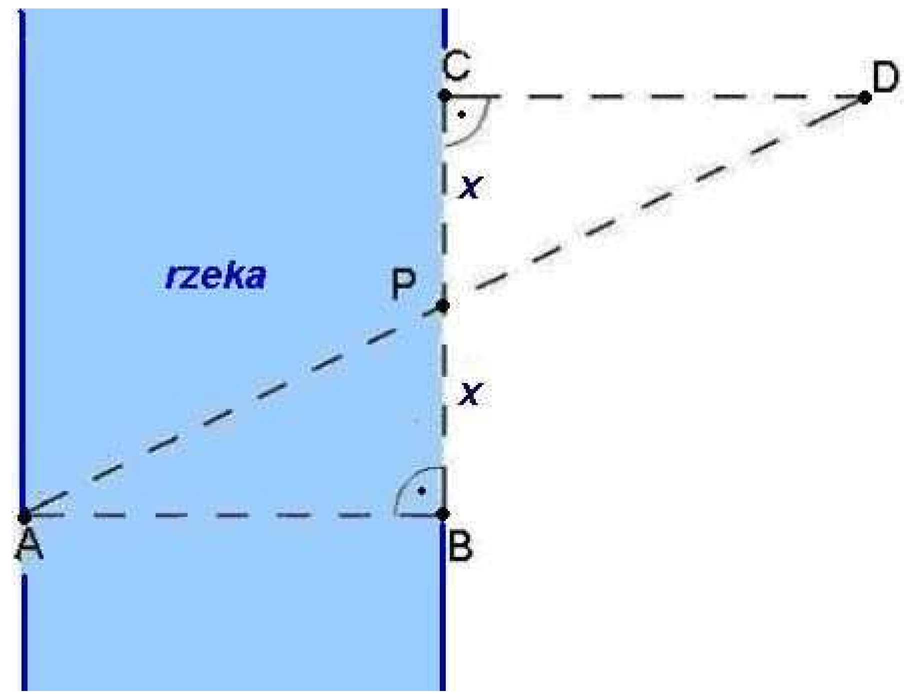


Ułóż proporcję, która umożliwi w ten sposób wyznaczenie szerokości ***s*** rzeki **(07).**

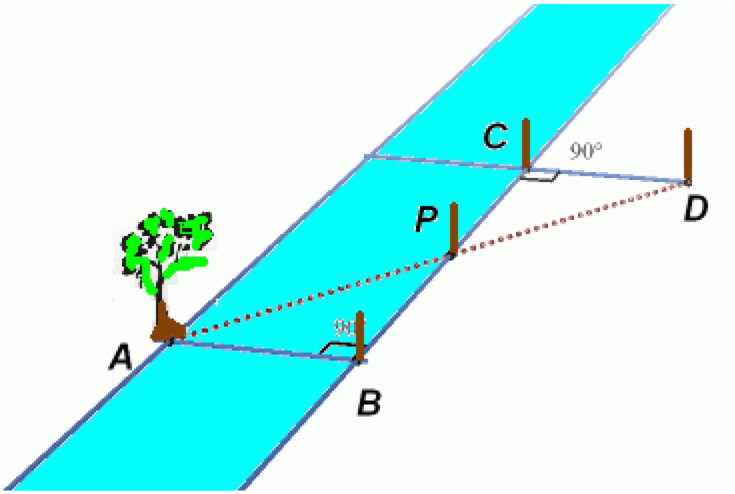
Prześlij ją swojemu nauczycielowi na platformę e-learningową.

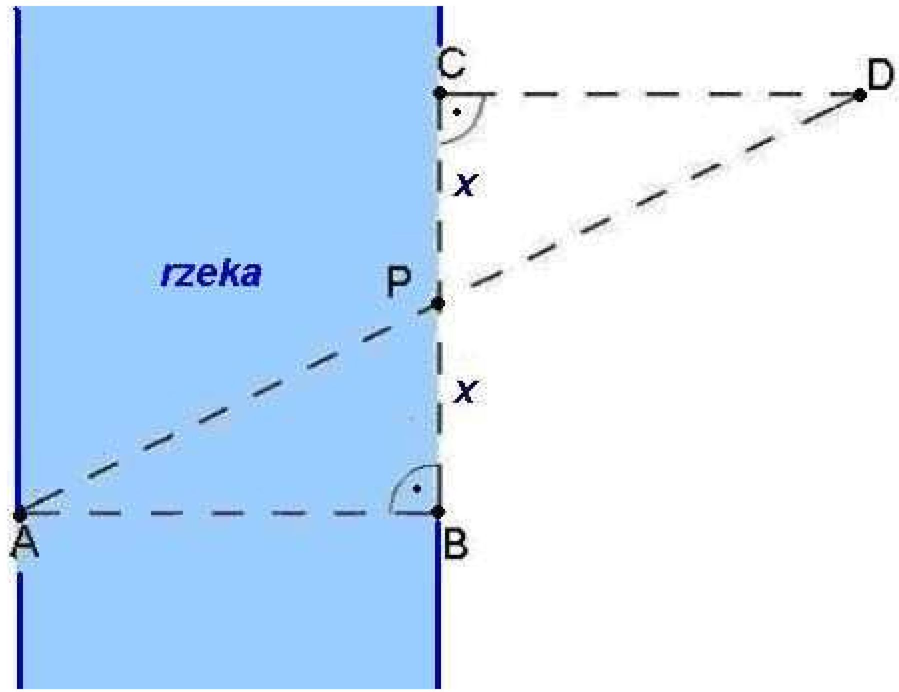
Szerokość tej samej rzeki można wyznaczyć jeszcze inną metodą – patrz na rysunki poniżej.



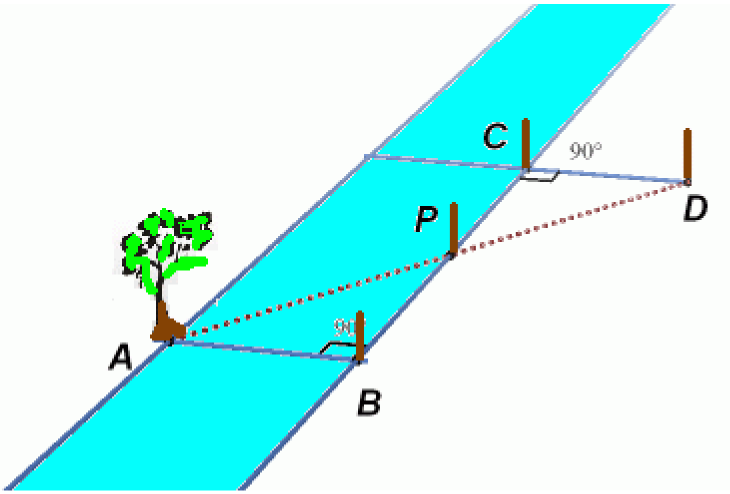


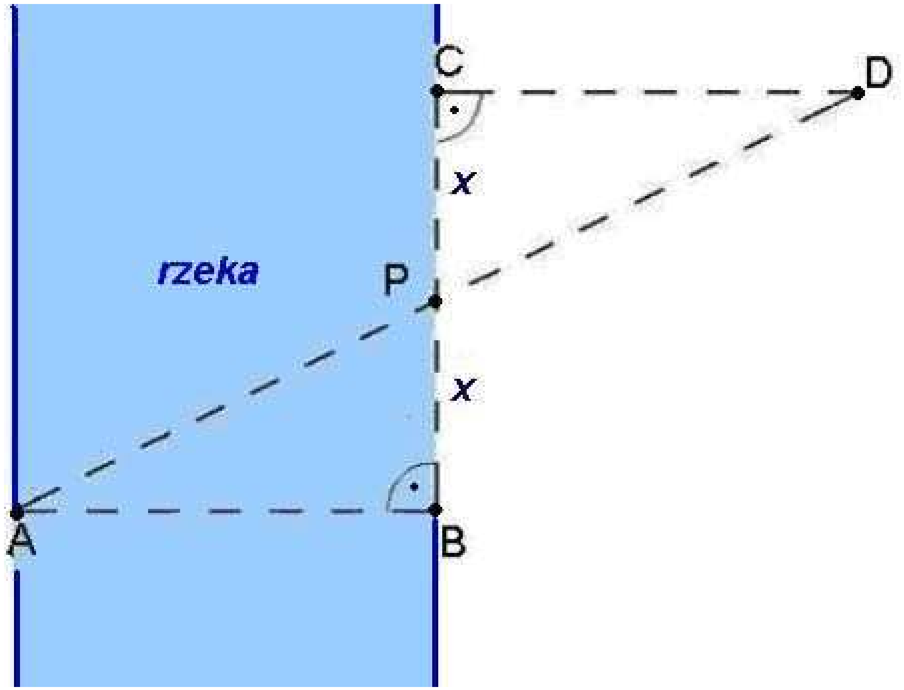
„Pas” rzeki nie jest dla nas dostępny, ale możemy go odbić w symetrii względem jego brzegu tak, by obraz tej rzeki znalazł się w dostępnym miejscu na jej suchym brzegu.



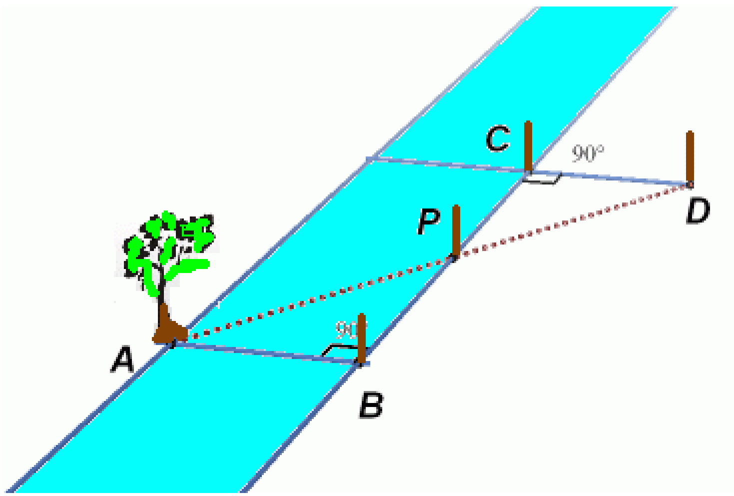


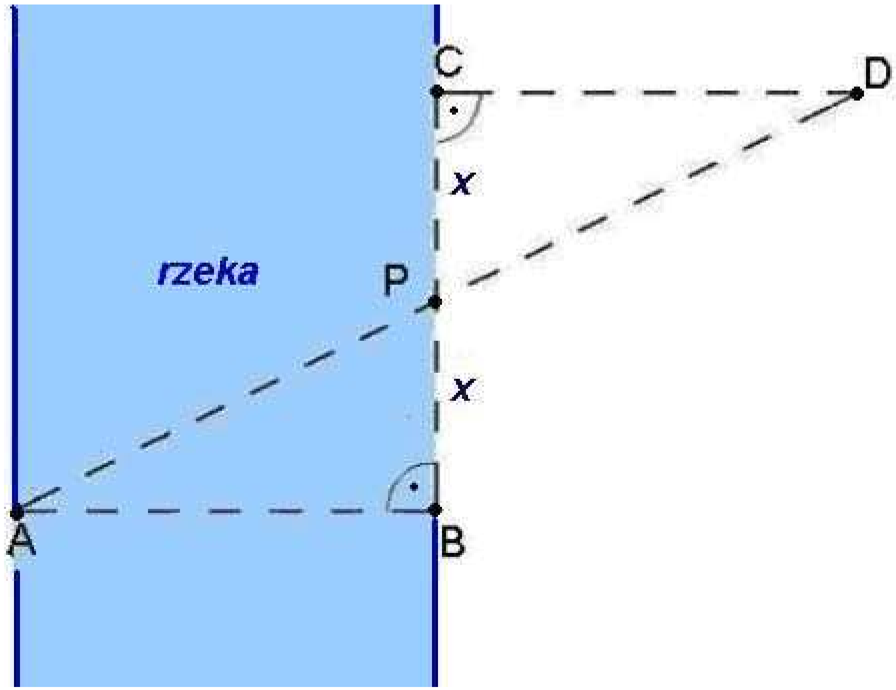
Trójkąt ***ABP*** w symetrii środkowej przekształca na trójkąt ***DCP***. Wówczas szerokość rzeki odczytamy mierząc odległość ***DC*** punktu ***D*** od brzegu rzeki.





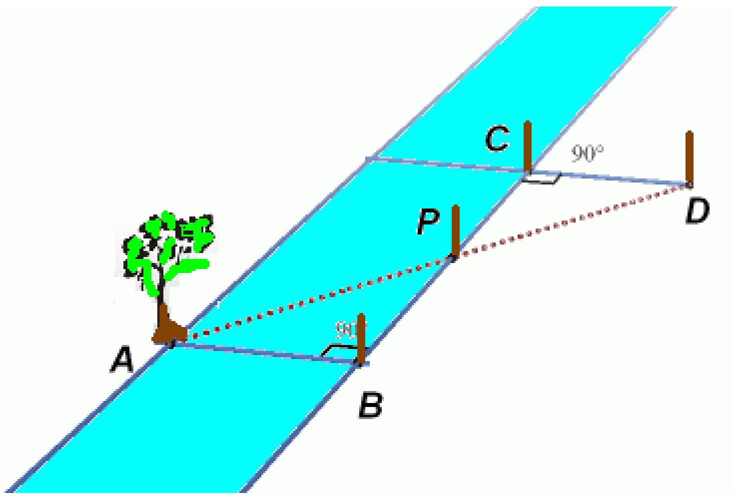
Problem w tym, gdzie umieścić punkt ***D***?
W tym celu ustalamy dowolnie punkt ***B*** i poszukujemy na drugim brzegu rzeki jakiś charakterystyczny punkt ***A*** tak, by odcinek ***AB*** był prostopadły do brzegu rzeki.

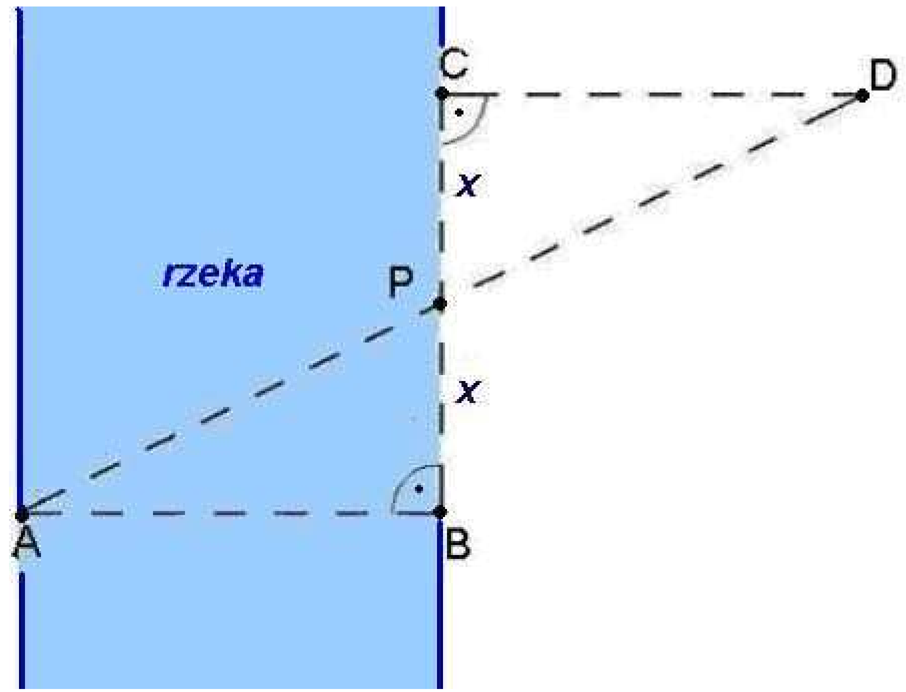




Wbijamy w punkcie ***B*** pręt a drugi pręt ***D*** wbijamy tak, by punkty ***A***, ***P*** i ***D*** leżały w jednej linii. Mamy wtedy gwarancję, że trójkąty ***ABP*** i ***DCP*** są przystające.

Szerokość rzeki to długość odcinka ***CD***.





KONSTRUKCJE ODCINKÓW O NIETYPOWYCH DŁUGOŚCIACH

Umówmy się, że pewien odcinek ma długość równą 1. Nazywamy go wówczas jednostkowym. Nie jest wówczas ważne, czy mierzymy go w centymetrach czy w innych jednostkach miary. Rozwiążmy zadanie:

Zadanie 1:

Dla danego odcinka ***a*** i odcinka jednostkowego ***i*** skonstruuj odcinek ***x*** , którego długość wynosi a^2 .

Zauważ, że z proporcji: $\frac{a}{1} = \frac{x}{a}$ wynika, iż $x = a^2$

To jest właśnie klucz do rozwiązania tego zadania.

Przypatrz się na poniższy aplet i sprawdź, czy poprawnie jest wykonana konstrukcja odcinka ***x.***

Możesz zmieniać długość odcinków ***i*** oraz ***a***.

Obserwuj, jak zmienia się wówczas wielkość **a*a** czyli ***x=a²***.

Przypatrz się uważnie tej konstrukcji i spróbuj opisać jej kolejne etapy. **(08)**

Zauważ, że w konstrukcji ważna jest kolejność ułożenia odcinków. Najpierw muszą być umieszczone te odcinki, które są znane, a na końcu utworzy się ten odcinek, który mamy skonstruować.

Na podstawie poniższego apletu, który opisuje kolejne kroki konstrukcji zrób opis tej konstrukcji i prześlij go swojemu nauczycielowi. **(09)**

Prześledź kolejne etapy konstrukcji wciskając kolejne przyciski 1- 6.

A teraz spróbujmy rozwiązać kolejne zadanie konstrukcyjne:

Zadanie 2
Dla danego odcinka jednostkowego ***i*** oraz odcinka ***a*** skonstruuj odcinek ***x*** o długości ***1/a***.

Od jakiej proporcji powinieneś rozpocząć, aby z niej wyznaczyć wielkość ***1/a***?

Zauważ, że:

$$x = \frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a}}{1}$$

Można zapisać odwrotność tej proporcji:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{\frac{1}{a}}$$

Z niej wynika kolejność czynności konstrukcyjnych:

a/ ostatnim odcinkiem musi być odcinek ***1/a***

b/ wcześniej muszą być wykreślone odpowiednio odcinki:

dwukrotnie ***1***, oraz ***a***.

Który należy wykreślić pierwszy i na której półprostej?

Z proporcji $\frac{a}{1} = \frac{1}{\frac{1}{a}}$ wynika, że jeśli położymy odcinek ***a*** na osi poziomej, wówczas na osi pionowej musimy odłożyć odcinek 1.

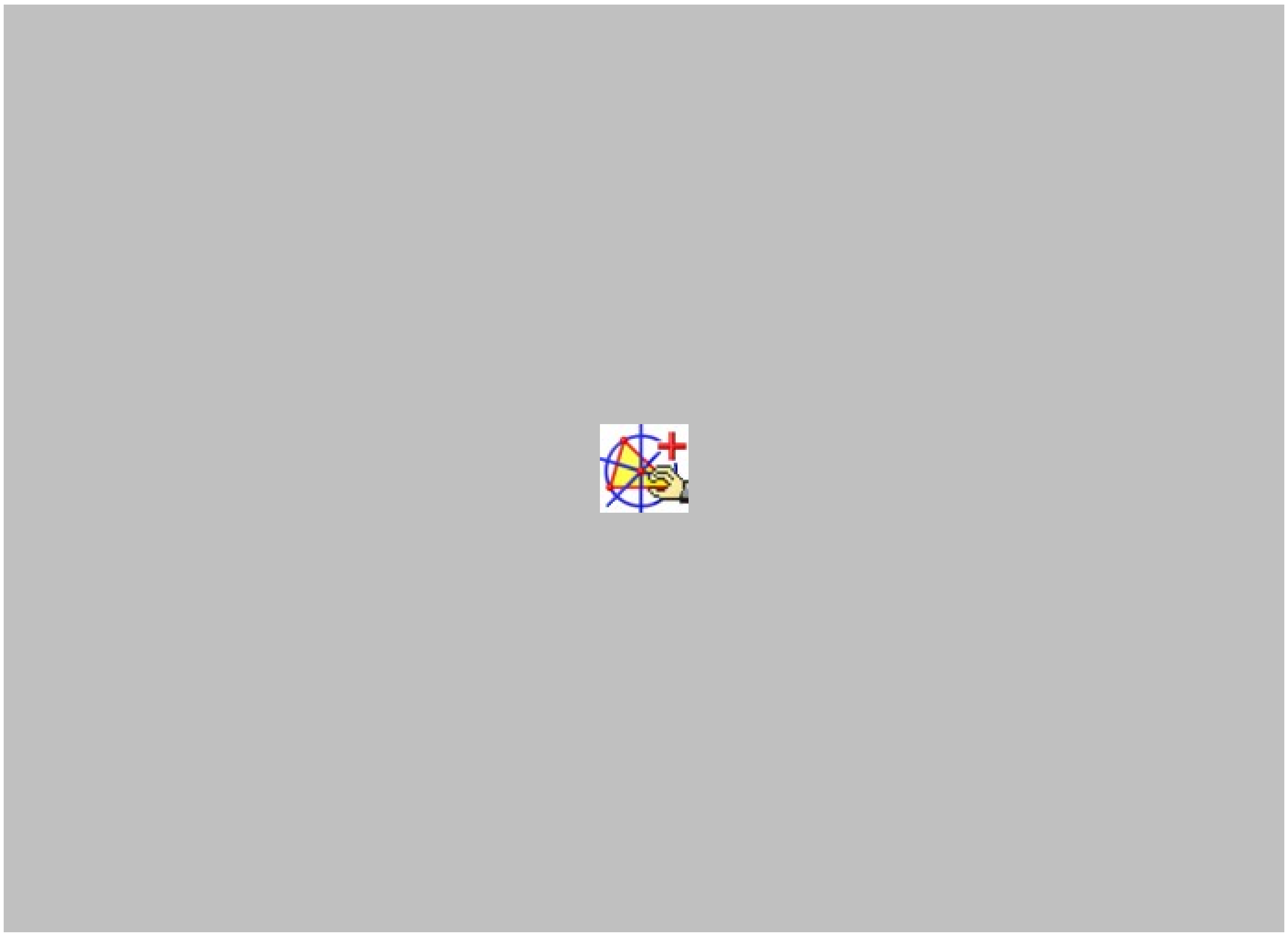
Co dalej?

Zakończ samodzielnie tę konstrukcję i opisz ją **(10)**

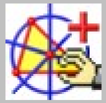
Gdybyś miał problemy z tą konstrukcją, to poniżej znajduje się rozwiązanie zadania 2:

Teraz przystąpimy do konstrukcji, która pozwoli rozwiązać kilka problemów z fizyki i statystyki.

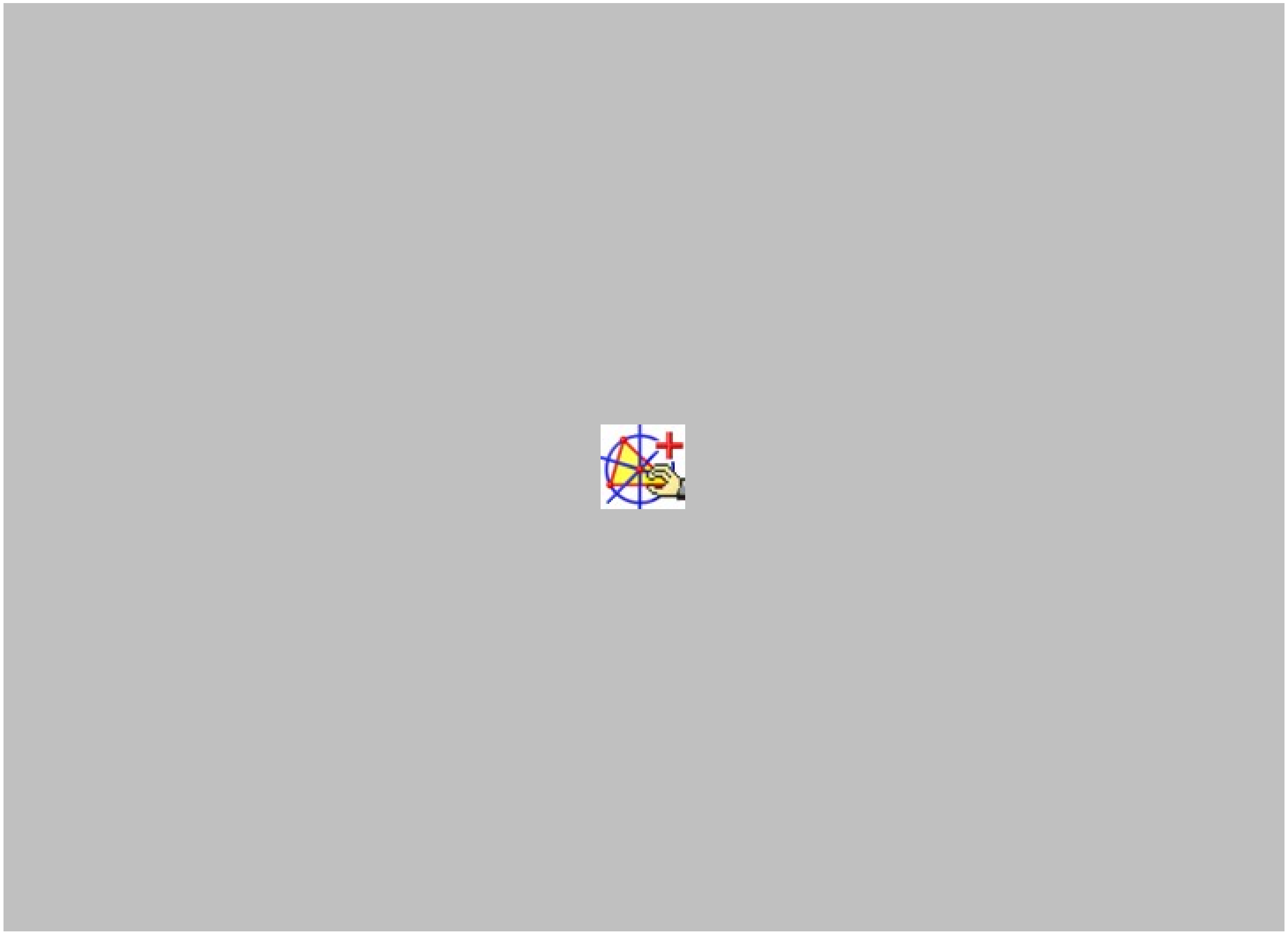
Rozpoczniemy od kilku czynności, których efektu na razie nie da się przewidzieć.
Śledź kolejne kroki tej konstrukcji, a jeśli nauczyciel zażąda jej opisu, to go wykonaj i wyślij na platformę. **(11)**



Poruszaj punktami ***A*** i ***B*** i obserwuj, czy wielkość odcinka ***XX'*** zmienia się, czy pozostaje stała?



A teraz poruszaj punktami ***A'*** i ***B'***. Czy teraz wielkość odcinka ***XX'*** zmienia się, czy pozostaje stała?



Ustal, czy wielkość odcinka ***XX'*** jest funkcją:

1/ wielkości odcinków ***AA'*** i ***BB'***
2/ odległości ***AB***?

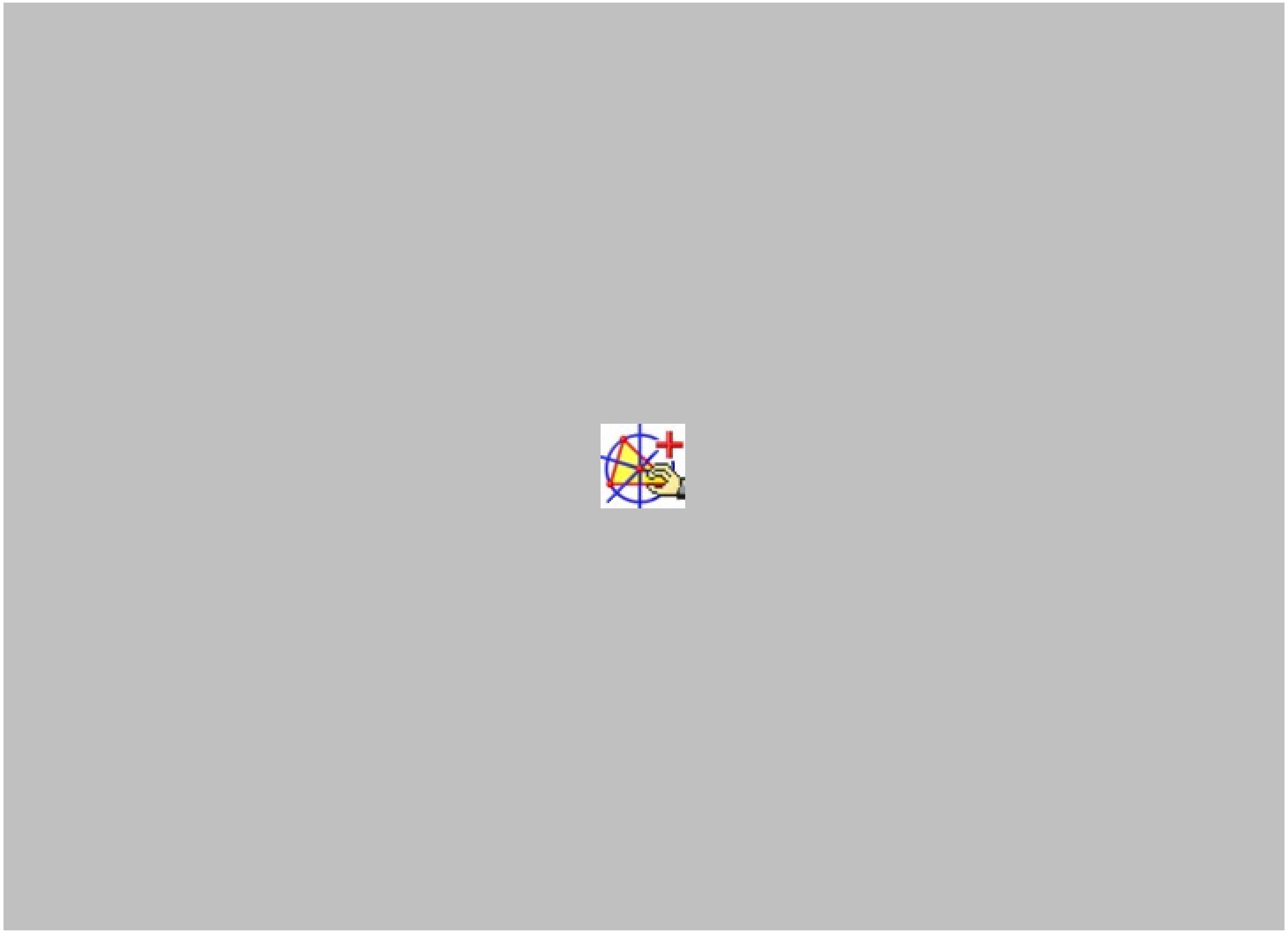
Oznaczmy: ***AA'*** = ***a*** , ***BB'*** = ***b***, ***XX'*** = ***x***

Zauważ, że wielkość ***x*** zależy tylko od wielkości ***a*** i ***b***.

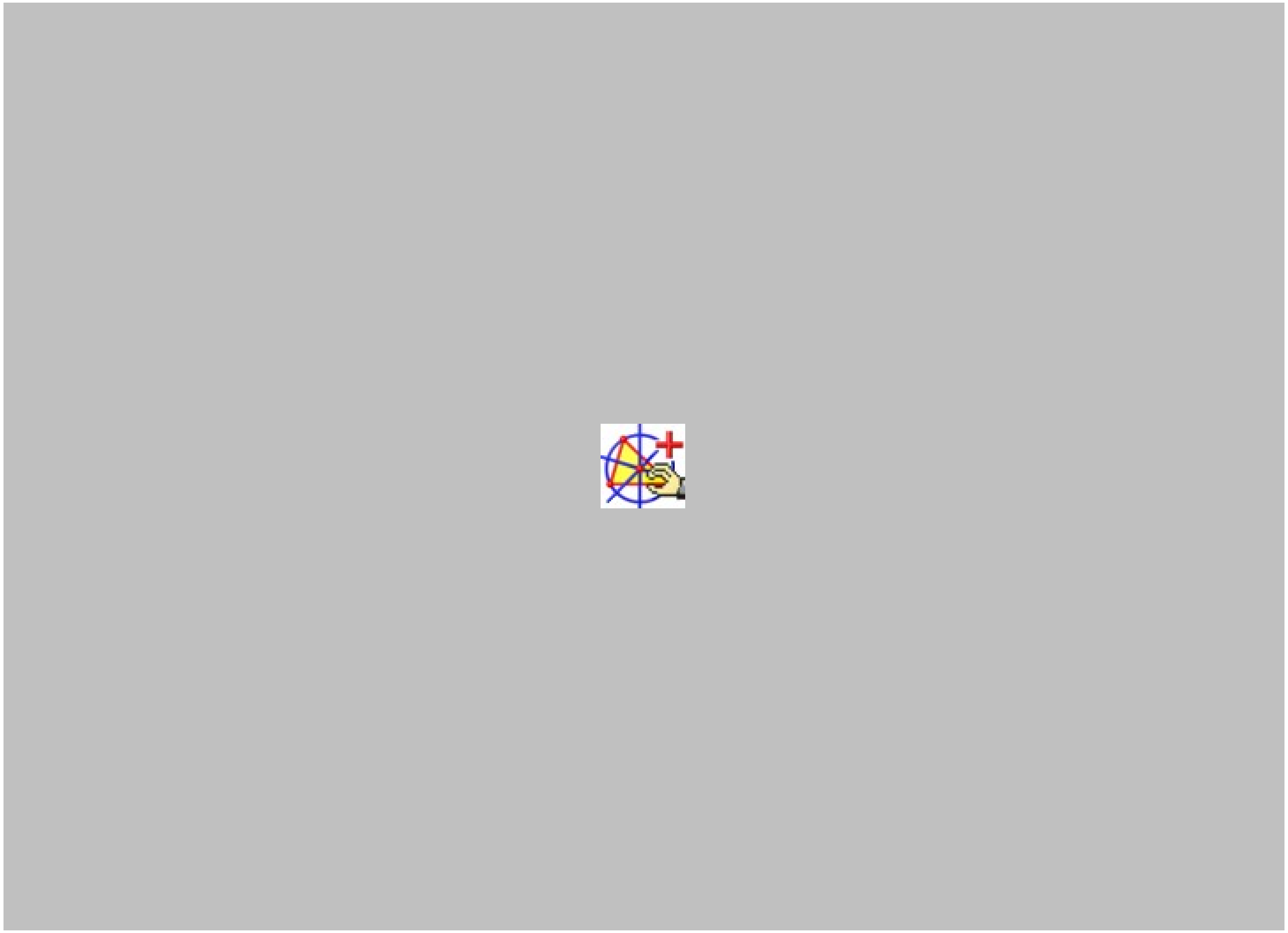
Jest więc ich funkcją.

Jakim wzorem wyraża się ta funkcja? **(12)**
Prześlij go nauczycielowi.

Będziesz mógł odkryć samodzielnie tę zależność, gdyż teraz program odczyta wielkości ***a***, ***b*** i ***x***.



W tym celu ustawiaj tak położenie punktów ***A’*** i ***B’*** tak, byś mógł dla wartości ***a*** i ***b*** wypełnić ostatnią kolumnę wartości ***x*** tabeli, zamieszczonej w kolejnym slajdzie.



Uzupełnij ostatnią kolumnę tabeli i prześlij wyniki swojemu nauczycielowi **(13).**

wielkość *a*	wielkość *b*	wielkość *x*
4 cm	6 cm	
5 cm	5 cm	
2 cm	6 cm	
6 cm	6 cm	

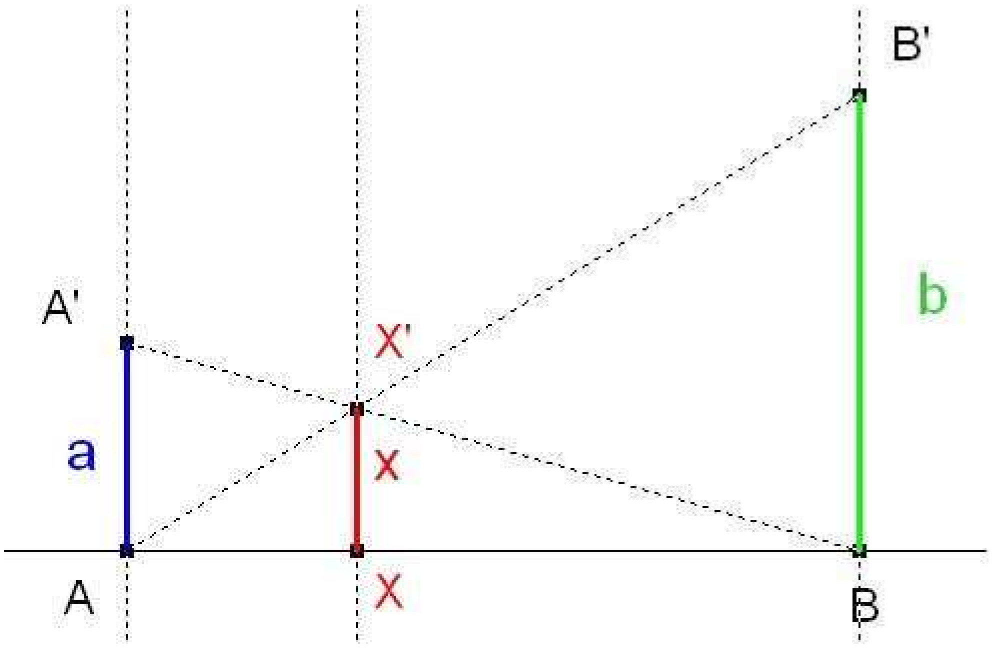
Jeśli jeszcze nie udało Ci się odnaleźć zależności ***x*** od ***a*** i ***b***, spróbuj za każdym razem obliczać sumę ***a+b*** oraz iloczyn ***a·b*** i porównuj je z wartością ***x.***

Co zauważyłeś?

Odpowiedź na to pytanie prześlij nauczycielowi. **(14)**

Jeśli odkryłeś już zależność ***x = f(a,b)***
to spróbujemy ją teraz udowodnić.

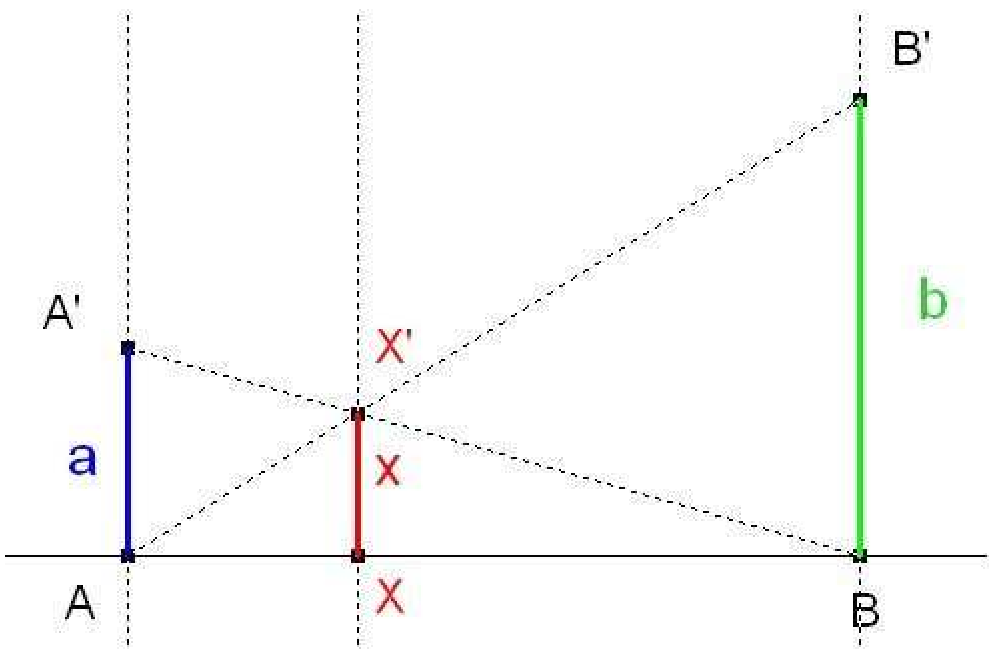
Wykorzystamy do tego celu twierdzenie Talesa.



w trójkącie ABA': $\frac{AA'}{AB} = \frac{XX'}{XB}$

Dlaczego?

w trójkącie ABB': $\frac{BB'}{AB} = \frac{XX'}{AX}$



Stąd $BX = \frac{AB \cdot XX'}{AA'} = \frac{AB \cdot x}{a}$ $AX = \frac{AB \cdot XX'}{BB'} = \frac{AB \cdot x}{b}$

dodając stronami te równości otrzymamy

$$AX + BX = AB\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b}\right)$$

czyli

$$AB = AB\left(\frac{x}{a} + \frac{x}{b}\right) \iff 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Tak więc twierdzenie Talesa pozwoliło nam odkryć zależność:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

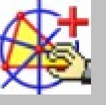
Znane wzory z fizyki do wyznaczania: całkowitego oporu układu dwóch oporników połączonych równolegle, albo pojemności dwóch kondensatorów połączonych szeregowo.

Wykorzystaj ostatnią konstrukcję do następującego zadania z fizyki:

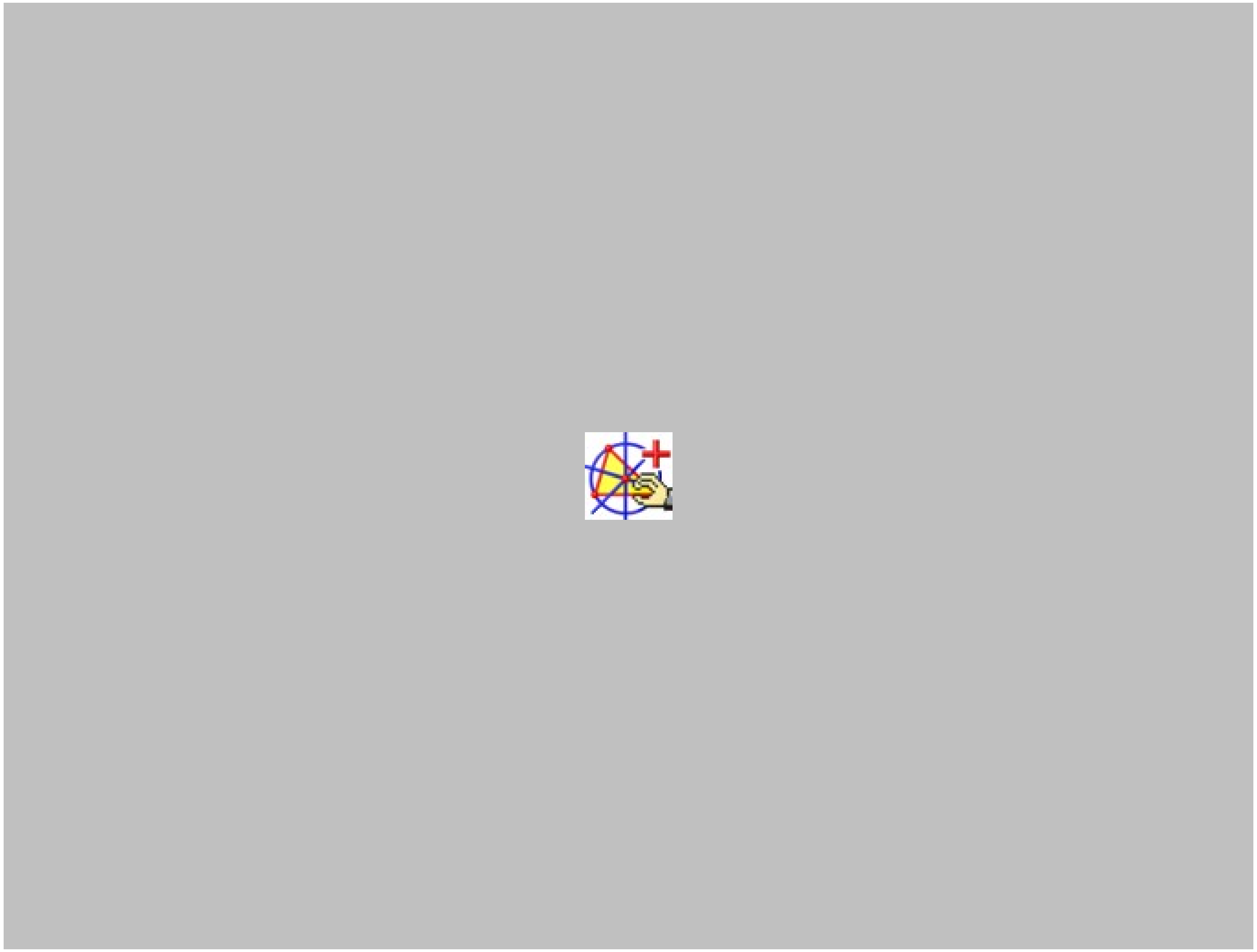
Jaki opór musi mieć opornik dołączony równolegle do opornika o rezystancji 5 Ω aby opór całkowity wynosił 3 Ω?

Na kolejnym slajdzie ustal położenie punktu ***A'*** na 5 cm i tak przesuwaj punkt ***B'***, by długość ***XX'*** wynosiła w przybliżeniu 3 cm – patrz kolejny slajd.

Wartość wyznaczonego oporu prześlij na platformę elearningową swojemu nauczycielowi ***(15)***.



Połączmy odcinkiem punkty ***A’*** i ***B’.***
Wówczas czworokąt ***ABB’A’*** jest trapezem.



Odbijmy w symetrii środkowej punkt ***X*** względem ***X'.***

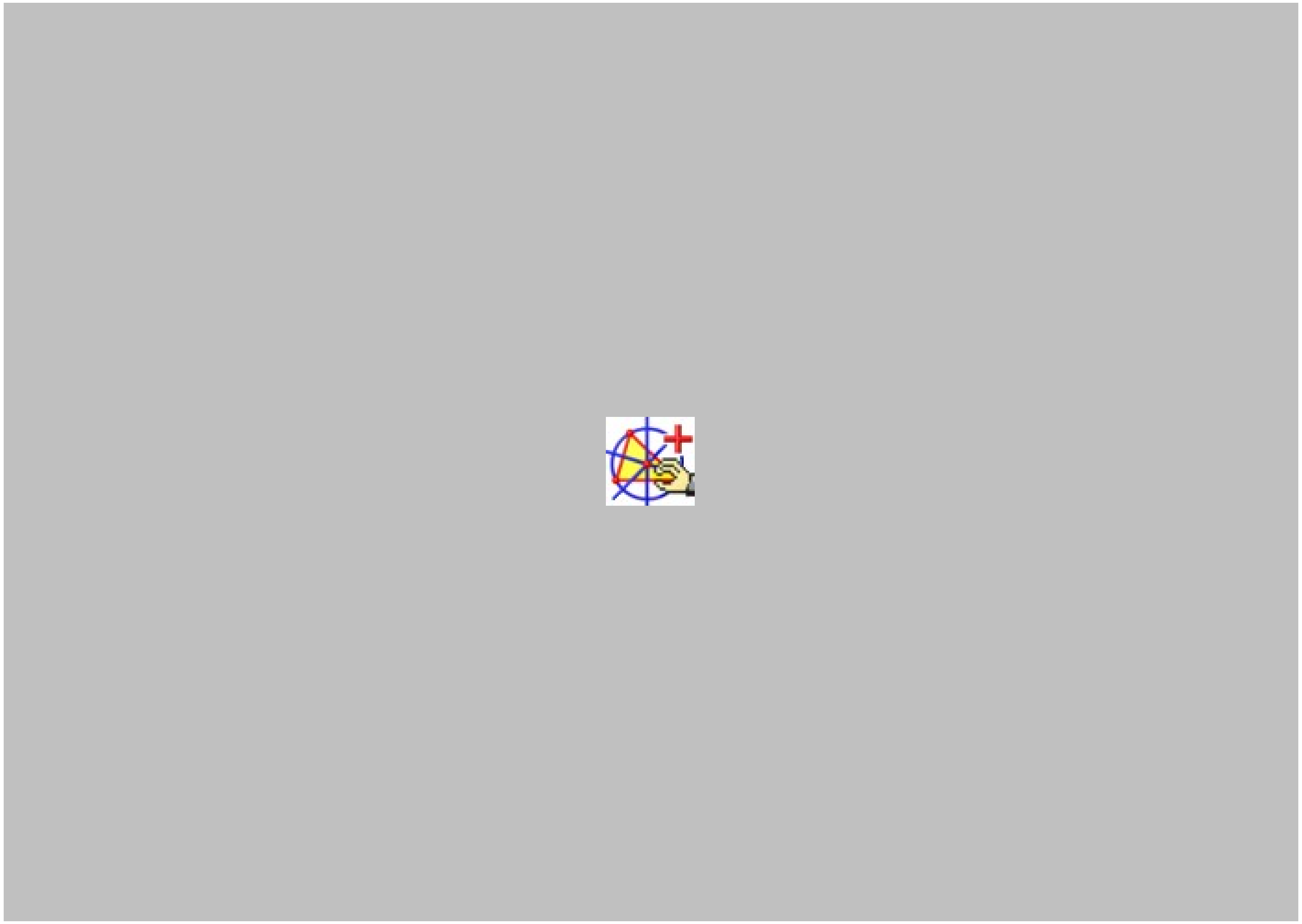
Gdzie znalazł się punkt ***X''*** $= S_{X'}(X)$***?***

Poruszaj punktami ***A'*** i ***B'.***

Widać z konstrukcji, że odcinek ***XX''*** łączący dwa punkty boków trapezu jest równoległy do ***AA'*** oraz ***BB'*** i przechodzi przez punkt

X' przecięcia jego przekątnych.

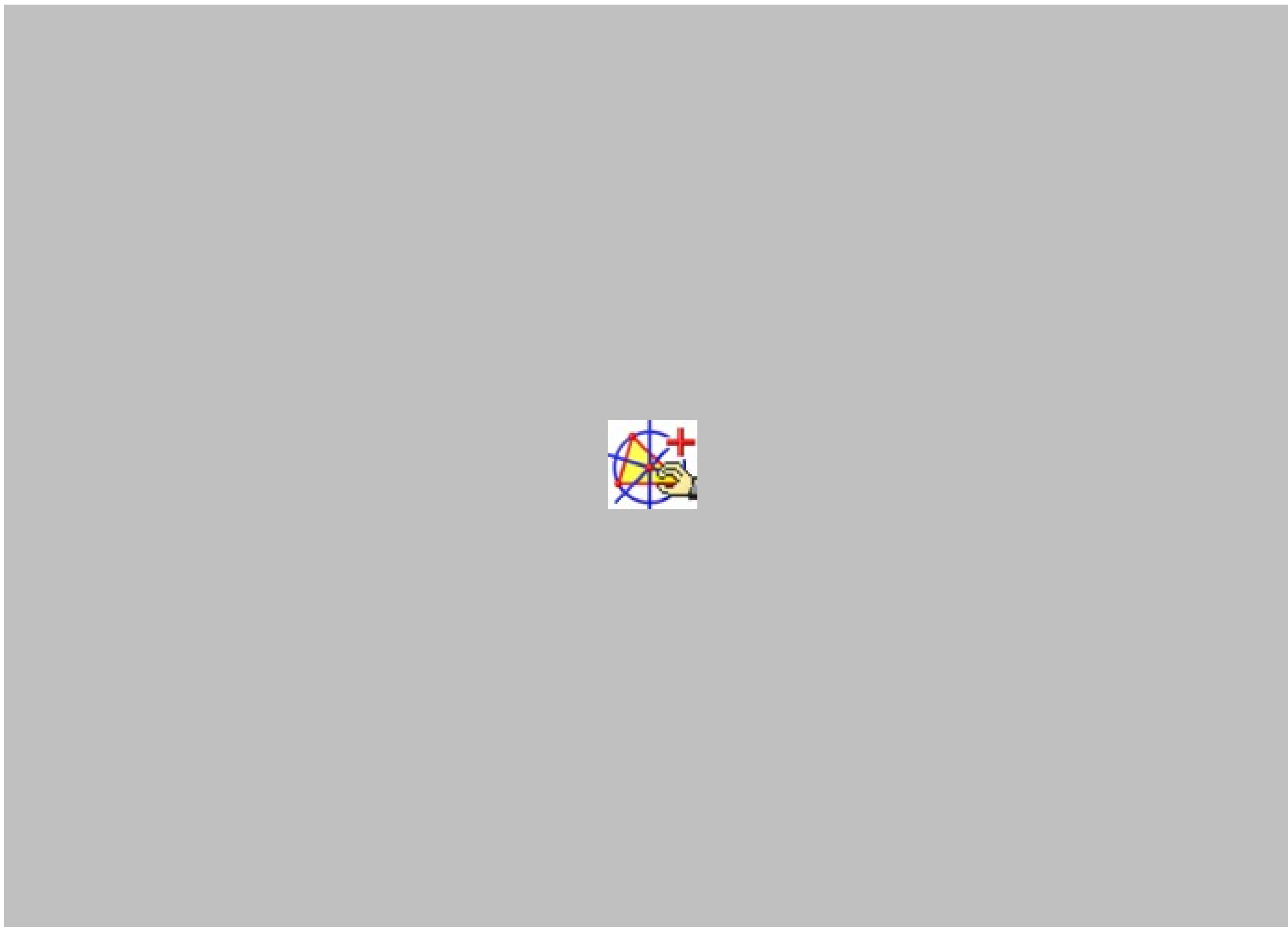
Wielkość ***XX''*** wynosi $$\frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}.$$



Wielkość $XX'' = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b}$ to znane pojęcie ze statystyki.

XX'' stanowi ***średnią harmoniczną*** wielkości ***a*** i ***b***.
Jak widać konstrukcja ta daje pomysł konstruowania średniej

harmonicznej dwóch wielkości. .



Jak praktycznie skonstruować średnią harmoniczną dwóch odcinków ***a*** i ***b***?

Poniższy aplet przeprowadzi Cię przez tę konstrukcję .

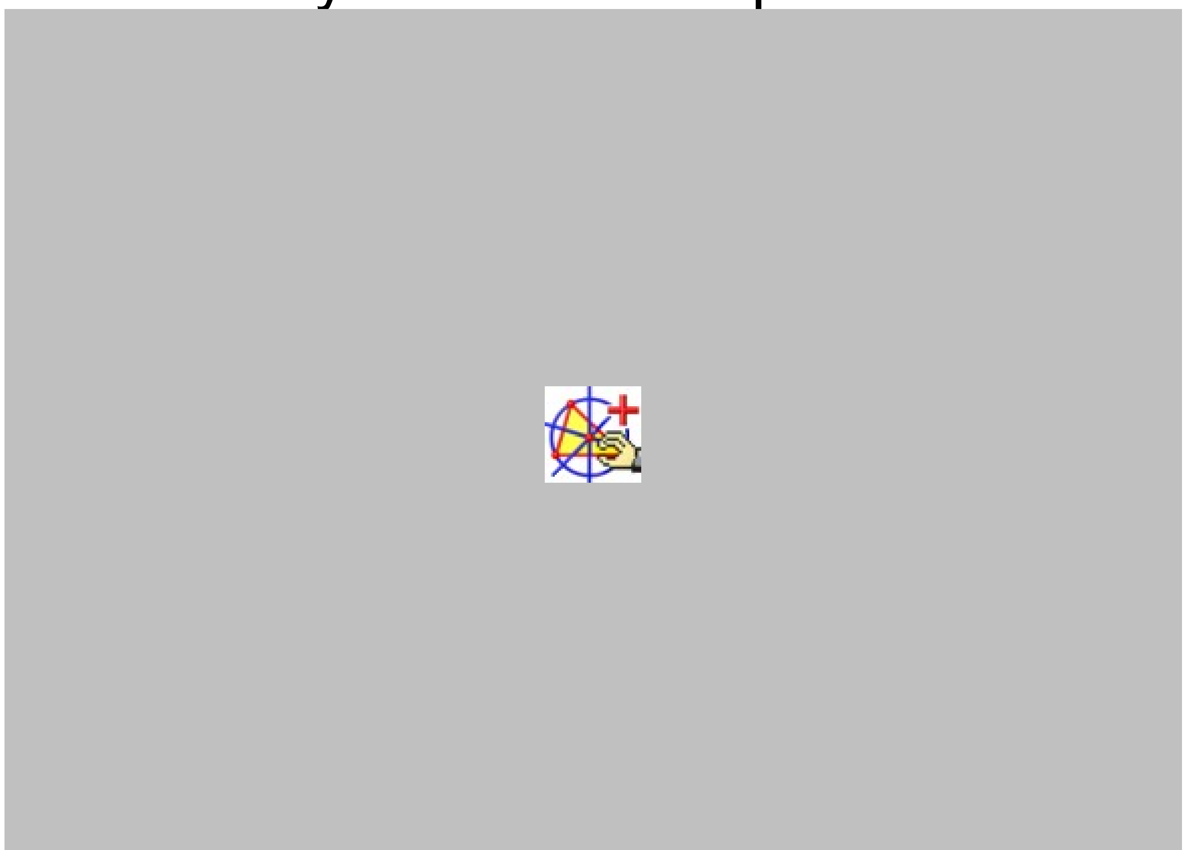
Opisz ją i prześlij swojemu nauczycielowi **(16)**

Oto inne zastosowanie twierdzenia Talesa:

Zadanie:
Dysponujemy dwoma różnymi nierównoległymi odcinkami. Na pierwszym z nich porusza się punkt ***P***. Jak skonstruować punkt ***P’*** na drugim odcinku tak, by w trakcie ruchu punktu ***P*** po pierwszym odcinku, punkt ***P***’ dzielił drugi odcinek w tym samym stosunku, w jakim punkt ***P*** dzieli pierwszy odcinek.

Najpierw wyjaśnijmy co to jest podział odcinka punktem w danym stosunku.

Niech punkt ***P*** porusza się po odcinku ***AB*** od punktu ***A*** do ***B***.
Wówczas powiemy, że punkt ***P*** dzieli odcinek w stosunku ***AP/AB*.**
Na poniższym aplecie poruszaj punktem ***P*** po odcinku ***AB***.
Odczytuj stosunek podziału tego odcinka punktem ***P***.
Obok inny odcinek ***A'B'*** jest podzielony punktem P'
w takim samym stosunku. Sprawdź to sobie.

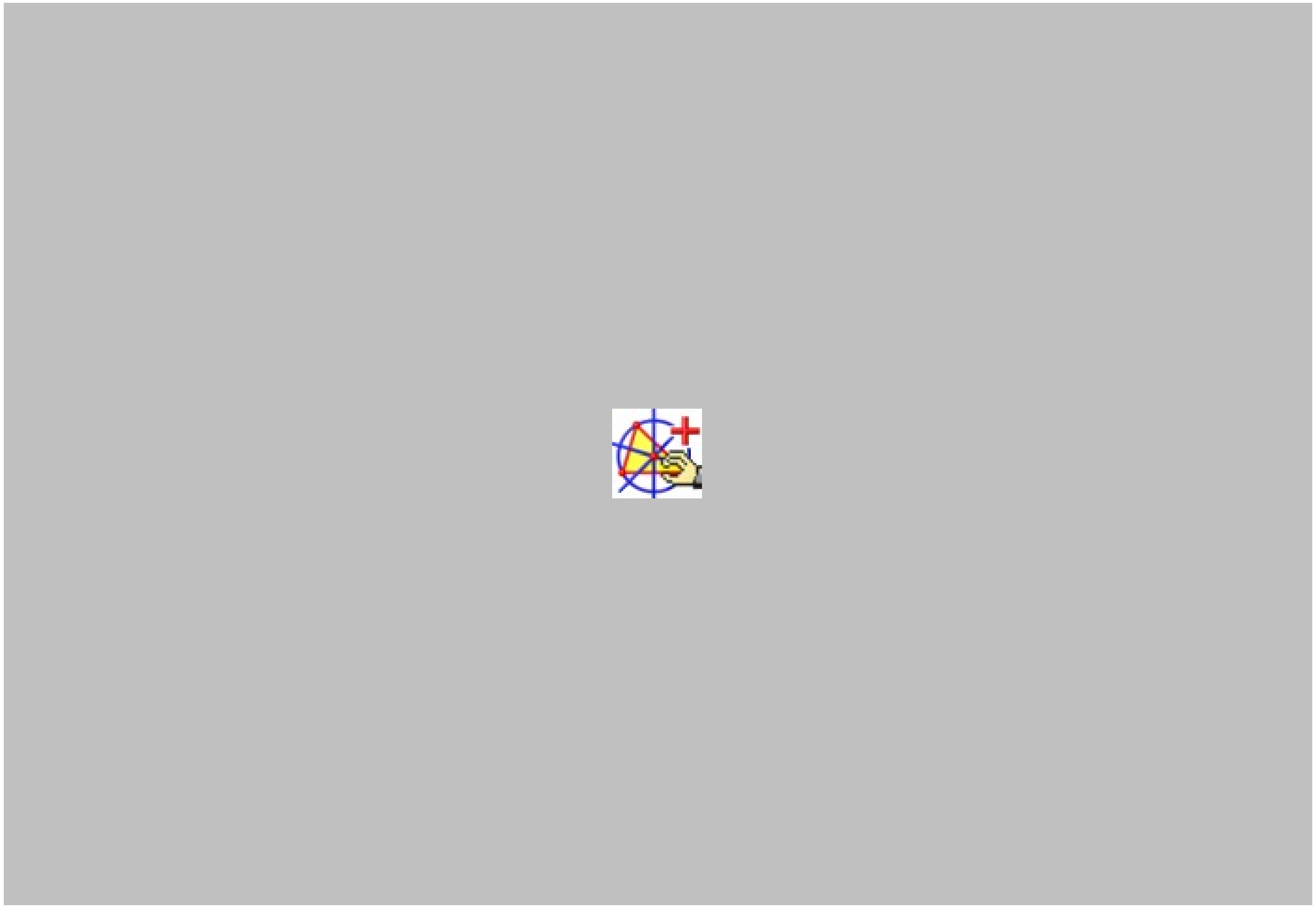


Jaki jest stosunek podziału, gdy punkt ***P*** pokrywa się z punktem ***A***, a jaki, gdy zbliża się do punktu ***B***? **(13)**

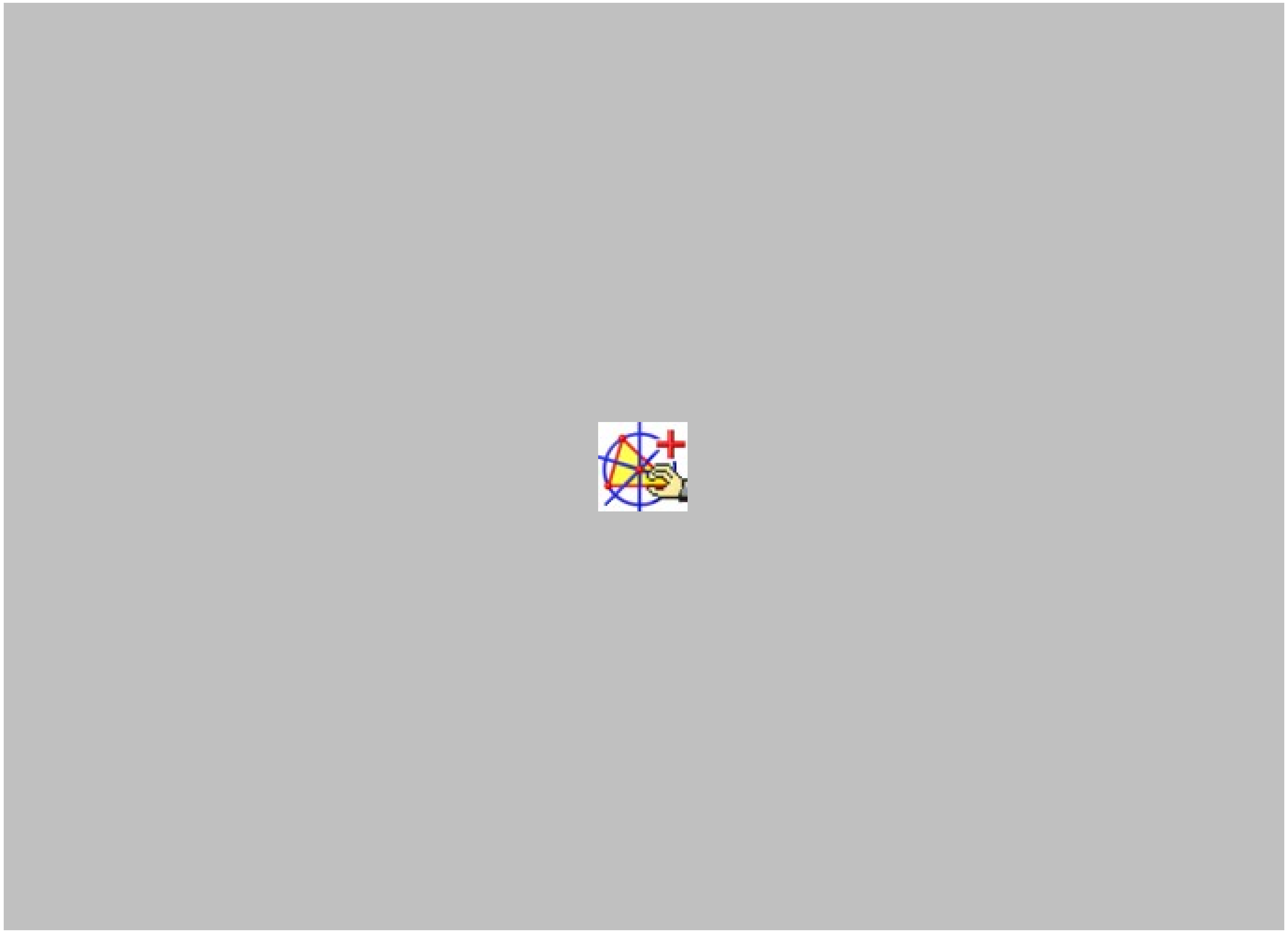
W konstrukcji zostało wykorzystane dwukrotnie twierdzenie Talesa.

Zauważ też, że odcinki ***AB*** i ***A'C'*** są współbieżne, to znaczy, że ruch punktów ***P*** i ***P'*** na obu odcinkach odbywa się „w tym samym kierunku”.

A co stanie się, jeśli punkt ***P*** będzie poruszał się od ***A*** do ***B*** a ***P’*** od ***B’*** do ***A’?***



Wówczas zastosujemy tylko raz twierdzenie Talesa, a za drugim razem odbijemy w symetrii środkowej pomocniczy punkt ***P’’*** tak, jak to przedstawia poniższy aplet – wciskaj kolejne przyciski.

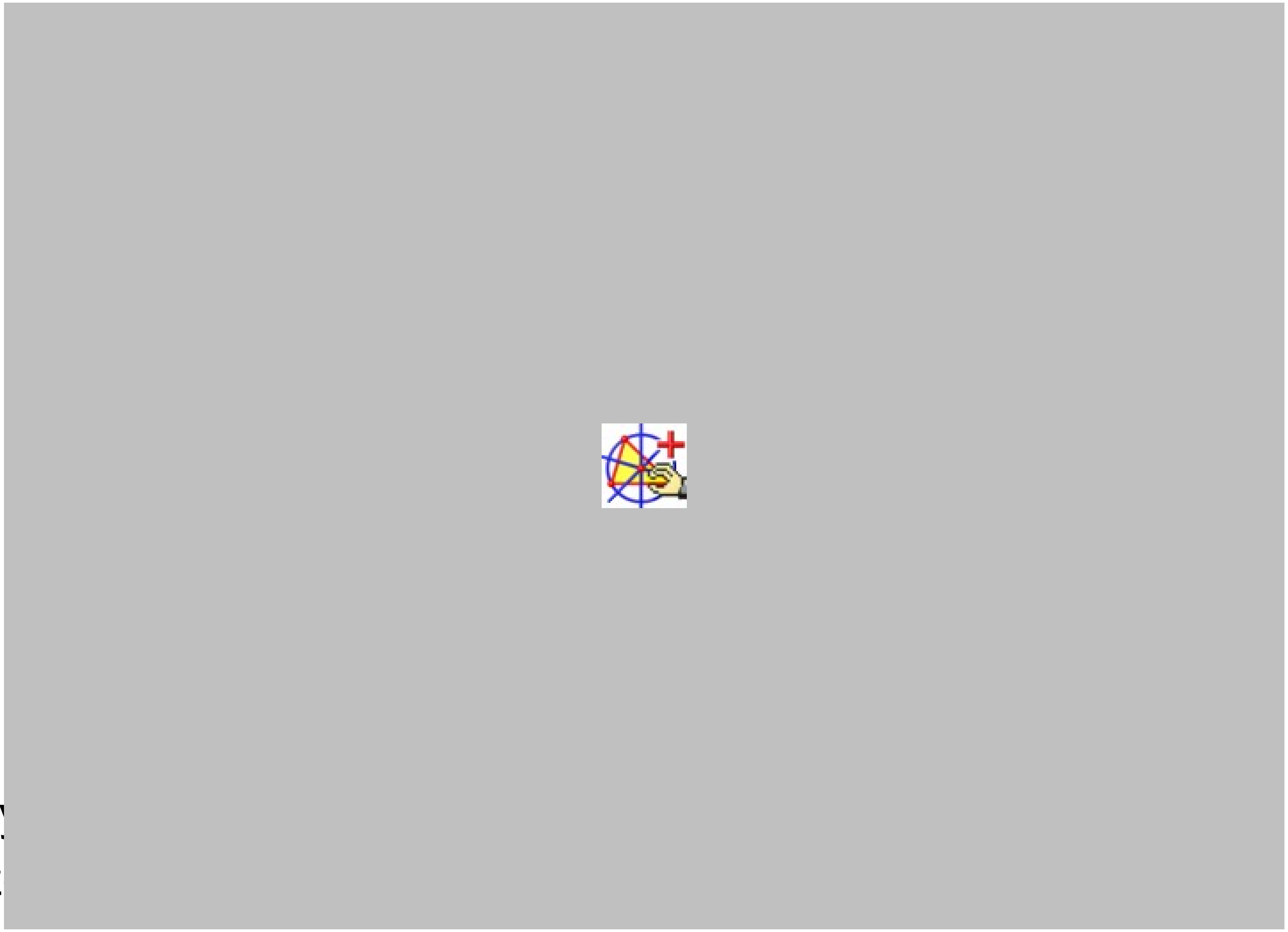


Ta konstrukcja może przydać się informatykom dokonującym rozmaitych animacji.
Zauważ, że prędkość poruszania punktów ***P*** i ***P'*** nie jest jednakowa.
Wszystko zależy od długości odcinków, gdyż każdy z nich pokonuje je w tym samym czasie, ale droga pokonywania jest różna.

Jeśli ktoś programuje we Flashu, czy w innym języku programowania grafiki, to ten sposób może mu się przydać do tworzenia tzw. suwaków.

Oto przykład stosowania suwaków.
Poruszaj punktami: ***P***, ***M*** i ***suwak*** i obserwuj jak sześcioośmiościan przeistacza się w ośmiościan foremny.

W jednej z poprzednich konstrukcji widziałeś, jak trójkąty ***SBB'*** i ***SDD'*** są jakby rozciągnięte w jednym kierunku.



Ale to t

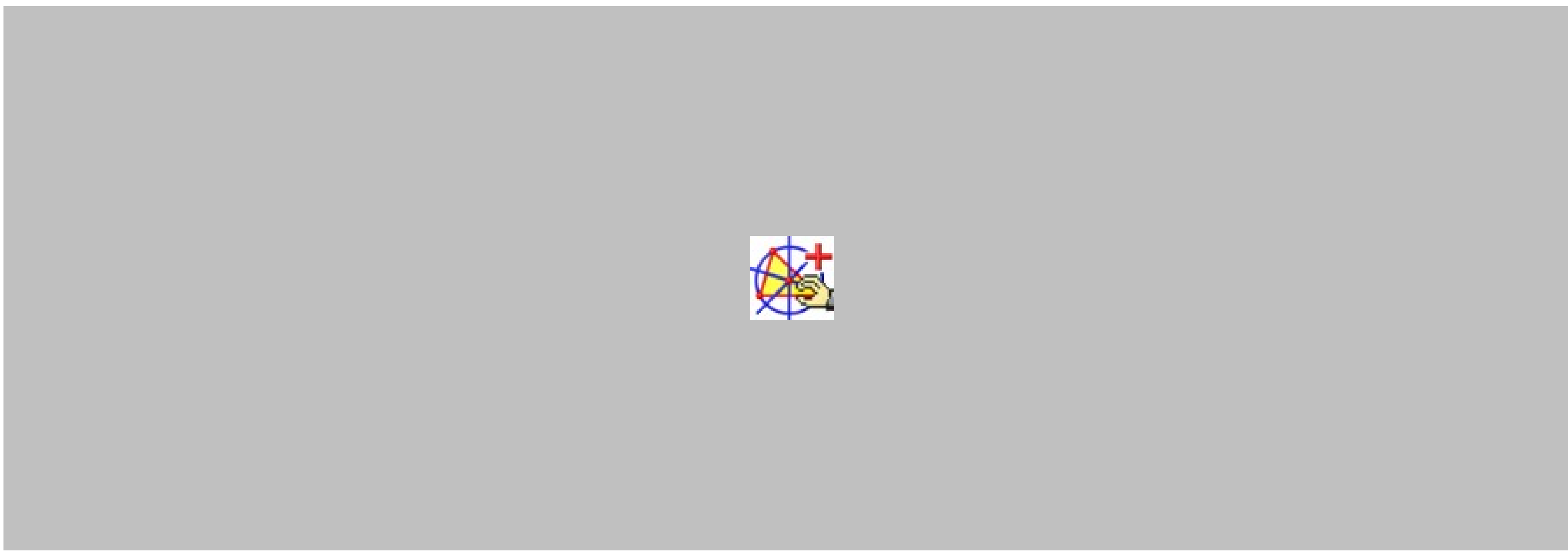
prz

JEDNOKŁADNOŚĆ

Wprowadźmy na płaszczyźnie punkt ***O*** zwany środkiem jednokładności oraz liczbę ***s*** którą będziemy nazywać skalą jednokładności. Liczba ta może przyjmować różne wartości łącznie z zerem.

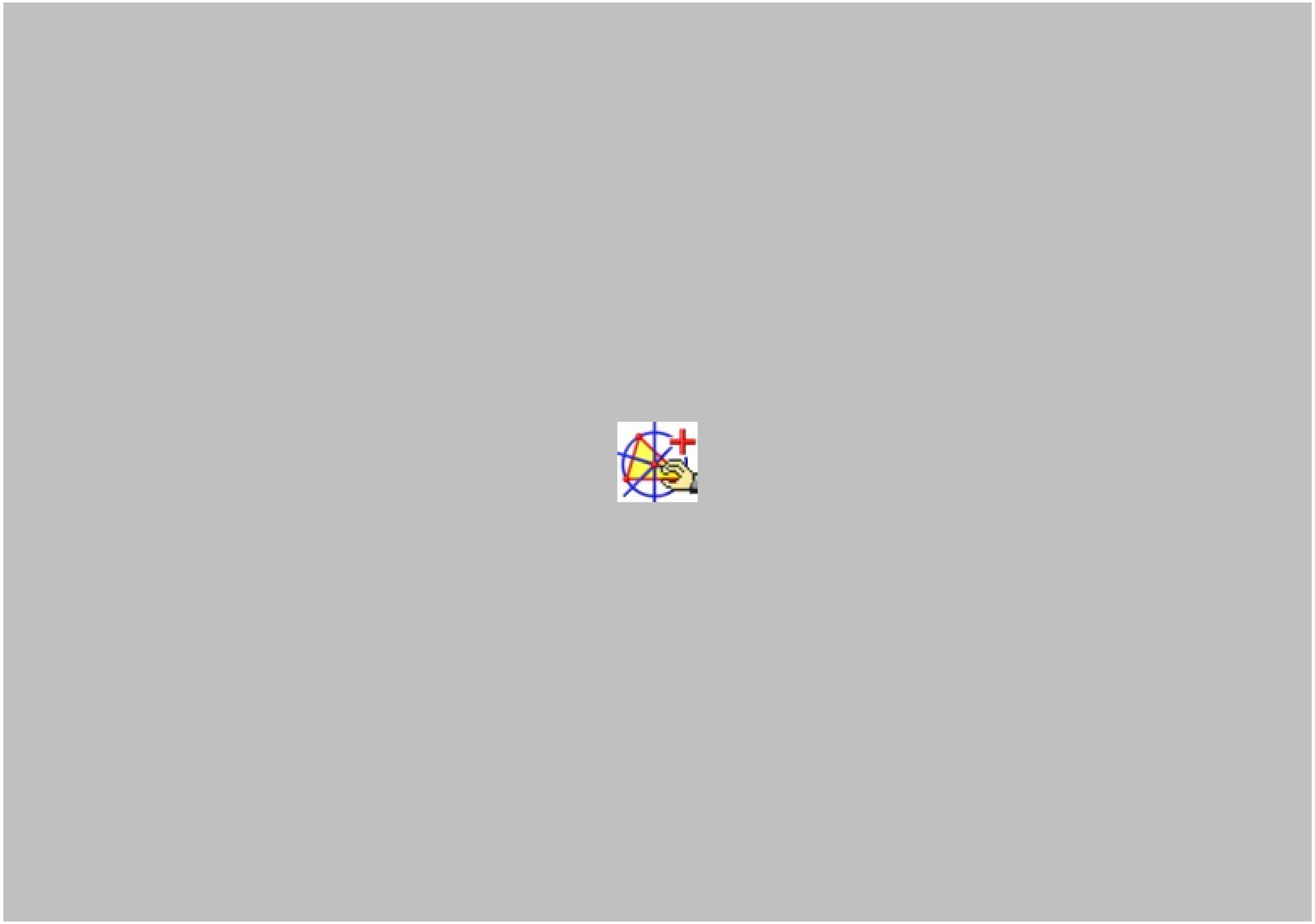
Poruszaj suwakiem skali, obserwuj wartość skali i położenie punktu ***P'.***

Każdemu punktowi ***P*** płaszczyzny różnemu od punktu ***O*** przyporządkujemy taki punkt ***P'***, by punkty ***P***, ***O*** i ***P'*** leżały na jednej prostej, przy czym, gdy liczba jest dodatnia, to ***P'*** leży po tej samej stronie punktu ***O*** co ***P***, a gdy ujemna, to po przeciwnej.



Poniższy aplet ilustruje trójkąt ***ABC*** i jego obraz ***A'B'C'*** w jednokładności. Zmieniaj położenie wierzchołków pierwszego z nich i odpowiedz na poniższe pytania:

Jak zmieniają się kąty obu trójkątów po przekształceniu w jednokładności?**(17)**



Czy jeśli odcinek jest obrazem innego odcinka w jednokładności, to oba są równoległe? **(18)**

Jak zmieniają się długości ich boków? Czy zwiększają się, czy zmniejszają, czy są takie same? Od czego to zależy? **(19)**

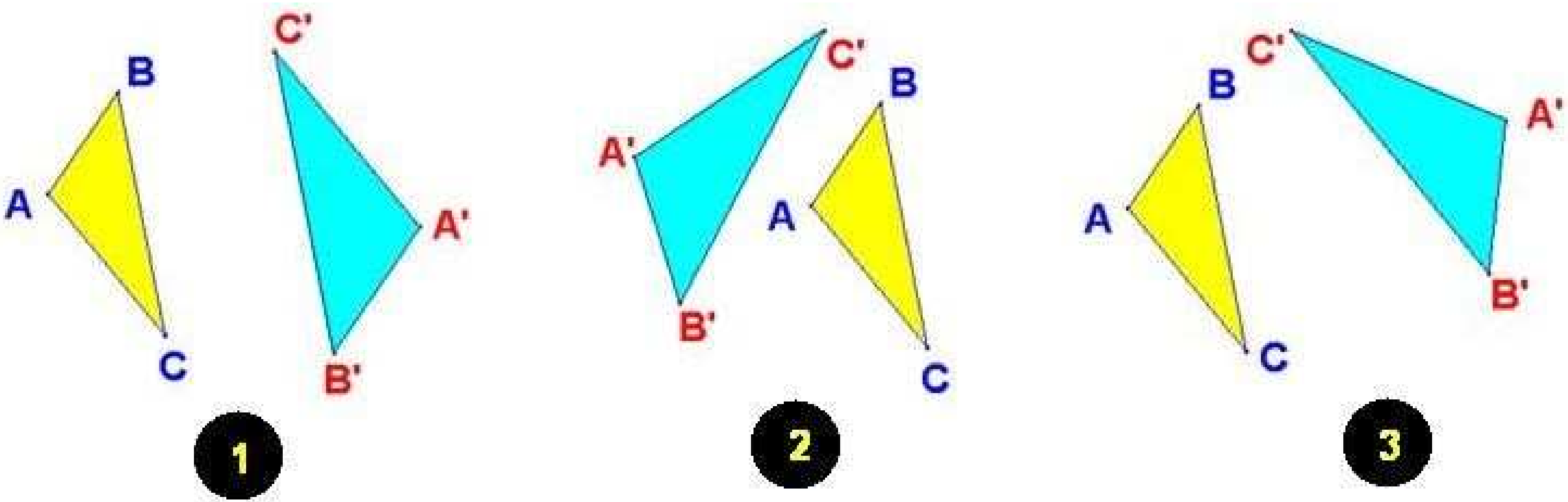
Jakim przekształceniem jest jednokładność, gdy jej skala wynosi ***s = 1?*** **(20)**

Czym jest jednokładność, gdy jej skala wynosi $s = -1$? **(21)**

Jeżeli obrazem trójkąta ***ABC*** w jednokładności o środku ***O*** i skali ***s*** jest trójkąt ***A'B'C',*** to powiemy, że ***trójkąty te są jednokładne***.

Dane są dwa trójkąty ***ABC*** i ***A'B'C'.***
Jak rozpoznać, czy istnieje jednokładność o środku ***O*** i skali ***s***, która przekształca pierwszy z nich na drugi? Aby odpowiedzieć na to pytanie zadajmy kilka następnych:

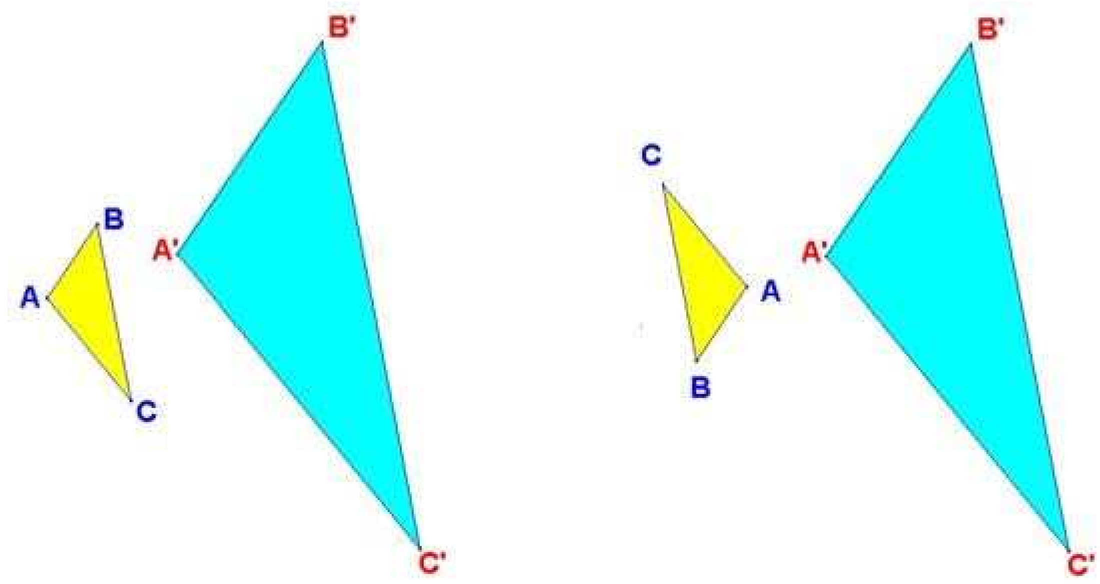
Czy każde dwa trójkąty, które mają te same miary kątów, są jednokładne? **(21)**
Czy każde dwa trójkąty, które mają boki do siebie równoległe, są jednokładne? **(22)**
Czy każde dwa trójkąty, których długości boków są proporcjonalne, są jednokładne? **(23)**



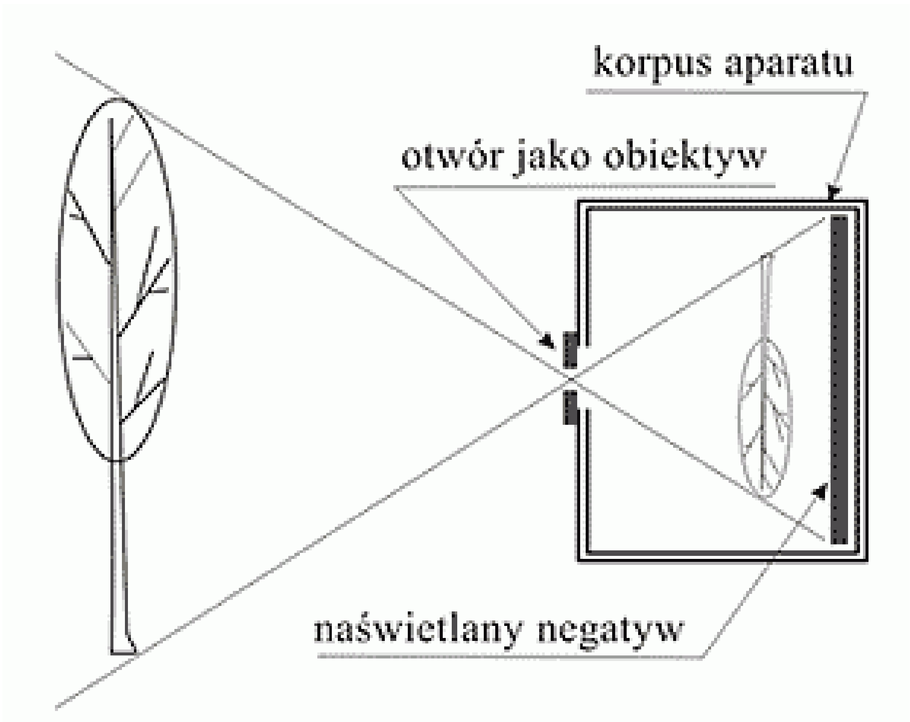
Które z trzech powyższych par trójkątów ilustrują trójkąty jednokładne? **(24)**

1. *te są, / nie są, bo* …….
2. *te są, / nie są, bo* …….
3. *te są, / nie są, bo* …….

Na poniższych rysunkach trójkąty ***ABC*** **i** ***A'B'C'*** są jednokładne. Jak znaleźć ich środek jednokładności? Gdzie się on znajduje? Opisz tę konstrukcję **(25)**

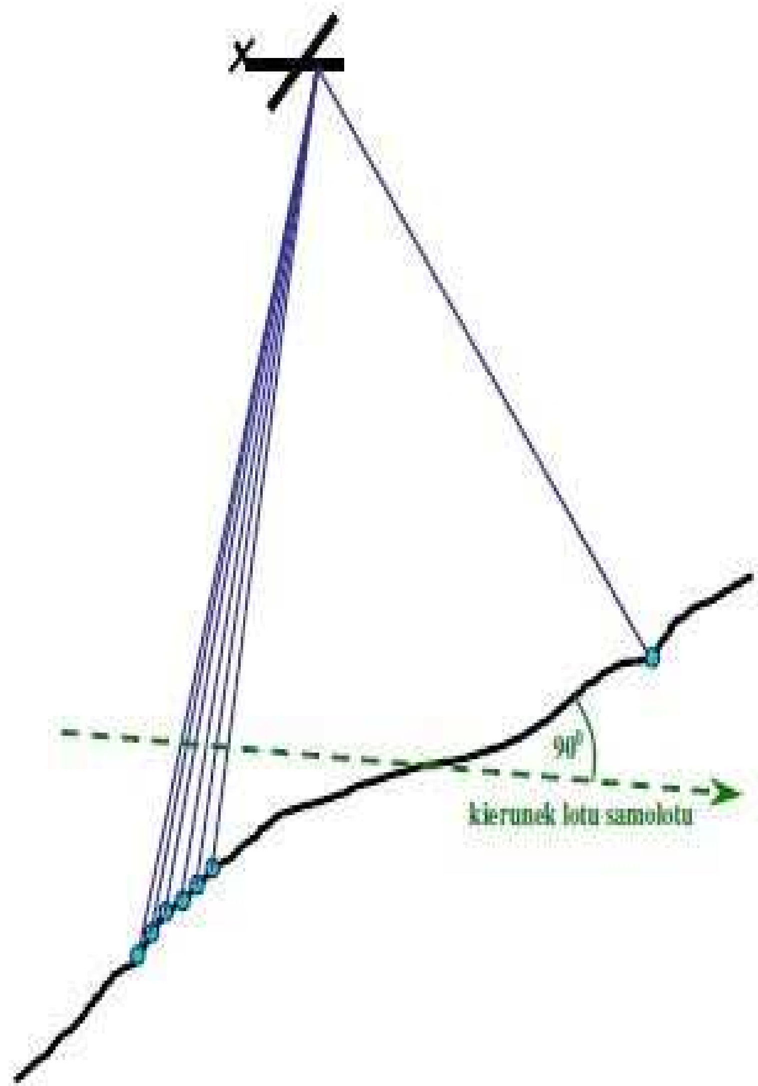


Jednokładność wykorzystuje się w aparatach fotograficznych. Poniższy rysunek ilustruje działanie pierwszych kamer bez szklanych obiektywów. Taki aparat fotograficzny nazywa się ***camera obsura***.



I na koniec jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia Talesa. Oglądałeś wielokrotnie w swoim życiu mapy w atlasie geograficznym. Wiesz, że jest to pewne płaskie odzwierciedlenie kulistego fragmentu Ziemi.

Obecnie mapy te tworzy się na podstawie gotowych zdjęć satelitarnych lub lotniczych, tak jak to przedstawia ilustracja obok.

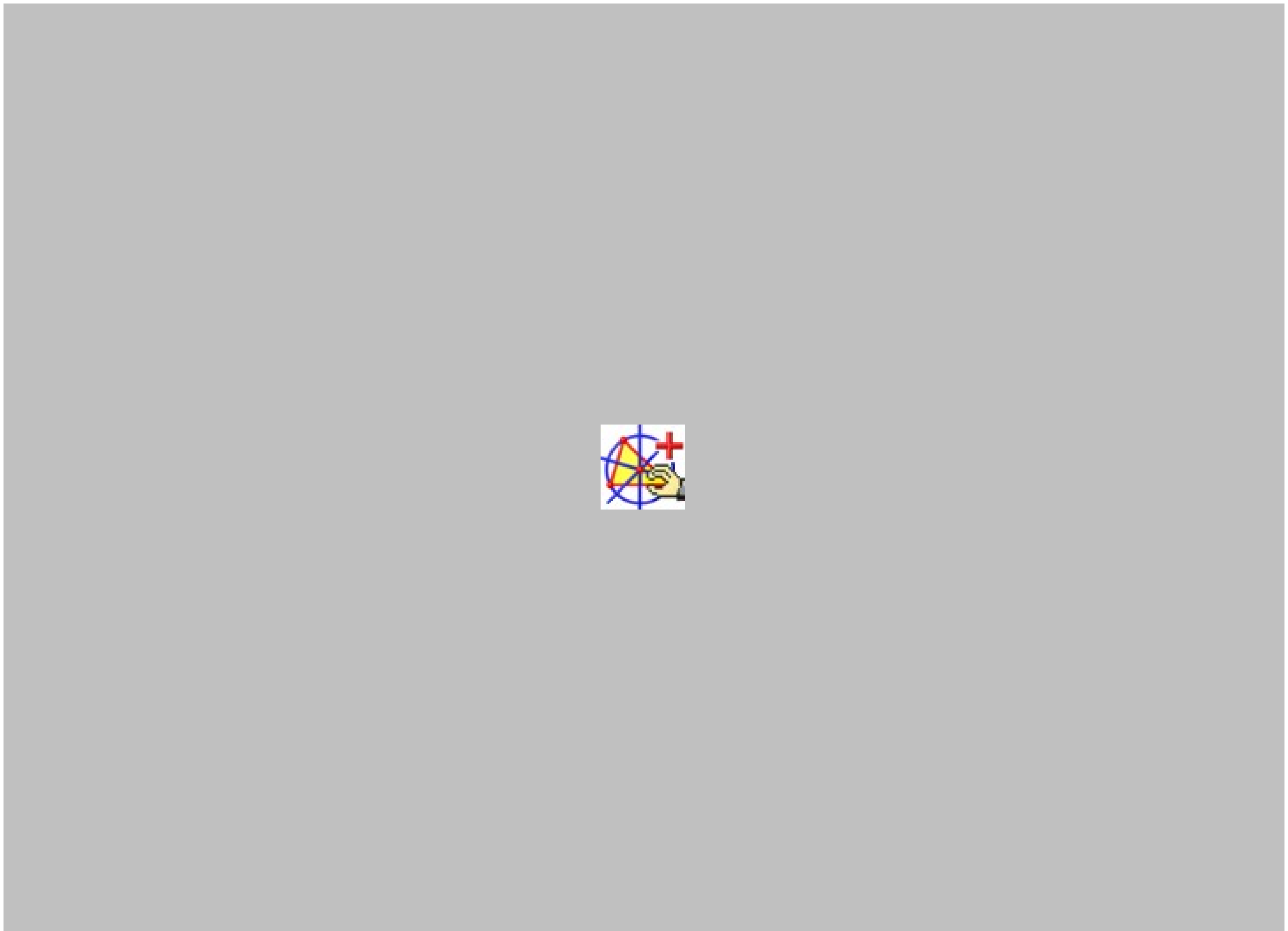


Samolot fotografuje Ziemię płatami uzyskując na kliszy fotograficznej obraz jednokładny do faktycznego obrazu Ziemi, tak, jak np. na poniższym rysunku obraz najpiękniejszego w Europie Rynku.

Dawniej, gdy nie było takiej techniki komputerowej, jak dziś, też tworzono mapy.

Wykonywano je w różnych skalach.
Aby nie tworzyć każdej z nich od nowa, korzystano z jednej mapy i dokonywano jej kopii w ustalonej skali.
Służył do tego przyrząd zwany ***pantografem***.

Jak on działa?
Poruszaj punktem ***P*** i obserwuj zachowanie się punktów ***P'*** i ***P''.***



A tu jeszcze inna forma pantografu. Wykreślaj punktem ***P*** jakąś figurę i obserwuj zachowanie się punktu P'. Zmieniaj też wielkości ramion pantografu końcami odcinków u dołu ekranu.

Obraz powstały przez pozostawienie śladu punktu ***P’*** jest jednokładny z obrazem, który rysujesz punktem ***P.***

PYTANIA I ODPOWIEDZI „Twierdzenie Talesa"

1. Poruszaj na poniższym aplecie punktami ***A***, ***B***, ***C***, ***D*** oraz ***A'.***
Co zauważyłeś **(01)**

2. Co zauważyłeś wykonując ostatnie doświadczenia?
Spróbuj opisać hipotezę, (przypuszczenie), którą odkryłeś **(02)**.

3. Sprawdź, czy proste ***b, c*** i ***d*** na poniższym rysunku są równoległe? Czy na podstawie tych danych możesz stwierdzić, która prosta nie jest równoległa do pozostałych? Jeśli tak, to która? **(03)**

4. Spróbuj i tym razem odkryć pewną hipotezę. Wyślij ją również swojemu nauczycielowi **(04)**

5. Zauważ też, że kąty w tych trójkątach mają te same miary.
Dlaczego? **(05)**

6. W przybliżeniu możesz założyć, że twoja wysokość wynosi 2 m. Napisz odpowiednią proporcję i wyznacz z niej wzór na wysokość drzewa.
Prześlij ją swojemu nauczycielowi **(6)**

7. Ułóż proporcję, która umożliwi w ten sposób wyznaczenie szerokości ***s*** rzeki **(07).**
Prześlij ją swojemu nauczycielowi na platformę elearningową.

8. Przypatrz się uważnie tej konstrukcji i spróbuj opisać jej kolejne etapy. **(08)**

9. Na podstawie poniższego apletu, który opisuje kolejne kroki konstrukcji zrób opis tej konstrukcji i prześlij go swojemu nauczycielowi. **(09)**

10. Zakończ samodzielnie tę konstrukcję i opisz ją **(10)**

11. Śledź kolejne kroki tej konstrukcji, a jeśli nauczyciel zażąda jej opisu, to go wykonaj i wyślij na platformę. **(11)**

12. Jakim wzorem wyraża się ta funkcja? **(12)** Prześlij go nauczycielowi

13. Uzupełnij ostatnia kolumnę tabeli i prześlij wyniki swojemu nauczycielowi **(13).**

wielkość ***a***	wielkość ***b***	wielkość ***x***
4 cm	6 cm	
5 cm	5cm	
2 cm	6 cm	
6 cm	6 cm	

14. Jeśli jeszcze nie udało Ci się odnaleźć zależności ***x*** od ***a*** i ***b***, spróbuj za każdym razem obliczać sumę ***a+b*** oraz iloczyn ***a·b*** i porównuj je z wartości ***x.***
Co zauważyłeś? Odpowiedź na to pytanie prześlij nauczycielowi. **(14)**

15. Wartość wyznaczonego oporu prześlij na platformę elearningową swojemu nauczycielowi ***(15).***

16. Jak więc praktycznie skonstruować średnią harmoniczną dwóch odcinków ***a*** i ***b***? Poniższy aplet przeprowadzi Cię przez tę konstrukcję .Opisz ją i prześlij swojemu nauczycielowi **(16)**

17. Jak zmieniają się kąty obu trójkątów po przekształceniu w jednokładności?**(17)**

18. Czy jeśli odcinek jest obrazem innego odcinka w jednokładności, to oba są równoległe? **(18)**

19. Jak zmieniają się długości ich boków; czy zwiększają się, czy zmniejszają, czy są takie same? Od czego to zależy? **(19)**

20. Jakim przekształceniem jest jednokładność, gdy jej skala wynosi ***s = 1?*** **(20)**

21. Czy każde dwa trójkąty, które mają te same miary kątów, są jednokładne? **(21)**

22. Czy każde dwa trójkąty, które mają boki do siebie równoległe, są jednokładne? **(22)**

23. Czy każde dwa trójkąty, których długości boków są proporcjonalne, są jednokładne? **(23)**

24. Które z trzech powyższych par trójkątów ilustrują trójkąty jednokładne? **(24)**
1. *te są, / nie są, bo* …….
2. *te są, / nie są, bo* …….
3. *te są, / nie są, bo* …….

25. Na poniższych rysunkach trójkąty ***ABC* i *A'B'C'*** są jednokładne. Jak znaleźć ich środek jednokładności?
Gdzie się on znajduje? Opisz tę konstrukcję **(25)**