



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

*E-learning – matematyka – poziom podstawowy*

# Trygonometria w geometri

*Materiały merytoryczne do kursu*



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Moduł ten przeprowadzi Cię przez elementy trygonometrii, zwanej w latach dwudziestych XX wieku goniometrią.

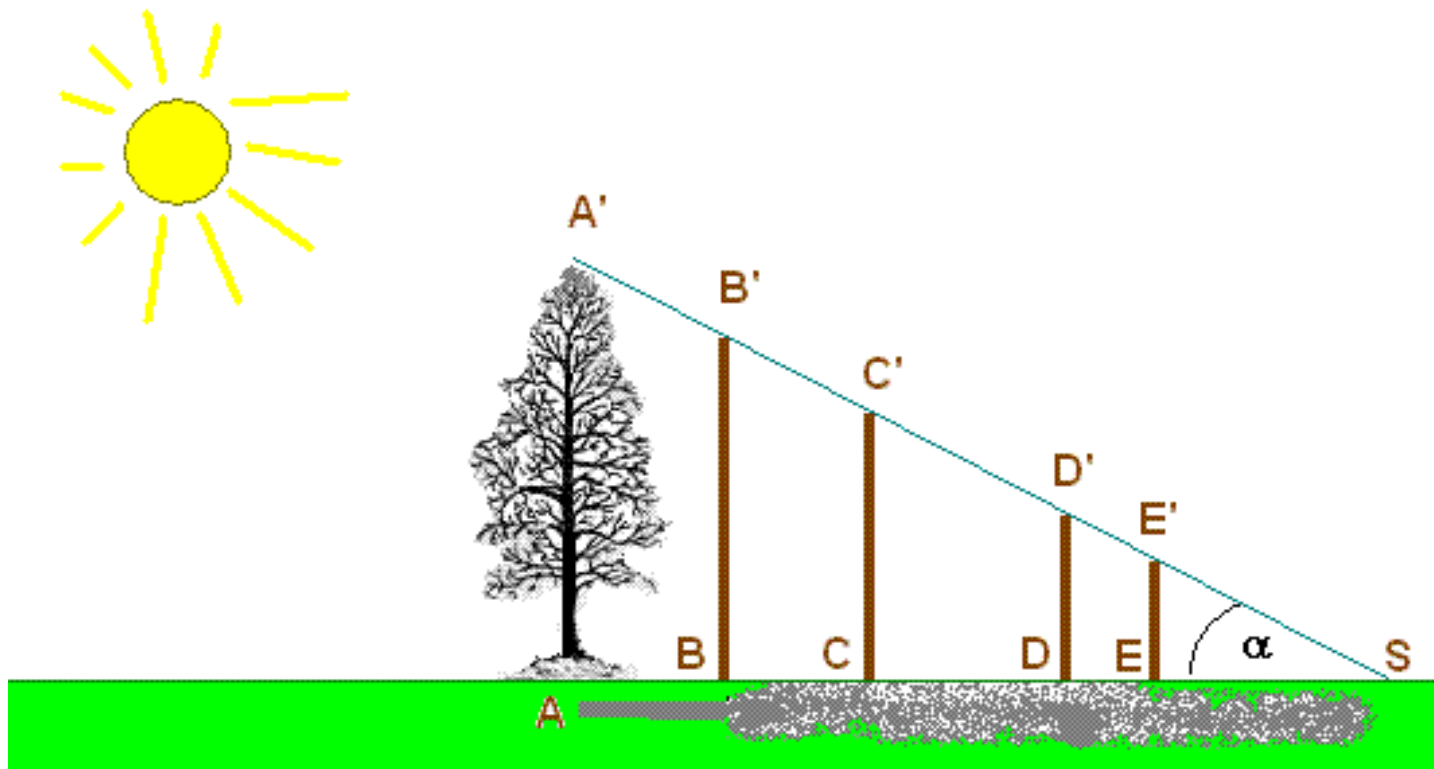
Wiedza, którą tu poznasz, wzbogacona jest o dynamiczne konstrukcje CABRI, które pozwolą Ci interaktywnie uczestniczyć w eksperymentach potwierdzających poznawaną wiedzę, lub odkrywaną dzięki nim.

Jeśli w tekście pojawi się fragment zakończony liczbą umieszczoną w **niebieskim nawiasie**, to oznacza to, że jest to treść zadania do wykonania przez Ciebie i po jego rozwiązaniu powinieneś przesłać je swojemu nauczycielowi matematyki.

Zadania te są również powtórzone w załączonych obok pliku Power Pointa pliku Worda, które po uzupełnieniu możesz odesłać swojemu nauczycielowi jako rozwiązania.

# **BOKI TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO**

Na rysunku ilustrującym sposób wyznaczania wysokości drzewa przy użyciu twierdzenia Talesa można dostrzec trójkąty prostokątne: ***SAA'***, ***SBB'***, ***SCC'***, ***....***, ***SEE'***.



Bokom trójkąta prostokątnego matematycy przypisali specjalne nazwy.

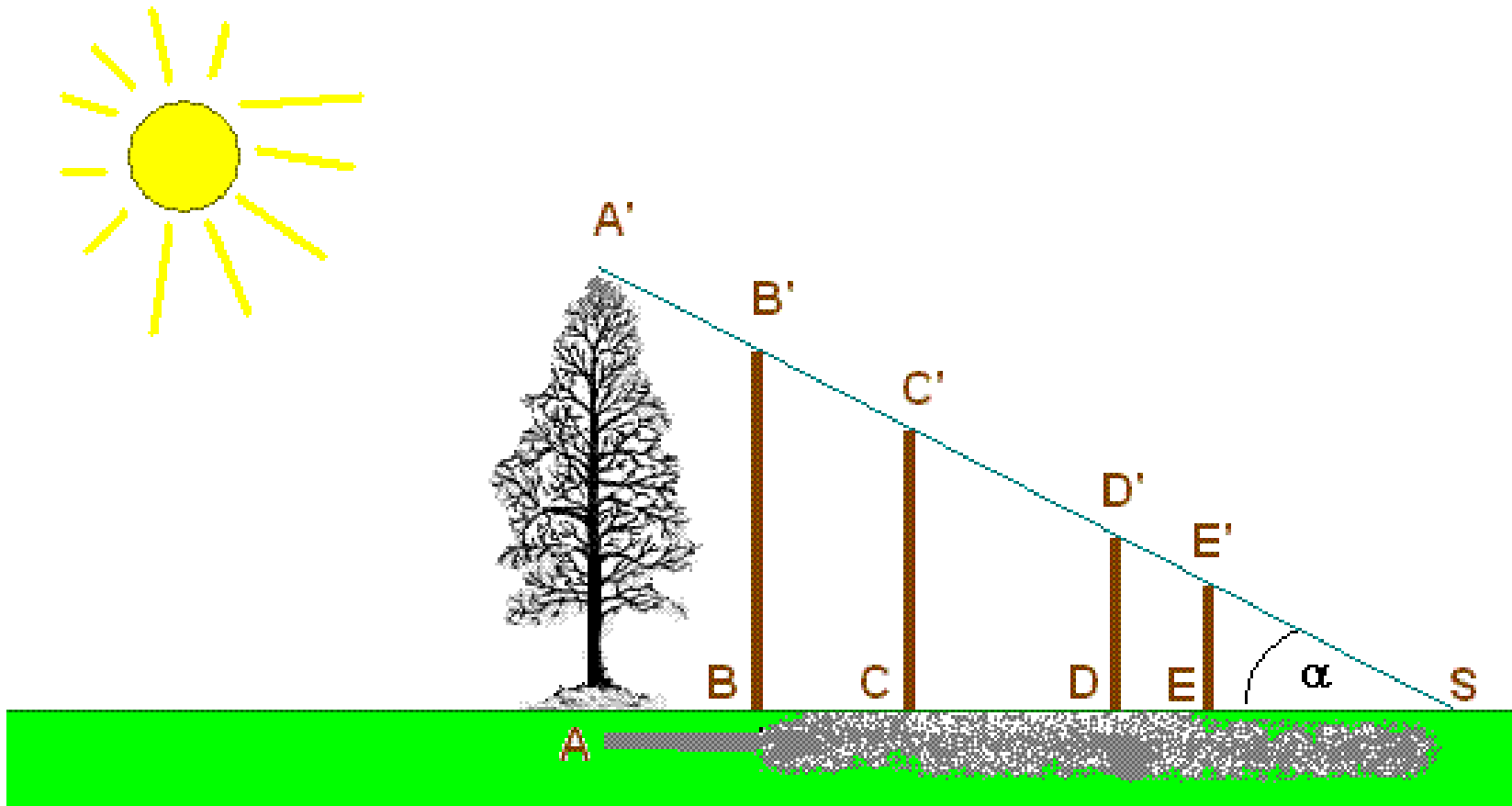
Najdłuższy bok tego trójkąta nazwali **przeciwprostokątną**, gdyż leży on zawsze naprzeciw kąta prostego.

Dwa krótsze boki trójkąta prostokątnego nazwano **przyprostokątnymi** – wszak leżą one przy kącie prostym.

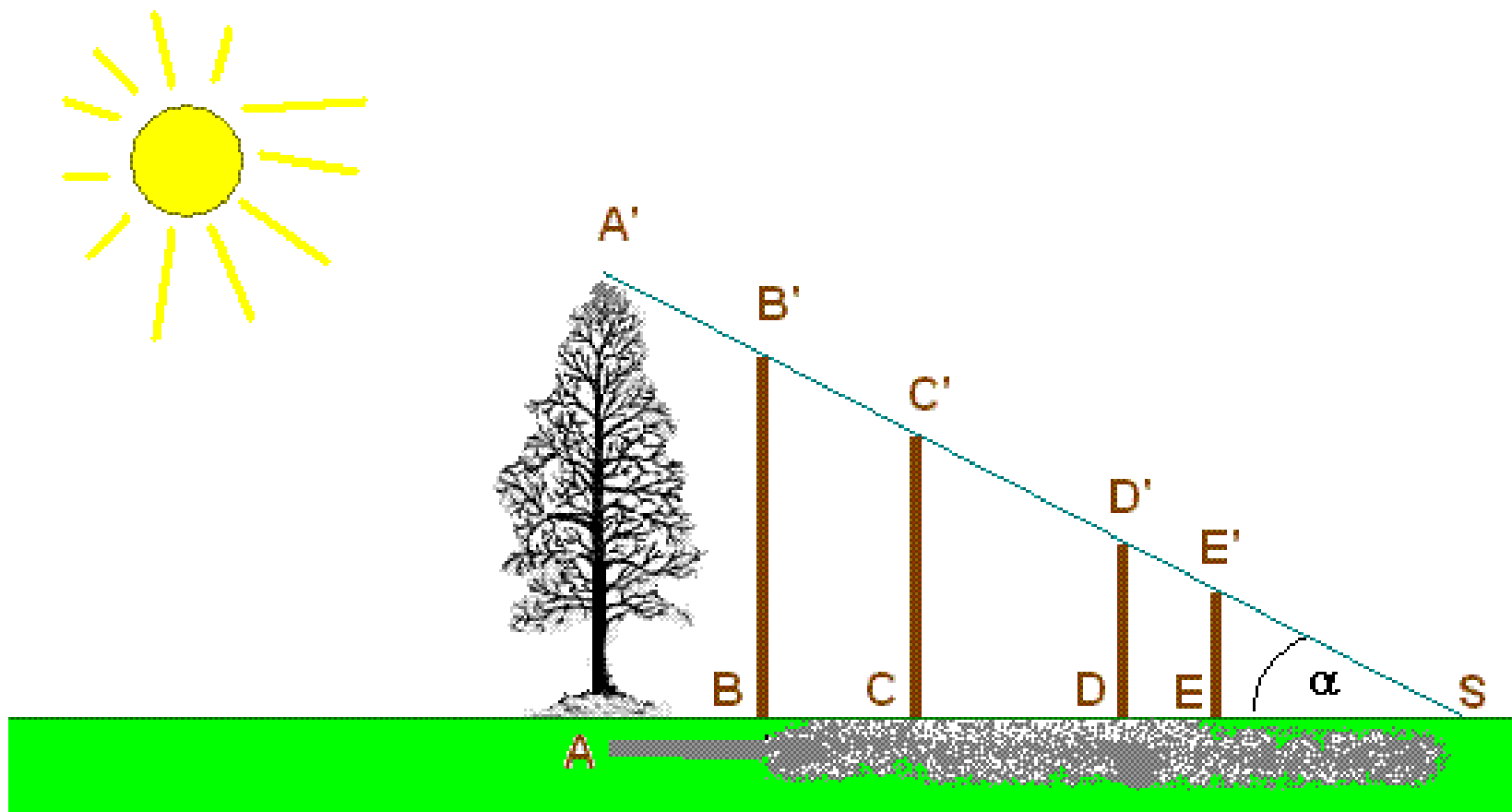
Chodzi o to, że nazwy te ułatwiają matematykom porozumiewanie się i wprowadzają do teorii pewien ład i porządek.

Nie ucz się ich na pamięć, lecz kojarz je logicznie z nazwą, która jest im przypisana.

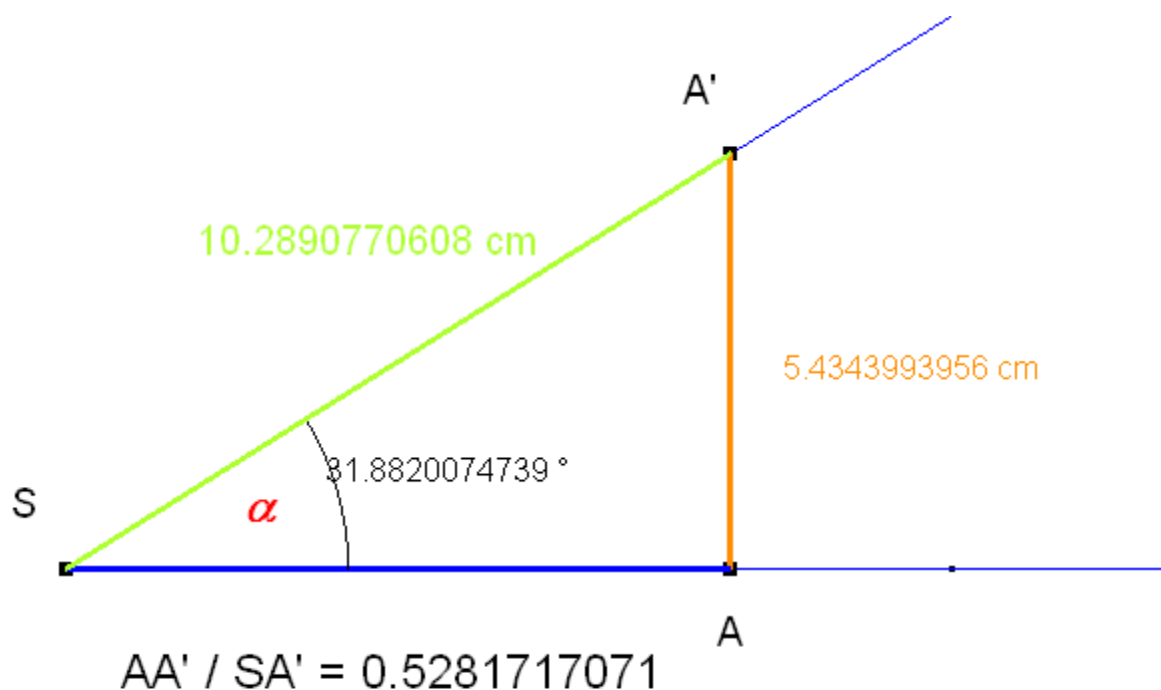
**$AA'$** ,  **$BB$**  itd. są krótszymi przyprostokątnymi trójkątów prostokątnych  **$ASA'$** ,  **$BSB'$**  ... itd.



Jeśli kąt między odcinkami **AS** i **A'S** oznaczymy symbolem  $\alpha$  to możemy powiedzieć, że drzewo z punktu **S** widzimy pod tym właśnie kątem. Mówimy też że kąt  $\alpha$  to kąt widzenia drzewa.

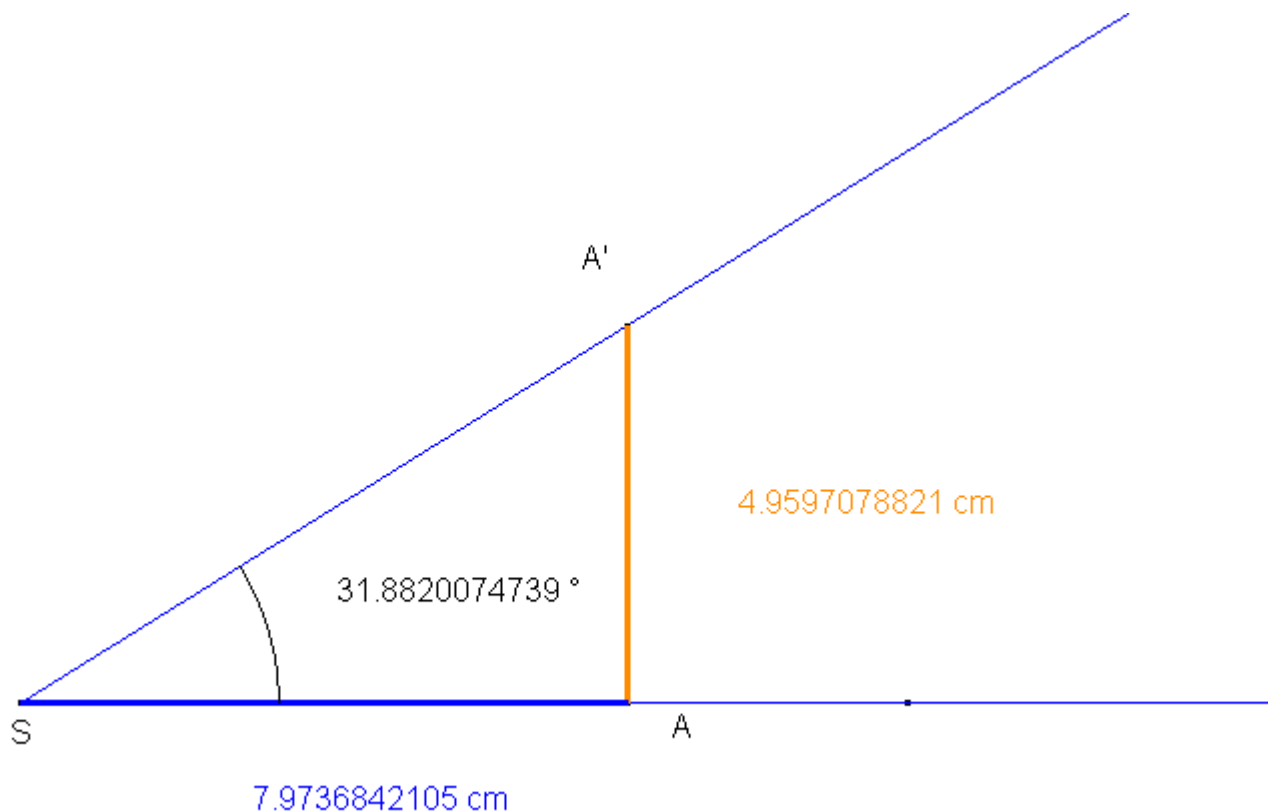


Matematycy już w Starożytności znali odpowiednie proporcje długości boków w trójkącie prostokątnym. Wiedzieli też, że proporcje te są takie same dla tego samego kąta.





Na poniższym aplecie przesuвай punkt **A** wzdłuż ramienia kąta **ASA'**. Sprawdź, czy dla ustalonego kąta  $\alpha$  stosunek długości odcinków **AA'** do długości **AS** zmienia się, czy jest taki sam?

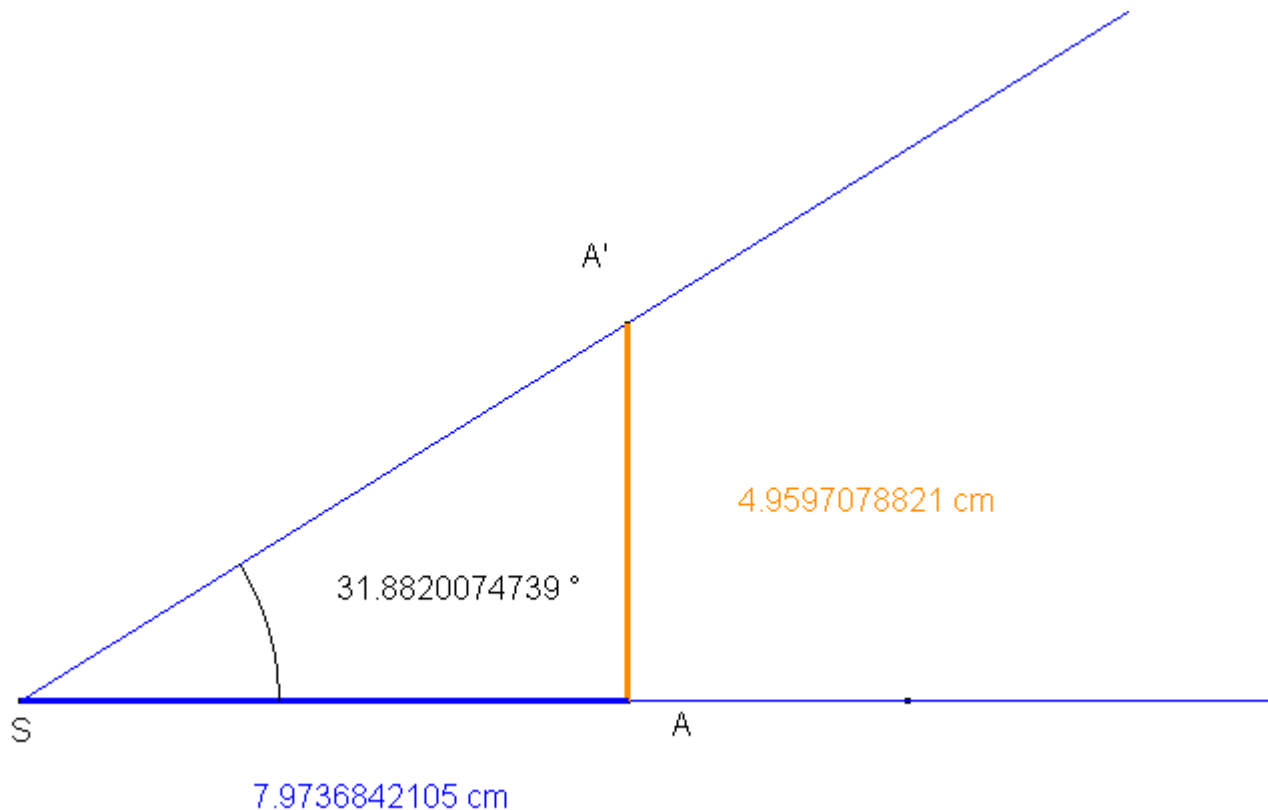


Wybierz odpowiedź na pytanie z poprzedniego slajdu i prześlij ją nauczycielowi matematyki:

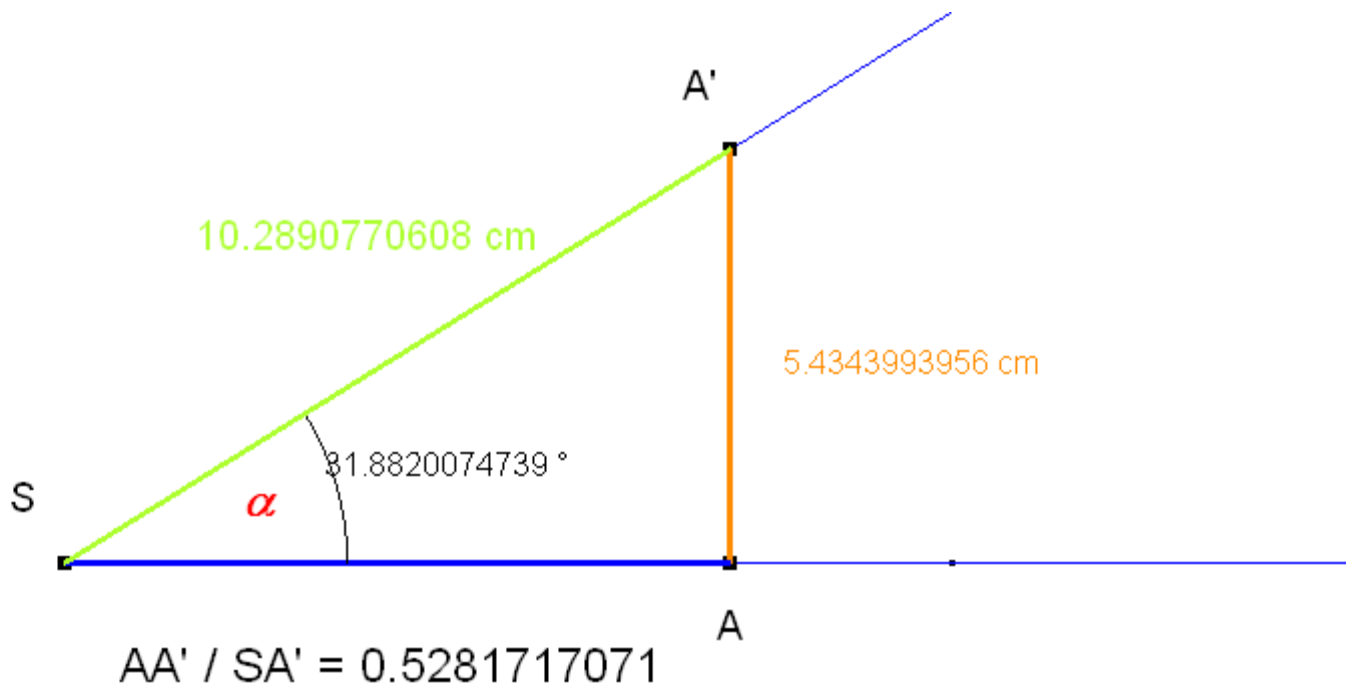
Stosunek długości odcinków  $AA'$  do długości  $AS$  zmienia się / nie zmienia się (1) .

Czy wiesz, dlaczego tak się dzieje?

Spróbuj to wyjaśnić - prześlij wyjaśnienie tego faktu swojemu nauczycielowi matematyki **(2)**.



A teraz zbadaj, czy dostrzeżoną w poprzednim przykładzie własność spełnia również stosunek długości odcinków **AA'** do **SA'**.



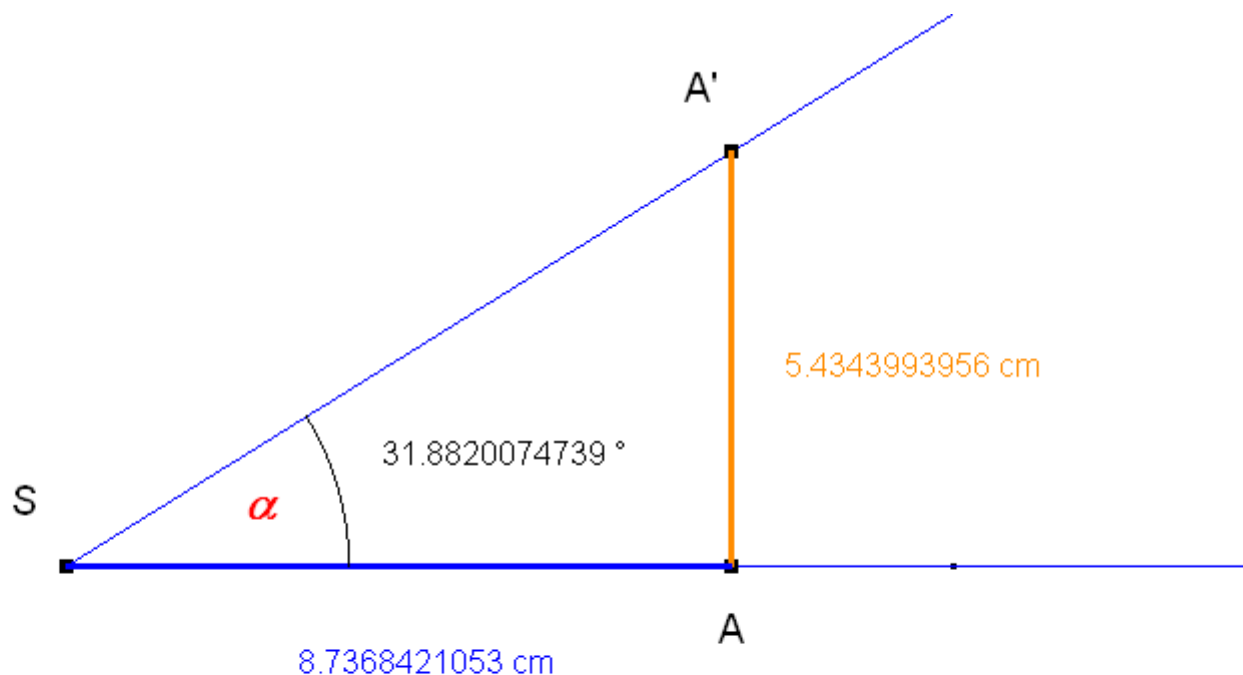
Wybierz prawidłową odpowiedź i prześlij ją nauczycielowi matematyki:

Stosunek długości odcinków **AA** do długości **SA'** zmienia się / nie zmienia się **(3)** .

# **FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO W TRÓJKĄCIE PROSTOKĄTNYM**

Podsumujmy fakty które dostrzegłeś w poprzednich slajdach;

We wszystkich trójkątach prostokątnych o tych samych miarach kątów wewnętrznych stosunki długości odpowiednich boków są zawsze takie same.



$$AA' / SA = 0.622009569$$

4

Przesuwając punkt **A** na poniższym aplecie konstruujesz rodzinę niewidocznych trójkątów o tych samych miarach kątów wewnętrznych.

Jak widać stosunki długości niektórych boków tych trójkątów są stale takie same.



$$AA' / SA = 0.622009569$$

$$\frac{4}{SA} = 0.849137590$$

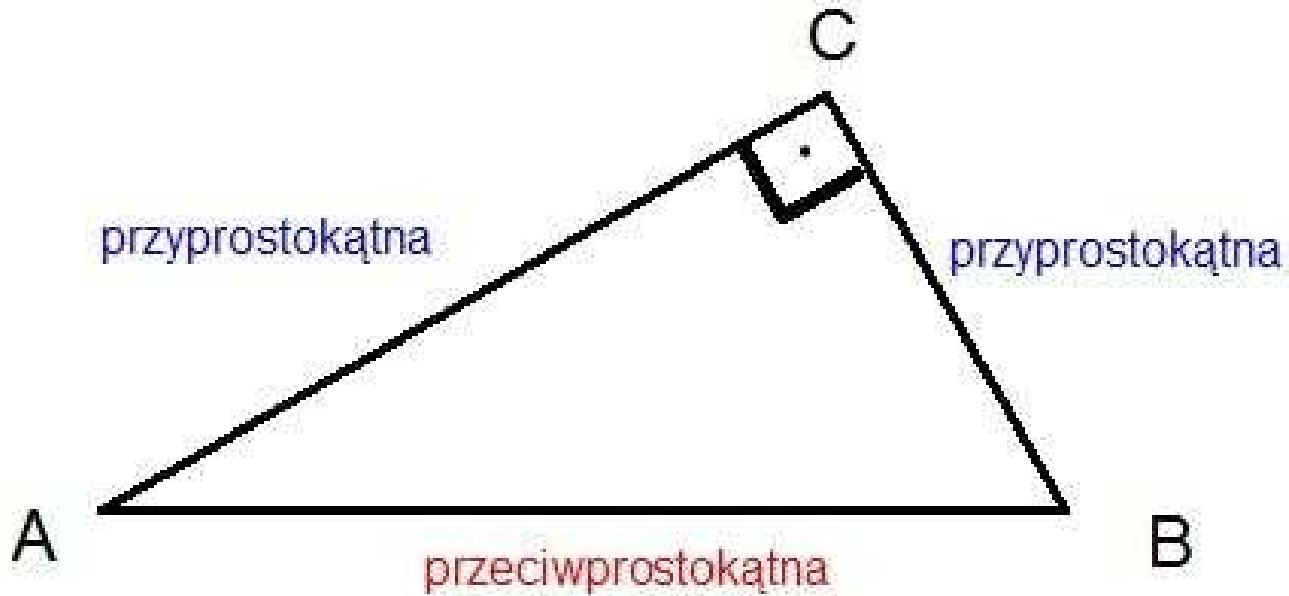
$$\frac{6}{AA'} = 0.5281717071$$



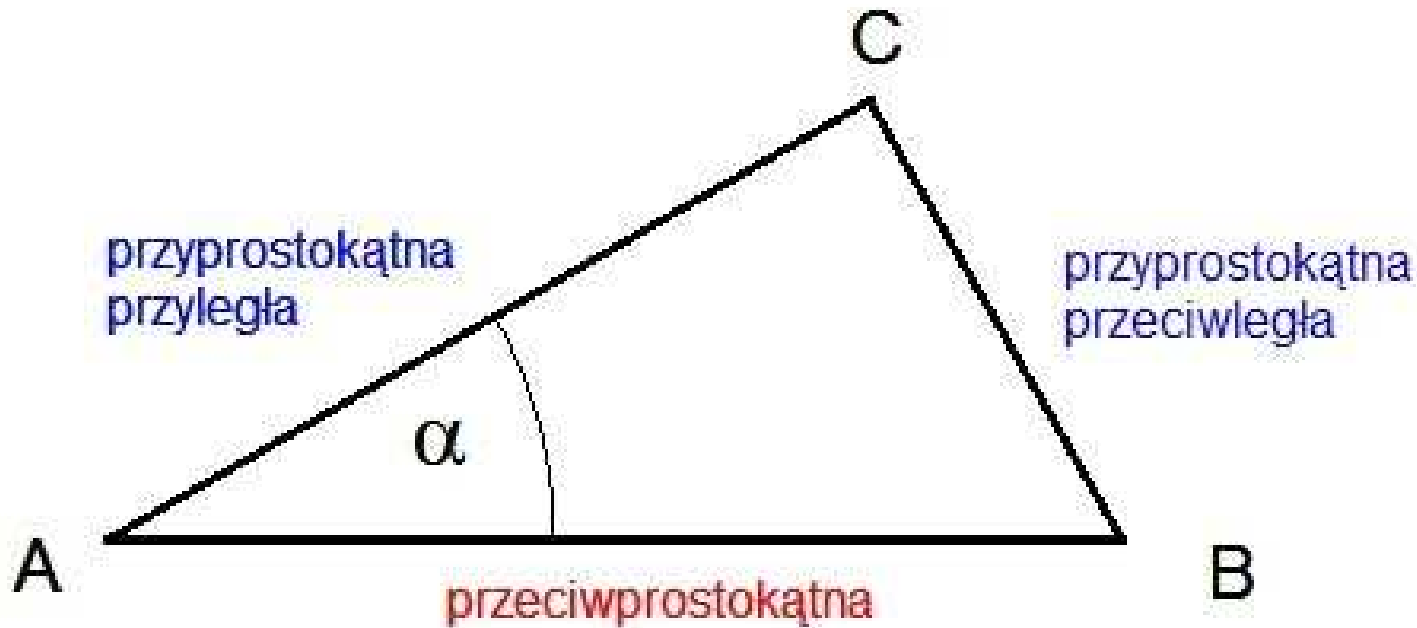
To, że stosunki odpowiednich boków **w trójkącie prostokątnym są takie same** dostrzegali już matematycy Starożytności, ale dopiero **Leonard Euler** ok. 1772 roku nazwał te proporcje **funkcjami trygonometrycznymi** [*trigonom* = trójkąt, *metreo* = mierzę].

Wprowadził on do matematyki pojęcie **sinus, cosinus, tangens i cotangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym**, które dziś nazywamy funkcjami trygonometrycznymi.

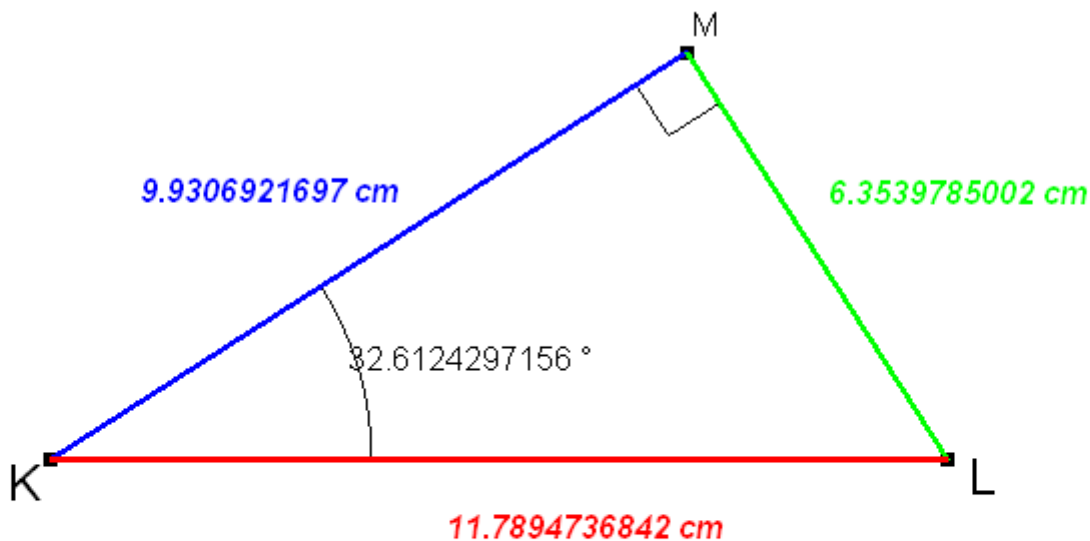
Najpierw poznasz je dla kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.  
Już wiesz, że:  
krótsze boki w tym trójkącie nazywamy **przyprostokątnymi** -  
wszak leżą przy kącie prostym,  
najdłuższy bok trójkąta prostokątnego to **przeciwprostokątna** -  
wszak leży naprzeciw kąta prostego.



Wprowadźmy teraz w trójkącie kąt przy wierzchołku **A**.  
Ta przyprostokątna, która leży przy tym kącie nazywa się **przyprostokątną przyległą**, a ta druga - **przyprostokątną przeciwległą**.

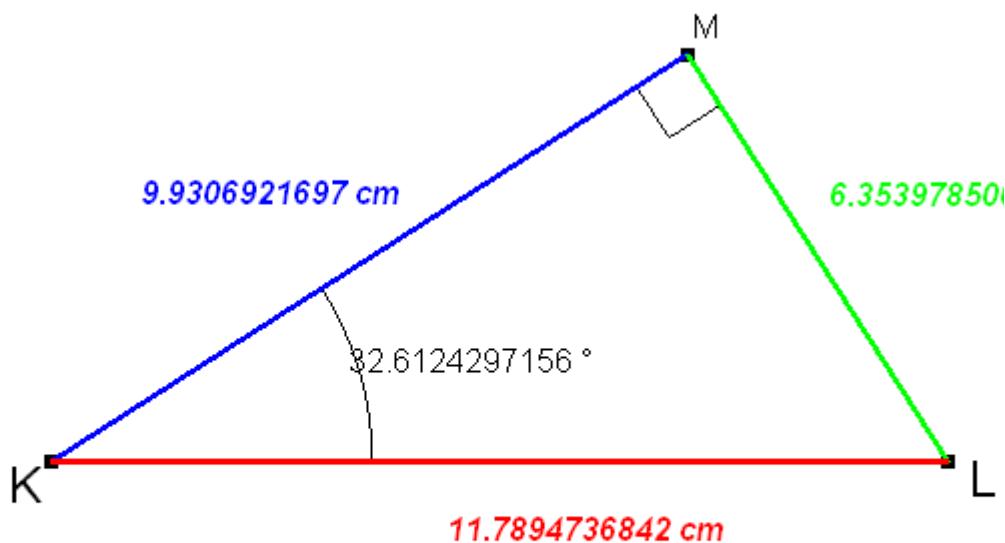


Euler nazwał iloraz długości przyprostokątnej przeciwległej  
kątowni do długości przeciwprostokątnej **sinusem kąta**.  
Na poniższym aplecie jest to iloraz **ML/KL**



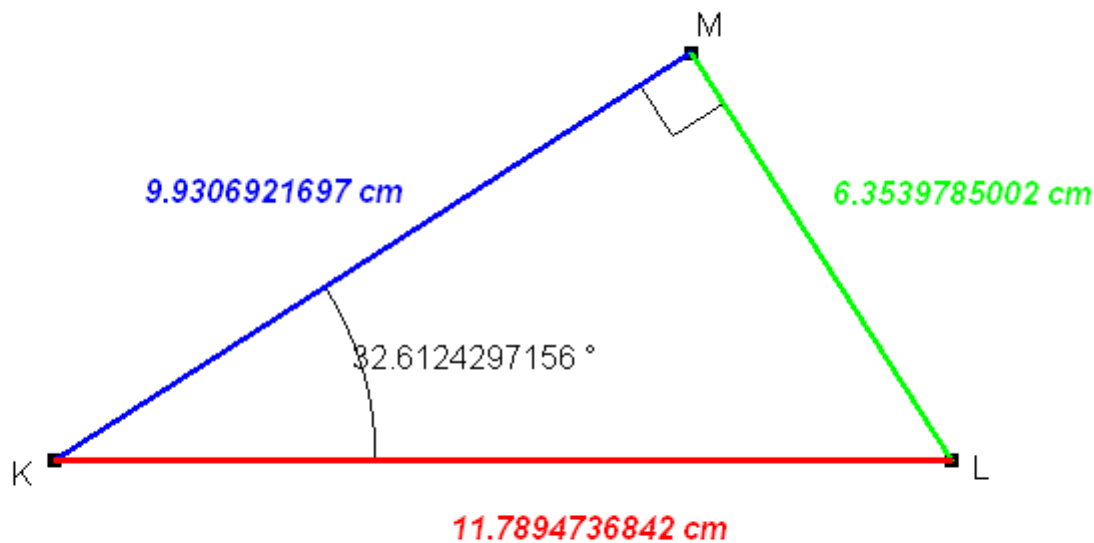
$$\sin 32.6124297156^\circ = \frac{6.3539785002 \text{ cm}}{11.7894736842 \text{ cm}} = 0.5389535335$$

Poruszaj na poniższym aplecie punktem **M** zmieniając w ten sposób miarę kąta przy wierzchołku **K**.  
Wyznacz wartości sinusa dla kilku różnych kątów i wpisz je w postaci tabeli w pliku rozwiązań **(4)**.



$$\sin 32.6124297156^\circ = \frac{6.3539785002 \text{ cm}}{11.7894736842 \text{ cm}} = 0.5389535335$$

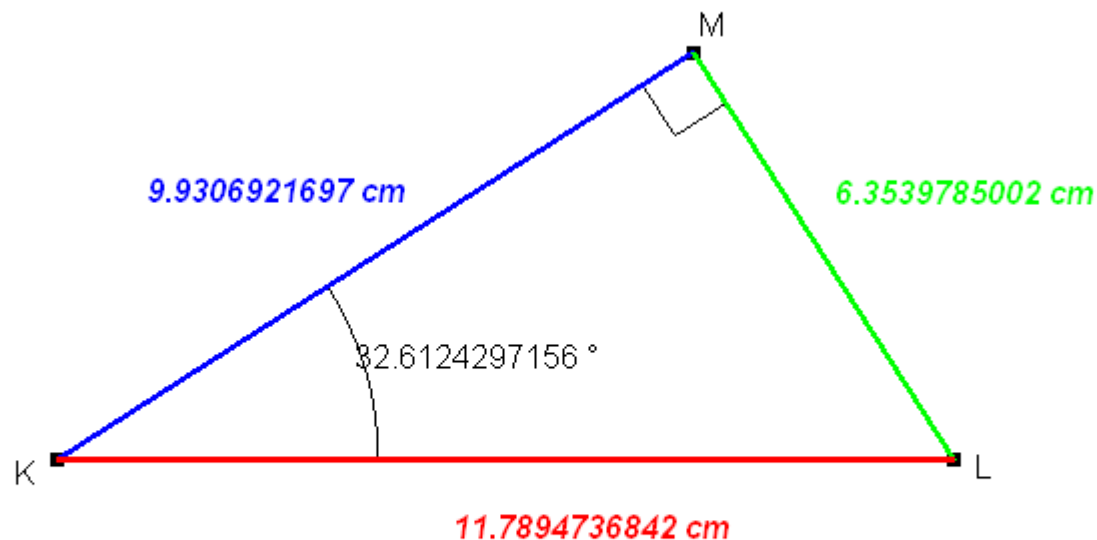
Podobnie Euler nazwał iloraz długości przyprostokątnej przyległej do długości przeciwprostokątnej **cosinusem kąta**.  
Na aplecie jest to iloraz **KM/KL**



$$\cos 32.6124297156^\circ = \frac{9.9306921697 \text{ cm}}{11.7894736842 \text{ cm}} = 0.8423354965$$

Poruszaj na poniższym aplecie punktem **M** zmieniając w ten sposób miarę kąta przy wierzchołku **K**.

Wyznacz wartości cosinusa dla kilku różnych kątów i wpisz je do tabeli w pliku rozwiązań **(5)**.



$$\cos 32.6124297156^\circ = \frac{9.9306921697 \text{ cm}}{11.7894736842 \text{ cm}} = 0.8423354965$$

Czy może się zdarzyć, by wartość sinusa  
lub cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym  
przekroczyła wartość 1?

Dlaczego? **(6)**



Uzupełnij zapis i prześlij swojemu nauczycielowi:

Wartości sinusów i cosinusów kątów jest  
zawsze większa niż ..... oraz mniejsza niż ..... (7):

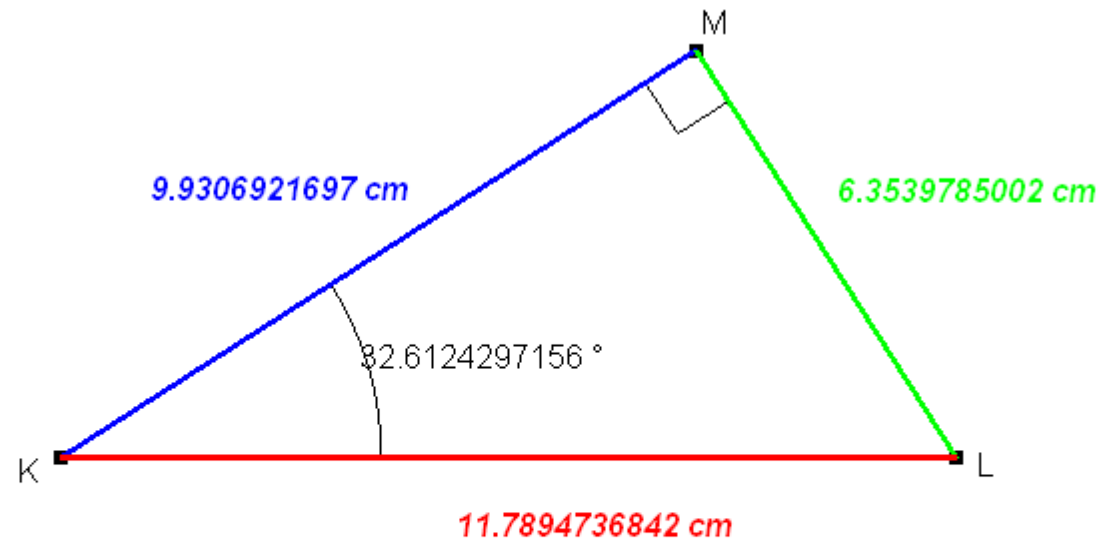
Zauważ, że:

funkcje sinus i cosinus zdefiniowane były jako stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej.

Spróbujmy teraz wyznaczyć stosunki długości przyprostokątnych do siebie.

Leonard Euler zaproponował aby stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej kątowi  $\alpha$  do długości przyprostokątnej przyległej do niego nazwać ***tangensem*** tego kąta

Na poniższym aplecie jest to iloraz  $ML/KM$



$$\operatorname{tg} 32.6124297156^\circ = \frac{6.3539785002\text{ cm}}{9.9306921697\text{ cm}} = 0.6398323895$$

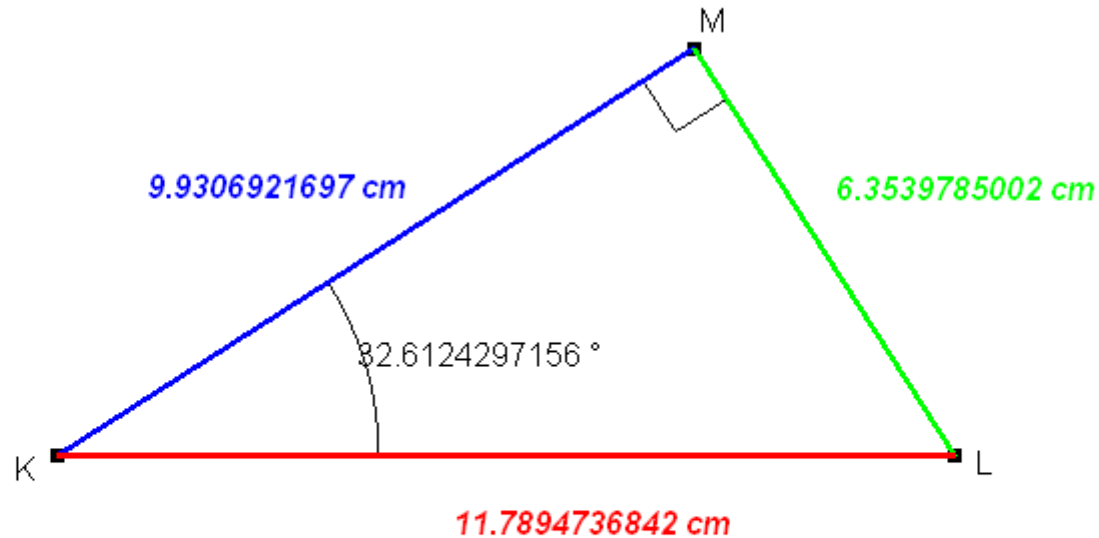
Jeśli utworzymy odwrotność poprzedniego ilorazu,  
wówczas otrzymamy ***cotangens*** kąta  $\alpha$ .

Uzupełnij poniższy zapis :

Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym  
nazywamy  
iloraz długości .....  
do długości ..... **(8)**.

Uzupełnij zapis:

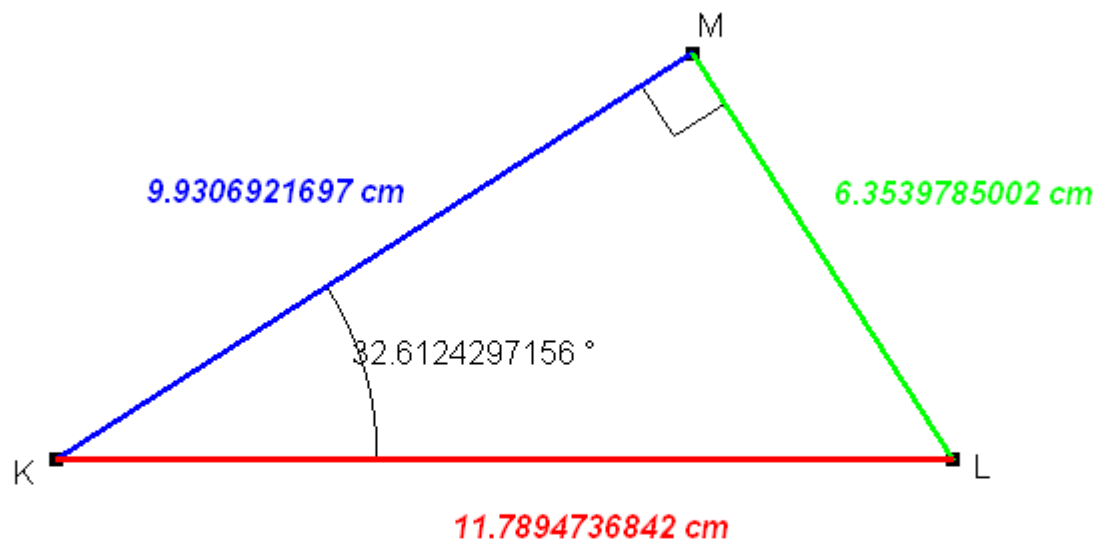
Na poniższym aplecie jest to iloraz .....(9)



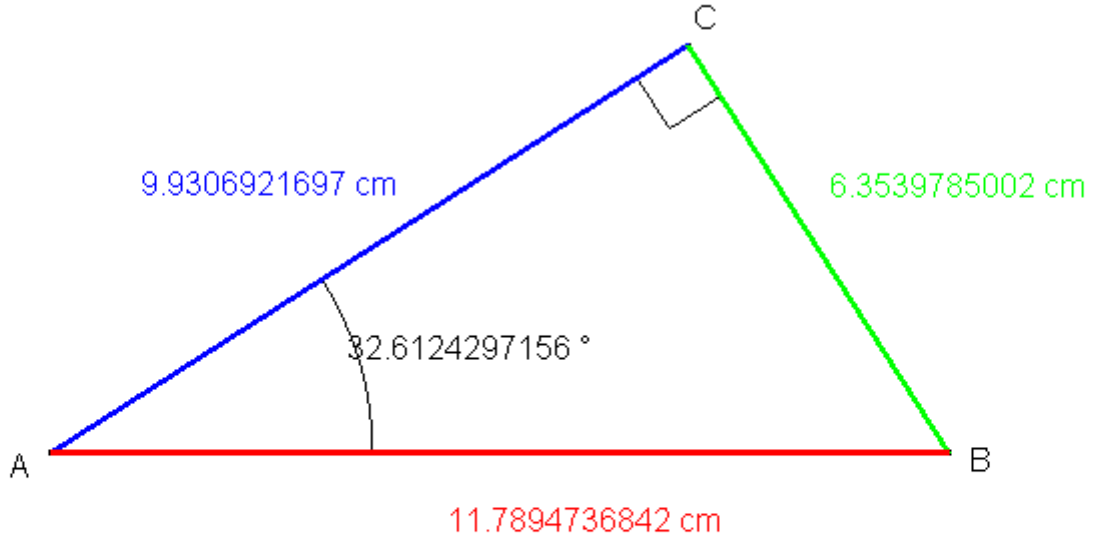
$$\text{ctg } 32.6124297156^\circ = \frac{9.9306921697 \text{ cm}}{6.3539785002 \text{ cm}} = 1.5629093126$$



Poniższy aplet umożliwia odczytywanie wartości funkcji trygonometrycznych kątów, których miary możesz dobrać według życzeń.



Użyj swojego kalkulatora i korzystając z poniższego apletu wyznacz wartości tangensa i cotangensa dla kilku różnych kątów i umieść je w tabeli zamieszczonej w pliku Worda **(10)**.



sin A												
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	0,0000
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	90°
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	89°
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	88°
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	87°
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	86°
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	85°
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	84°
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	83°
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	82°
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	81°
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	80°
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	79°
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	78°
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	77°
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	76°
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	75°
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	74°
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	73°
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	72°
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	71°
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	70°
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	69°
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	68°
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	67°
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	66°
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	65°
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	64°
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	63°
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	62°
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	61°
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	60°
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	59°
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	58°
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	57°
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	56°
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	55°
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	54°
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	53°
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	52°
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	51°
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	50°
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	49°
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	48°
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	47°
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B
												cos B

Wartości funkcji trygonometrycznych kątów o mierze w zakresie od 0° do 90° można odczytać w specjalnie do tego przygotowanych tablicach.

Tablice wartości sinusów i kosinusów

		sin A													
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0,0000	90°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	89°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0588	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	65°	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	60°	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55°	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50°	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	45°	2	4	6
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'
	cos B														

Popatrz jak zbudowana jest taka tabela.  
W pierwszej kolumnie znajdują się miary kątów wyrażone w całkowitych wartościach stopni od 0° do 44°

Kąt 45° i większe odczytujemy patrząc od dołu w górę w kolumnie po prawej stronie.

Natomiast środek tabeli wypełniają miary wyrażone w minutach.

		sin A													
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0,0000	90°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	89°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0588	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	65°	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	60°	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55°	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50°	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	45°	2	4	6
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'
												cos B			

Odczytajmy  $\sin 23^{\circ} 13'$

W tym celu w pierwszej kolumnie poszukujemy liczby 23.

Tablice wartości sinusów i kosinusów

		sin A													
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
											0,0000	90°			
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	65°	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	60°	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55°	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50°	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	45°	2	4	6
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'
												cos B			

Odczytajmy sin 23° 13'

W tym celu w pierwszej kolumnie poszukujemy liczby 23.

Układamy tam linijkę poziomą by odczytać pozostałe wartości kąta.







Tablice wartości sinusów i kosinusów

		sin A													
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	1'	2'	3'	
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	90°			
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	89°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0872	85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	65°	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	60°	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55°	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50°	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	45°	2	4	6
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'
													cos B		

Ale mamy znaleźć  $\sin 23^{\circ} 13'$

Musimy więc dodać lub odjąć **poprawkę**, którą odnajdziemy w ostatniej kolumnie wypełnionej trzema kolumnami liczb.

Już mamy  $\sin 23^{\circ} 12'$  więc musimy dodać jeszcze poprawkę dla 1'

Odnajdujemy liczbę 1' w nagłówku ostatniej kolumny i przeprowadzamy liniijkę w dół.

Linijka ta z czerwoną linią wskazuje w przecięciu poprawkę 3

Tablice wartości sinusów i kosinusów

sin A												
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	0,0000
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	90°
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	89°
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	88°
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	87°
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	86°
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	85°
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	84°
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	83°
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	82°
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	81°
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	80°
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	79°
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	78°
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	77°
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	76°
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	75°
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	74°
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	73°
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	72°
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	71°
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	70°
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	69°
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	68°
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	67°
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	66°
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	65°
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	64°
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	63°
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	62°
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	61°
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	60°
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	59°
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	58°
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	57°
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	56°
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	55°
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	54°
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	53°
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	52°
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	51°
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	50°
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	49°
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	48°
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	47°
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B
												cos B

Ale mamy znaleźć  $\sin 23^{\circ} 13'$

Musimy więc dodać lub odjąć **poprawkę**, którą odnajdziemy w ostatniej kolumnie wypełnionej trzema kolumnami liczb.

Już mamy  $\sin 23^{\circ} 12'$  więc musimy dodać jeszcze poprawkę dla 1'

Odnajdujemy liczbę 1' w nagłówku ostatniej kolumny i przeprowadzamy linijkę w dół.

Linijka ta z czerwoną linią wskazuje w przecięciu **poprawkę 3**

Dodajemy tę poprawkę do poprzedniego wyniku 0,3923 otrzymując wartość

$$\sin 23^{\circ} 13' = 0,3926$$

Istnieje podobna  
tabela dla wartości  
tangens kątów o  
mierze w zakresie

$[0^\circ, 90^\circ)$

Wartości tangensów i kotangensów

tg A																
		0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'	1'	2'	3'	
											0,0000	90°				
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9	
1°	0,0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9	
2°	0,0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87°	3	6	9	
3°	0,0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86°	3	6	9	
4°	0,0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0,0875	85°	3	6	9	
5°	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84°	3	6	9	
6°	0,1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83°	3	6	9	
7°	0,1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82°	3	6	9	
8°	0,1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81°	3	6	9	
9°	0,1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	0,1763	80°	3	6	9	
10°	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79°	3	6	9	
11°	0,1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78°	3	6	9	
12°	0,2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77°	3	6	9	
13°	0,2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76°	3	6	9	
14°	0,2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	0,2679	75°	3	6	9	
15°	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74°	3	6	9	
16°	0,2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73°	3	6	9	
17°	0,3057	3076	3095	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72°	3	6	10	
18	0,3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71°	3	6	10	
19°	0,3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0,3640	70°	3	7	10	
20°	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69°	3	7	10	
21°	0,3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68°	3	7	10	
22°	0,4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67°	3	7	10	
23°	0,4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66°	3	7	10	
24°	0,4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	0,4663	65°	4	7	11	
25°	0,4663	4684	4705	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64°	4	7	11	
26°	0,4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63°	4	7	11	
27°	0,5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62°	4	7	11	
28°	0,5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61°	4	8	11	
29°	0,5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0,5774	60°	4	8	12	
30°	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59°	4	8	12	
31°	0,6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58°	4	8	12	
32°	0,6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57°	4	8	12	
33°	0,6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56°	4	8	13	
34°	0,6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	0,7002	55°	4	9	13	
35°	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54°	4	9	13	
36°	0,7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53°	5	9	14	
37°	0,7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52°	5	9	14	
38°	0,7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8041	8069	8098	51°	5	9	14	
39°	0,8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0,8391	50°	5	10	15	
		60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	<b>B</b>	1'	2'	3'

Ctg B

A jak odczytać z tabeli sinusów wartość cosinusa danego kąta?

Jak widać, u dołu po prawej stronie tabeli jest zaznaczona wartość  $\cos B$ .

Odczytujemy ją podobnie tylko od dołu w górę w przeciwnym kierunku.

Poprawkę odczytujemy tak samo, ale musimy obserwować, czy wartość cosinusa maleje czy rośnie w trakcie zwiększania się miary kąta.

Wtedy wiemy, czy dodać czy odjąć poprawkę.

Podobnie odczytujemy wartości cotangensa kąta w zakresie  $[0^\circ, 90^\circ)$

Tablice wartości sinusów i kosinusów

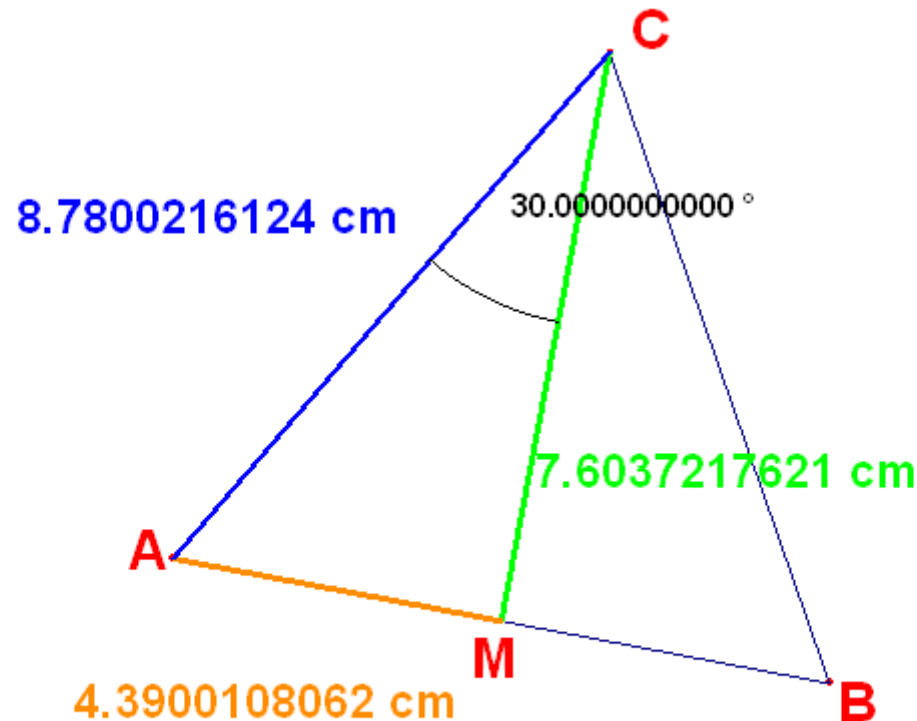
		sin A														
A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'	
											0,0000					
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175		89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349		88°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523		87°	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698		86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872		85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045		84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219		83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392		82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564		81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736		80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908		79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079		78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2232	2250		77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419		76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588		75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756		74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924		73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090		72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256		71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420		70°	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584		69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746		68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907		67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067		66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226		65°	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384		64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540		63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695		62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848		61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000		60°	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150		59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299		58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446		57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592		56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736		55°	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878		54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018		53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157		52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293		51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428		50°	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561		49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691		48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820		47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947		46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071		45°	2	4	6
		60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'
													cos B			

# **SINUS i COSINUS KĄTÓW $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$**

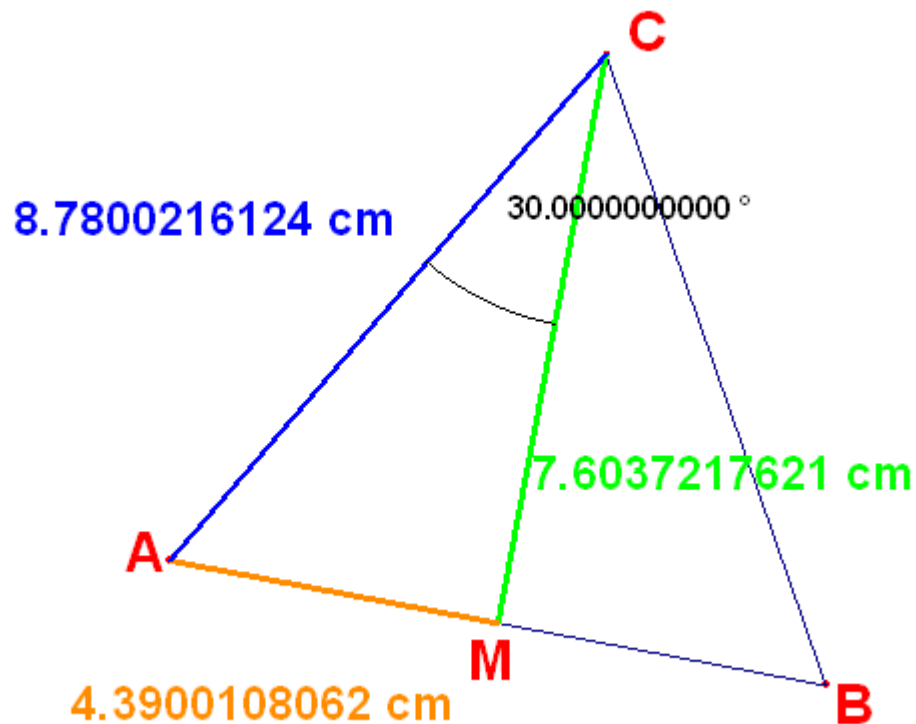
Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów  $30^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$  i  $60^{\circ}$  można wyznaczyć geometrycznie umieszczając je w odpowiednich figurach.

Kąty te występują na przykład w trójkącie równobocznym i w kwadracie.

Nie mierząc długości boków można wyznaczyć  $\sin 30^\circ$ , bowiem jest to iloraz długości  $AM$  połowy boku  $AB$  trójkąta równobocznego  $ABC$  do długości jego boku  $AC$ , który ma taką samą długość jak  $AB$ .



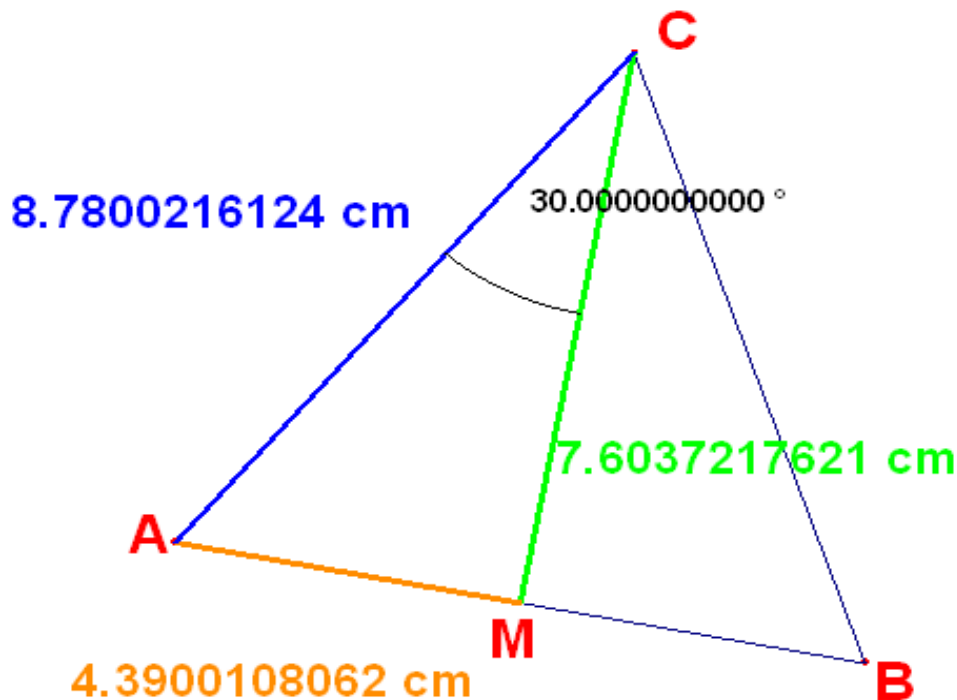
Wartość sinusa  $30^\circ$  wynosi więc: ..... (11)





Wartość cosinusa  $30^\circ$  jest natomiast równa ilorazowi **CM** do **CA**. Ale **CM** to wysokość trójkąta równobocznego. Jeśli długość boku tego trójkąta wynosi **a**, wówczas, jak pamiętasz z gimnazjum, jego wysokość ma długość

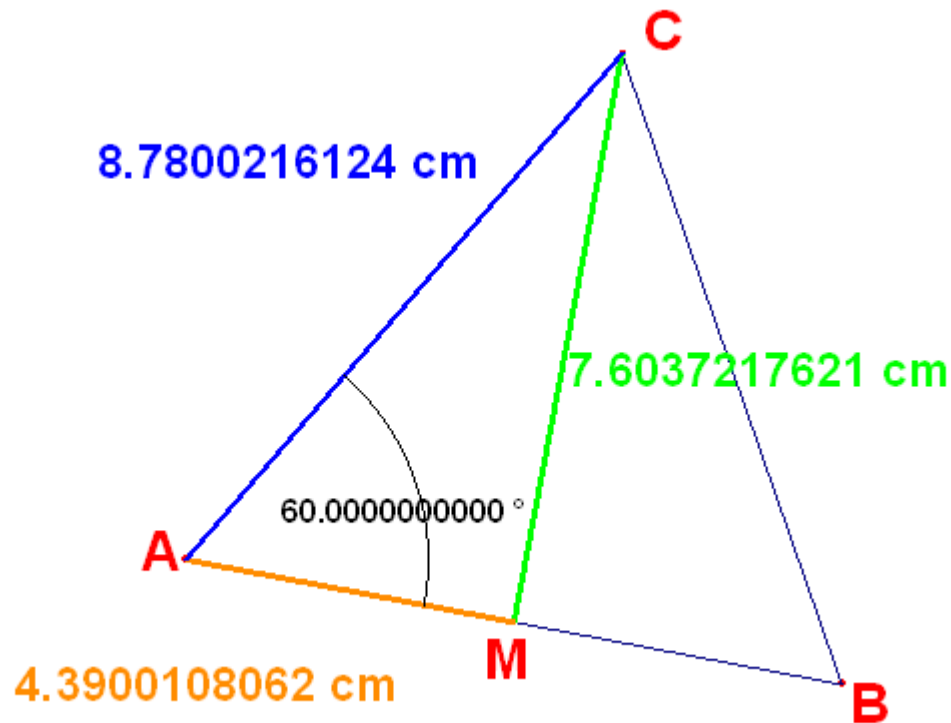
$$\frac{a\sqrt{3}}{2}$$



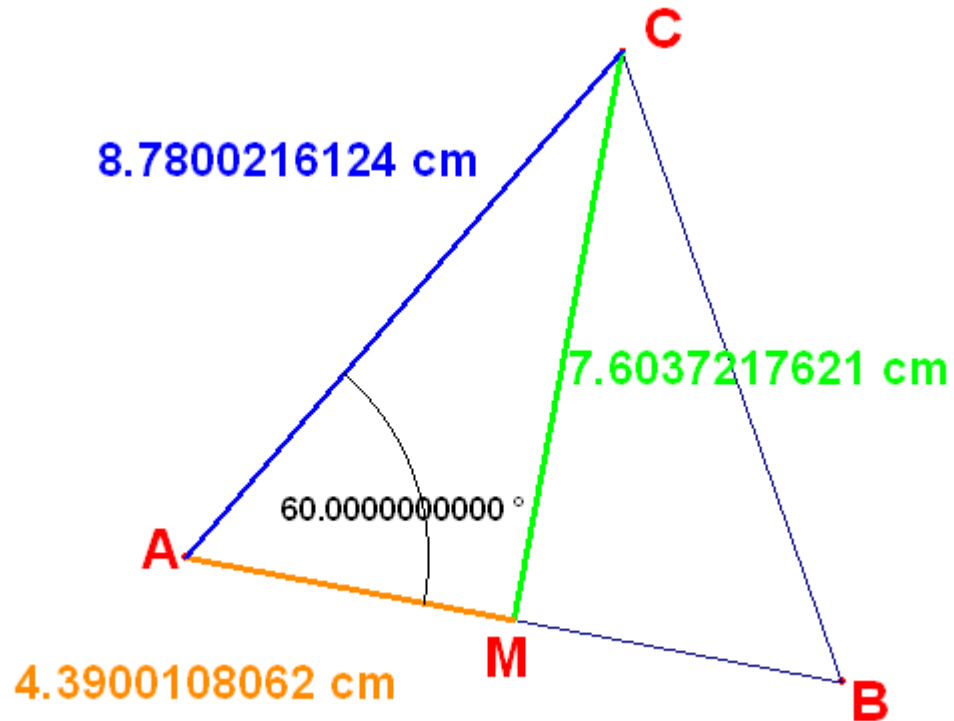
Zatem wartość  $\cos 30^\circ$  wynosi ..... **(12)**

Podobnie jest dla kąta  $60^{\circ}$ .

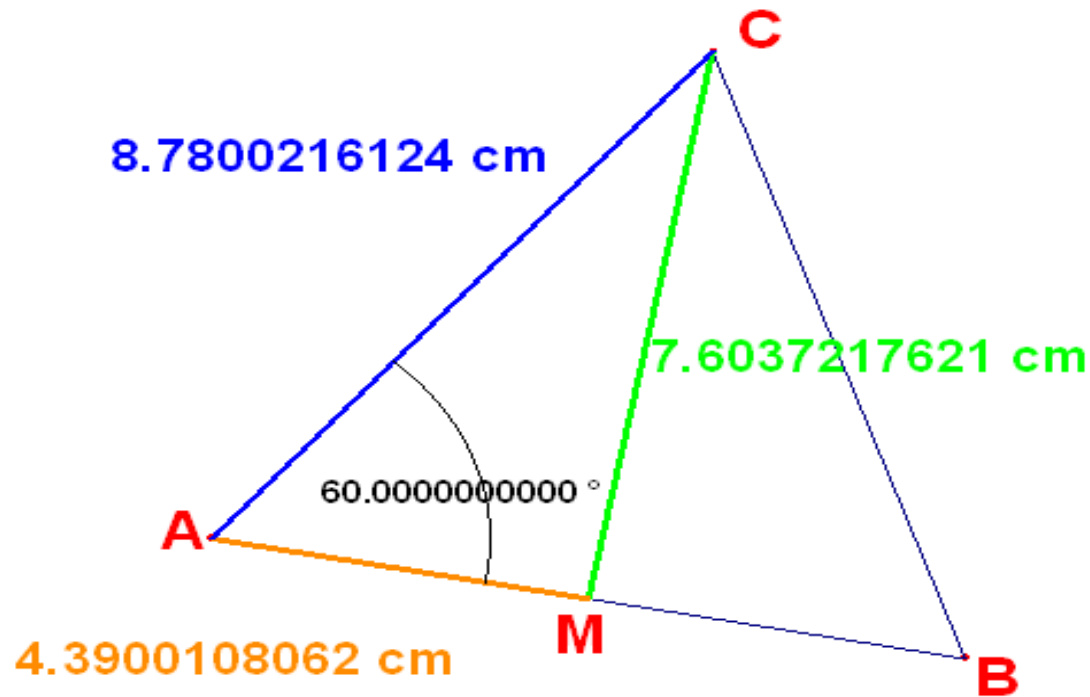
Nie mierząc długości boków można wyznaczyć  $\cos 60^{\circ}$ ,  
bowiem jest to iloraz długości **AM** połowy boku **AB** trójkąta  
równobocznego **ABC** do długości jego boku **AC**.



Wartość  $\cos 60^\circ$  wynosi więc: ..... (13)



Wartość sinusa  $60^\circ$  jest natomiast równy ilorazowi **CM** do **CA**. Ale **CM** to wysokość trójkąta równobocznego. Jeśli długość boku tego trójkąta wynosi **a**, wówczas, jak pamiętasz z gimnazjum, jego wysokość ma długość  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Zatem wartość  $\sin 60^\circ$  wynosi ..... **(13)**

Czy zauważyłeś, że

$$\sin 30^{\circ} = \cos 60^{\circ}$$

natomiast

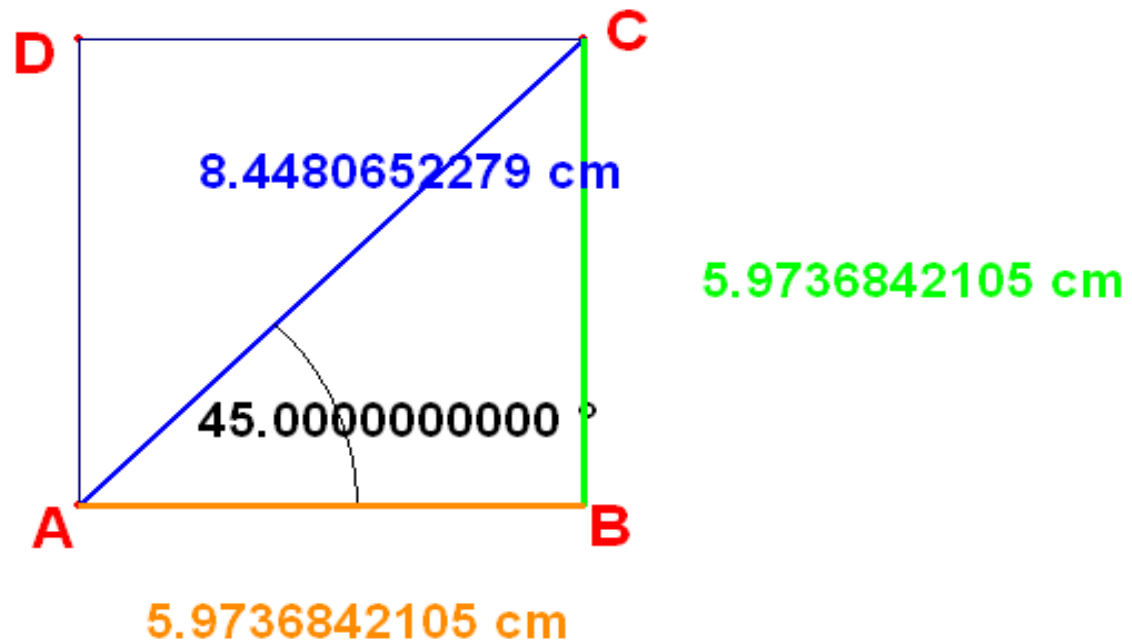
$$\sin 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} \quad ?$$

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $45^{\circ}$  poszukamy w kwadracie, bowiem tam przekątna tworzy z jego bokiem kąt o tej mierze.



Wiesz, że długość przekątnej kwadratu o długości boku  $a$  wynosi  $a\sqrt{2}$

Wyprowadź samodzielnie wartość sinusa i cosinusa kąta  $45^\circ$



$$\sin 45^{\circ} = \dots\dots\dots (15)$$

$$\cos 45^{\circ} = \dots\dots\dots (16)$$

# **TOŻSAMOSCI TRYGONOMETRYCZNE**

Może zwróciłeś uwagę na równość  
 $\sin 30^{\circ} = \cos 60^{\circ}$ , oraz  $\cos 30^{\circ} = \sin 60^{\circ}$ .

Czy to przypadek?

Możesz sprawdzić, że również:

$\sin 47^{\circ}30' = \cos 42^{\circ}30'$  oraz  $\cos 47^{\circ}30' = \sin 42^{\circ}30'$  .

Ile wynosi suma kątów  $47^{\circ}30'$  i  $42^{\circ}30'$  ?

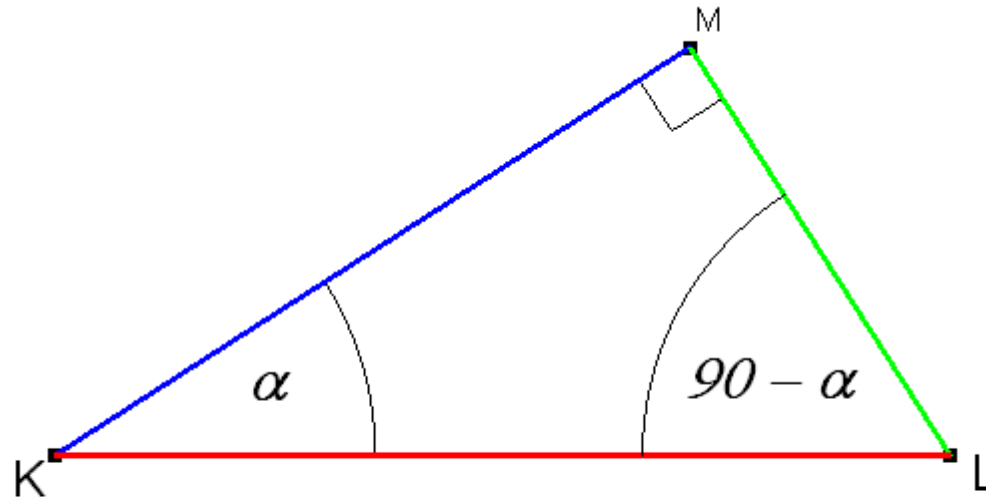
Czy domyślasz się ogólnej reguły?

Łatwo zauważyć, że

$$\sin \alpha = ML / KL = \cos (90 - \alpha)$$

Podobnie:

$$\cos \alpha = KM / KL = \sin (90 - \alpha)$$

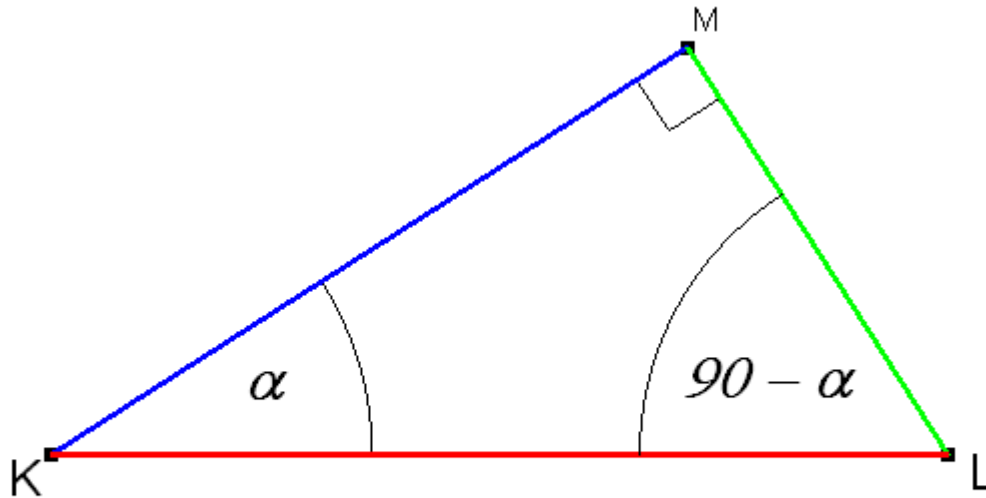


W trójkącie prostokątnym zachodzi teza twierdzenia Pitagorasa, którą w przypadku poniższego apletu można zapisać:

$$ML^2 + KM^2 = KL^2$$

Dzieląc tę tożsamość stronami przez  $KL^2$  otrzymamy kolejną zależność:

$$\frac{ML^2}{KL^2} + \frac{KM^2}{KL^2} = \frac{KL^2}{KL^2}$$



która przyjmuje kolejno postacie:

$$\left(\frac{ML}{KL}\right)^2 + \left(\frac{KM}{KL}\right)^2 = 1$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Tę ostatnią, zwaną popularnie **jedynką trygonometryczną** poznałeś na lekcjach matematyki.

Ostatnia prosta zależność wiąże ze sobą funkcje sinus i tangens,  
oraz podobnie cosinus z cotangensem:

$$tg \alpha = \frac{ML}{MK} = \frac{\frac{ML}{KL}}{\frac{MK}{KL}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$ctg \alpha = \frac{MK}{ML} = \frac{\frac{MK}{KL}}{\frac{ML}{KL}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Zbierzmy udowodnione tożsamości w całość:

Tożsamości te służą do wyrażania jednych funkcji poprzez drugie, obliczanie jednych, gdy dane są inne oraz do udowadniania innych tożsamości.

Zadania z ich wykorzystaniem rozwiązywałeś zapewne na lekcjach matematyki.

Znajdują się one w wielu zbiorach zadań i są tam również omówione metody ich rozwiązywania.

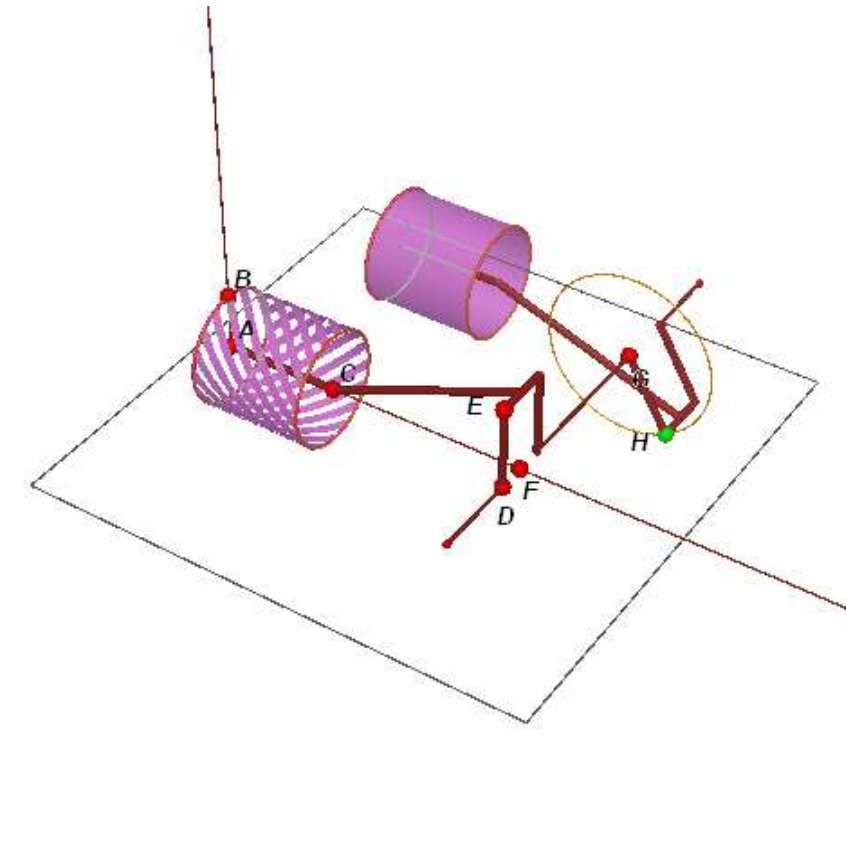
# **POJĘCIE KĄTA SKIEROWANEGO**

Dotychczas wyznaczane były funkcje trygonometryczne kątów ostrych, jak to miało w trójkącie prostokątnym.

Praktycznie jednak w w mechanice i w innych urządzeniach mamy do czynienia z kątami przekraczającymi miarę kąta prostego.

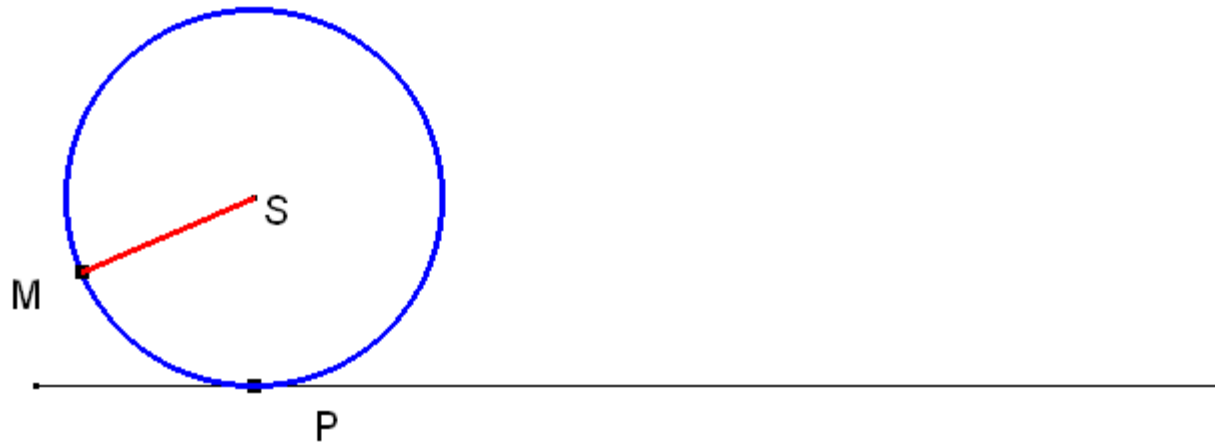
Na przykład punkt leżący na korbowodzie silnika parowego obraca się osiągając po każdym kolejnym obrocie kolejną miarę  $360^{\circ}$ .

Miara ta więc może po kilkunastu obrotach osiągnąć wartość nawet kilka tysięcy stopni.



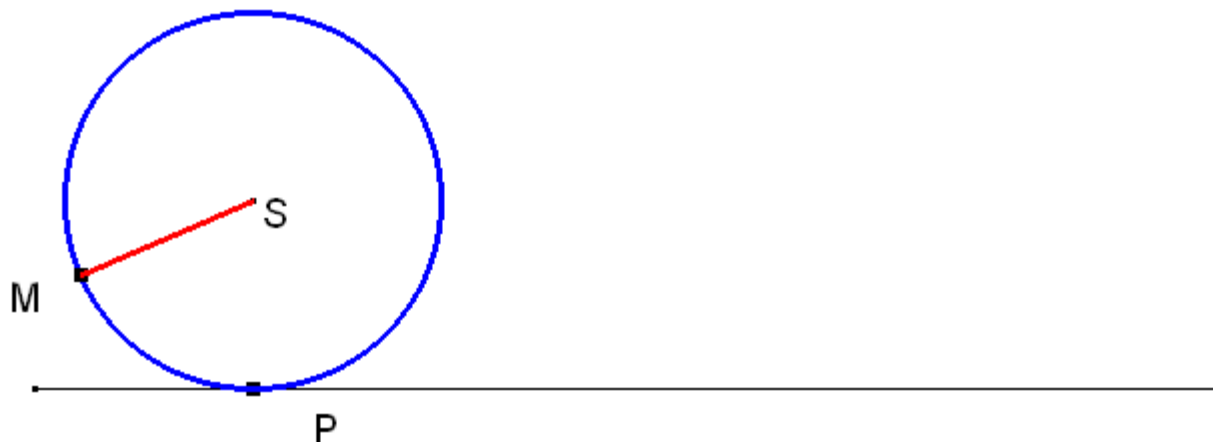
Jaką miarę kąta zatacza punkt ***M*** toczącego się po odcinku koła na poniższym aplecie?

Koło możesz poruszać przesuwając punkt ***P*** po odcinku.



A teraz obracając koło obserwuj, w którą stronę jest skierowany kąt gdy koło toczy się od strony lewej do prawej, a jakie, gdy od prawej do lewej?

Skierowanie określ w stosunku do ruchu wskazówek zegara.



Wybierz poprawną odpowiedź i prześlij ją nauczycielowi.

Gdy obracam od strony lewej do prawej,  
wówczas kąt zakreślony przez punkt ***M***  
jest skierowany zgodnie / niezgodnie  
z ruchem wskazówek zegara. **(17)**



Jak widzisz, kąt cechuje nie tylko jego miara, ale również zwrot, w którym go rysujesz.

Czy da się wprowadzić funkcje trygonometryczne takich kątów i wyznaczyć ich wartości?

Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna.

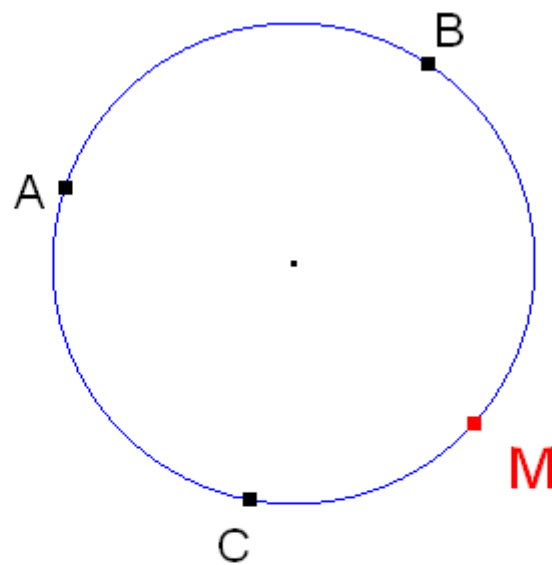
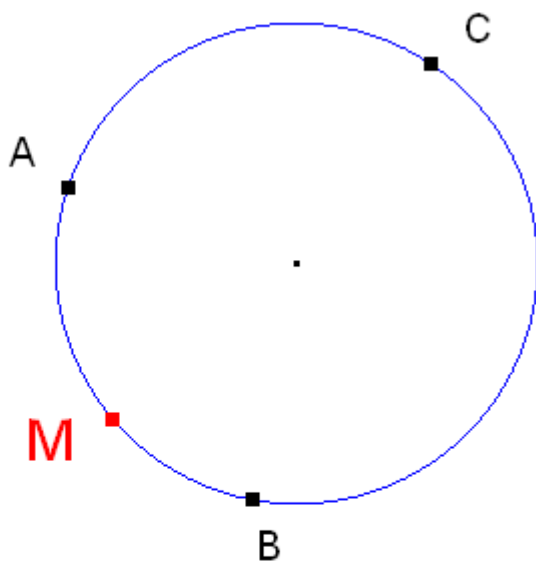
W dalszej części pokazu poznasz sposób w jaki to można zrobić.

Najpierw wprowadzimy pojęcie orientacji trójki punktów:

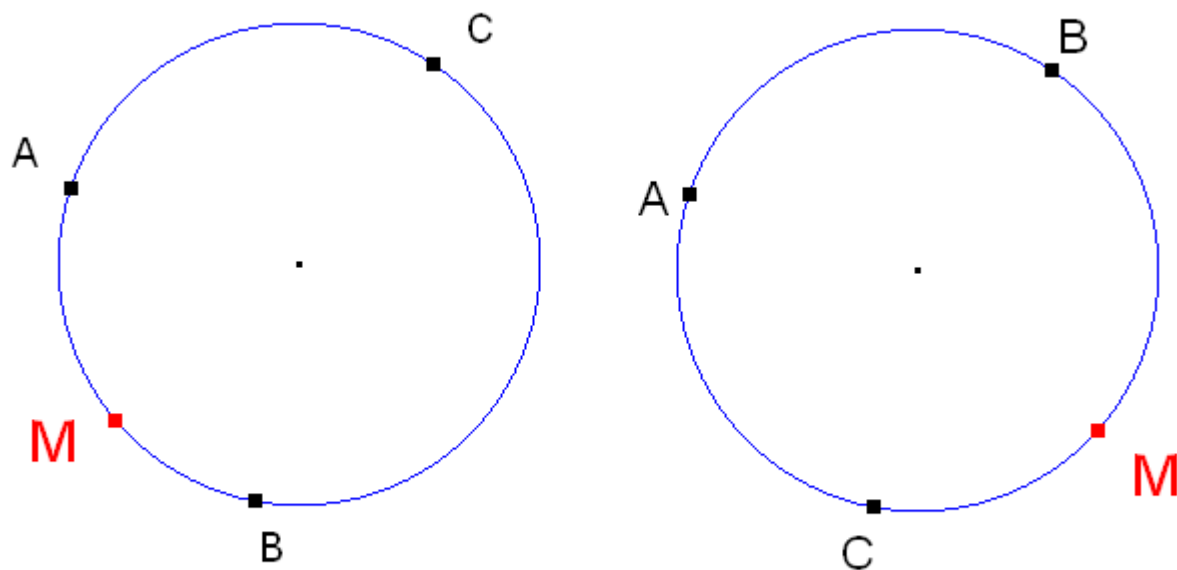
jeśli na okręgu opisanym na trójkącie **ABC** będzie się poruszać mrówka **M** pokonując kolejno punkty **A**, **B** i **C** zgodnie z alfabetem, to jej ruch po okręgu będzie albo zgodny albo przeciwny do ruchu wskazówek zegara.

Wszystko zależy od ułożenia wierzchołków trójkąta.

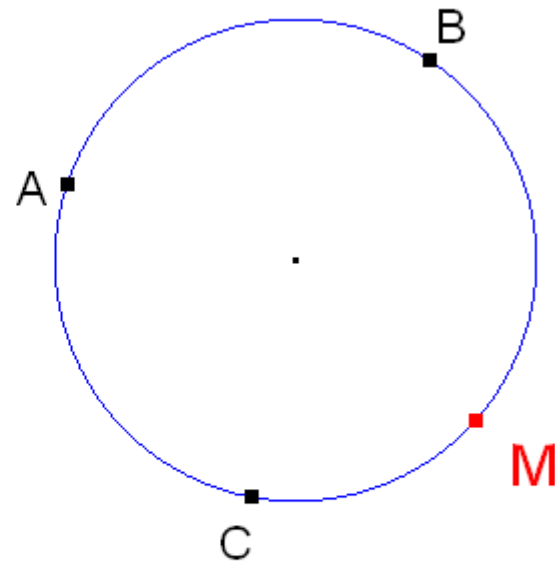
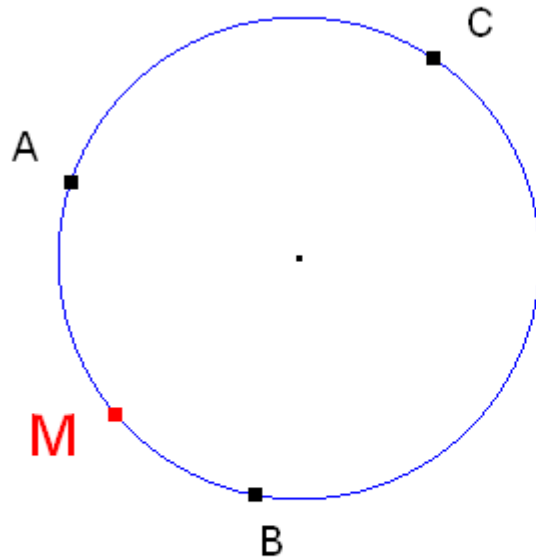
Poruszaj punktem **M** leżącym na okręgu po lewej stronie apletu od punktu **A** poprzez **B** do **C** i obserwuj zachowanie się punktu **M** na okręgu leżącym po prawej stronie.



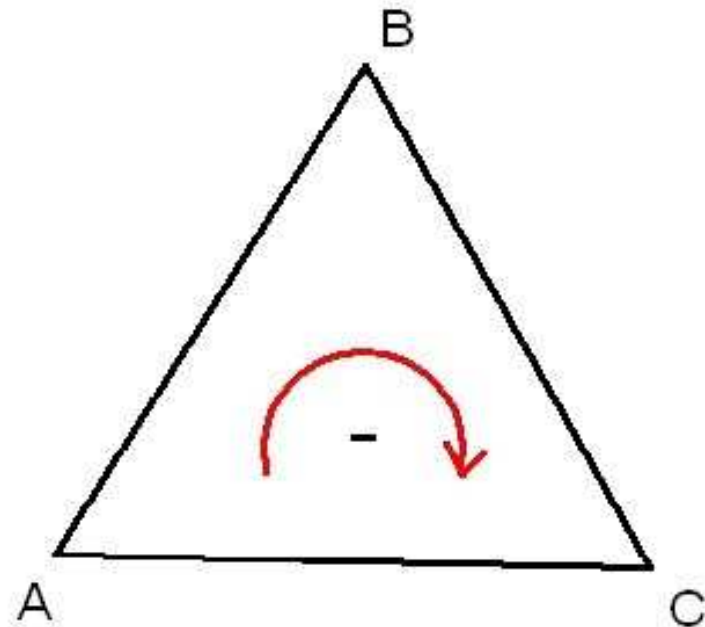
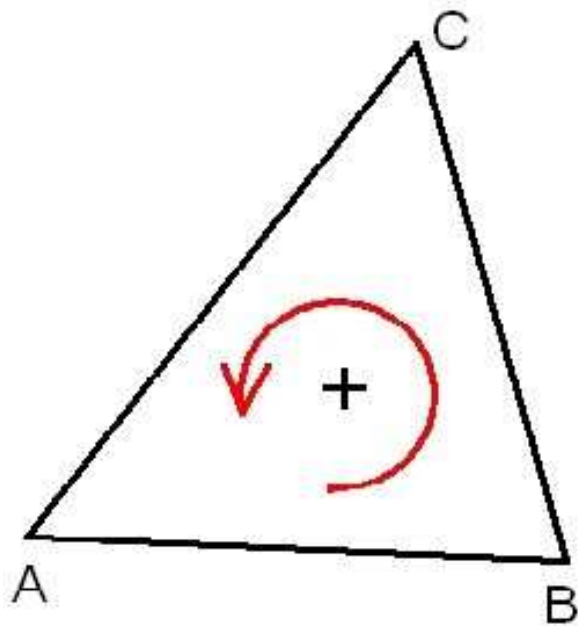
Jeśli ruch punktu po okręgu jest niezgodny z ruchem wskazówek zegara, to powiemy, że jest to ruch **w kierunku dodatnim**, a jeśli zgodny to ruch **w kierunku ujemnym**.



Ruch punktu **M** na okręgu po lewej stronie  
jest ruchem w kierunku .....,  
zaś po prawej w kierunku ..... **(18)**



O trójkącie powiemy zaś, że jest **zorientowany dodatnio** lub **ujemnie** – na rysunku poniżej jest to zaznaczone znakami „+” oraz „-”



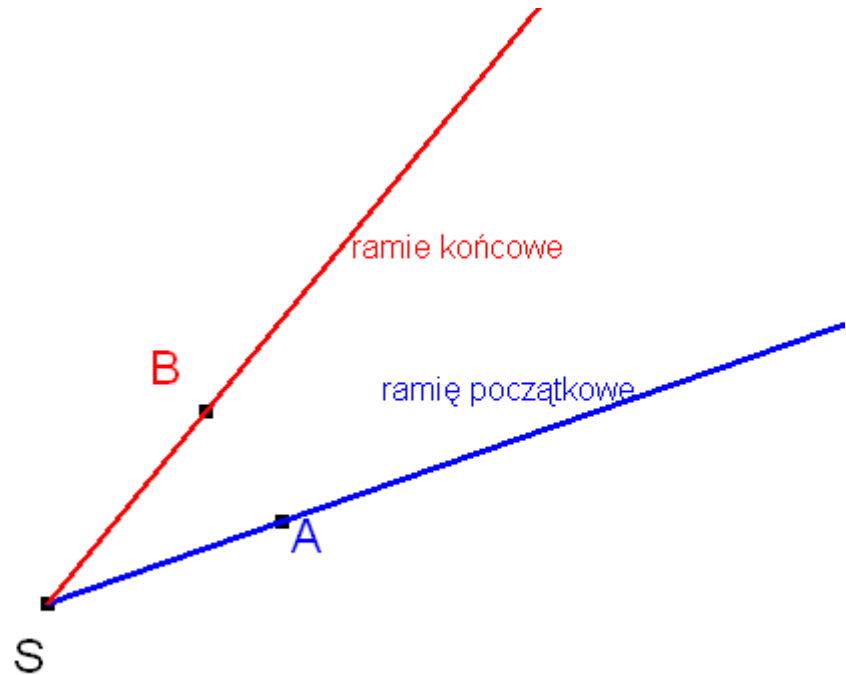
Podobnie się dzieje, gdy będziemy obracać półprostą wokół jej punktu początkowego.

Możemy to robić albo w kierunku dodatnim (niezgodnym z ruchem wskazówek zegara), albo ujemnym (zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara).

Dwie takie półproste tworzą ramiona pewnego kąta.

Jeśli obrót jednej z półprostych będących ramionami kąta odbywa się względem drugiej nieruchomej półprostej, wówczas uznamy że ta nieruchoma półprosta stanowi **ramię początkowe kąta**, zaś ruchoma półprosta stanowi **ramię końcowe tego kąta**.

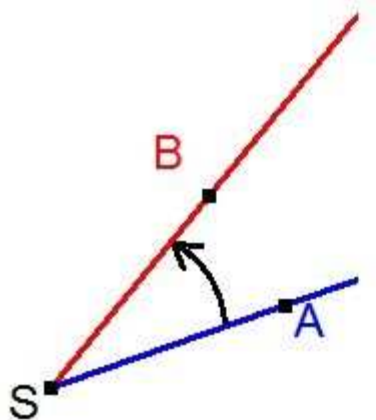
Kąt ten nazwiemy **kątem skierowanym**.



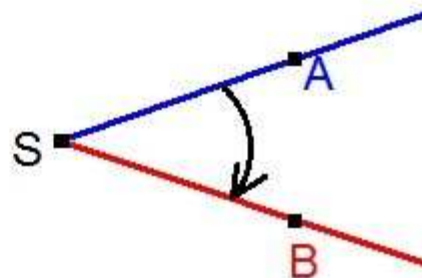


Czyli kąt skierowany, to taki, w którym jedno z ramion wyróżniamy jako początkowe, drugie jako końcowe. Taki kąt zaznaczać będziemy łukiem zakończonym strzałką.

Oczywiście nadal obowiązuje umowa, że gdy **kąt** skierowany jest niezgodnie z ruchem wskazówek zegara, wówczas uznajemy go za **dodatni**, a gdy zgodnie - za **ujemny**

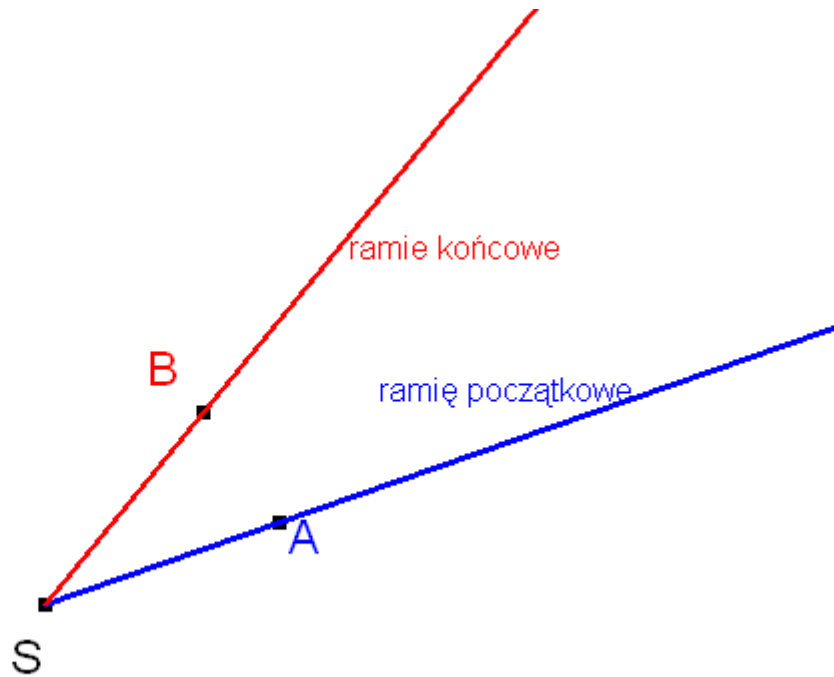


kąt skierowny dodatnio

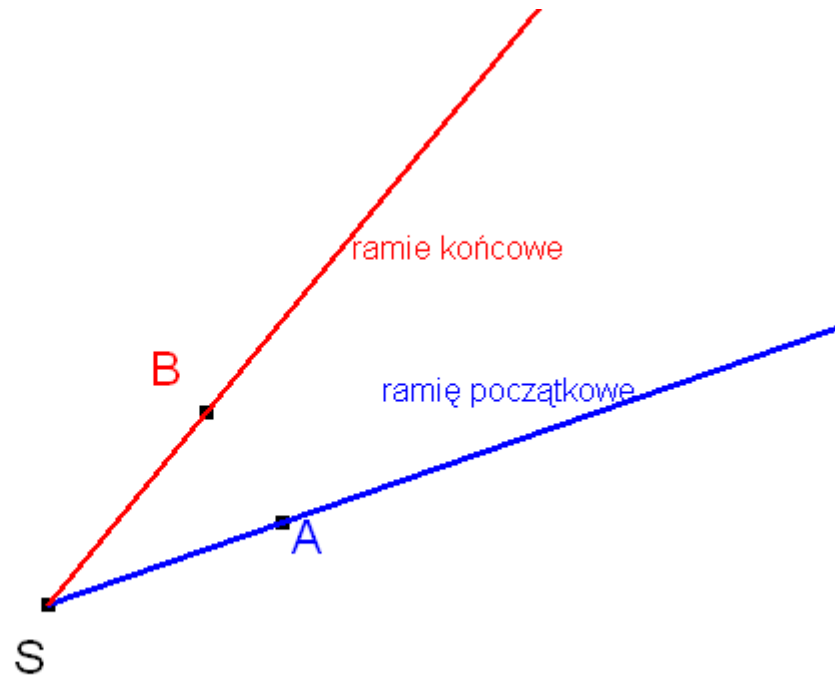


kąt skierowny ujemnie

Na poniższym aplecie półprosta **SA** która stanowi ramię początkowe jest unieruchomiona. Możesz poruszać ramieniem końcowym (półprostą **SB**) chwytając myszą punkt **B**.

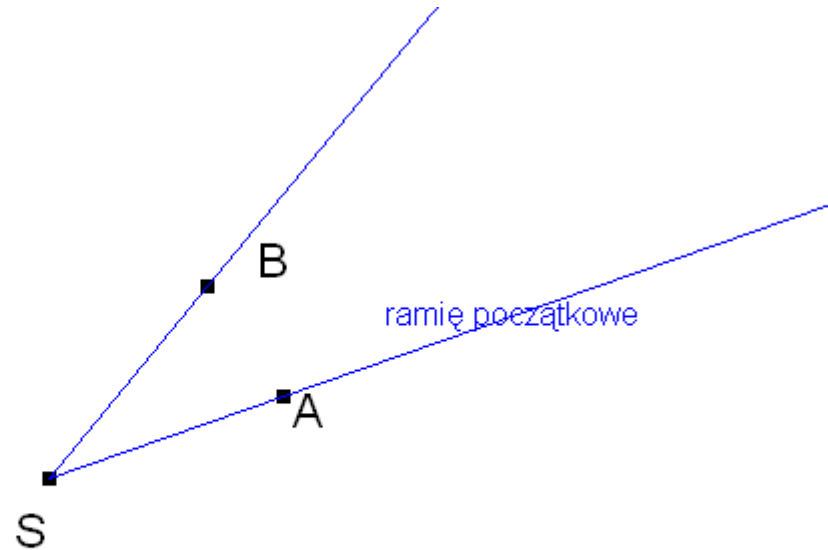


Poruszaj nim tak, by kąt który tworzą te półproste był dodatnio skierowany. Czy poruszasz zgodnie czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara?  
Udziel odpowiedzi: zgodnie / przeciwnie **(19)**



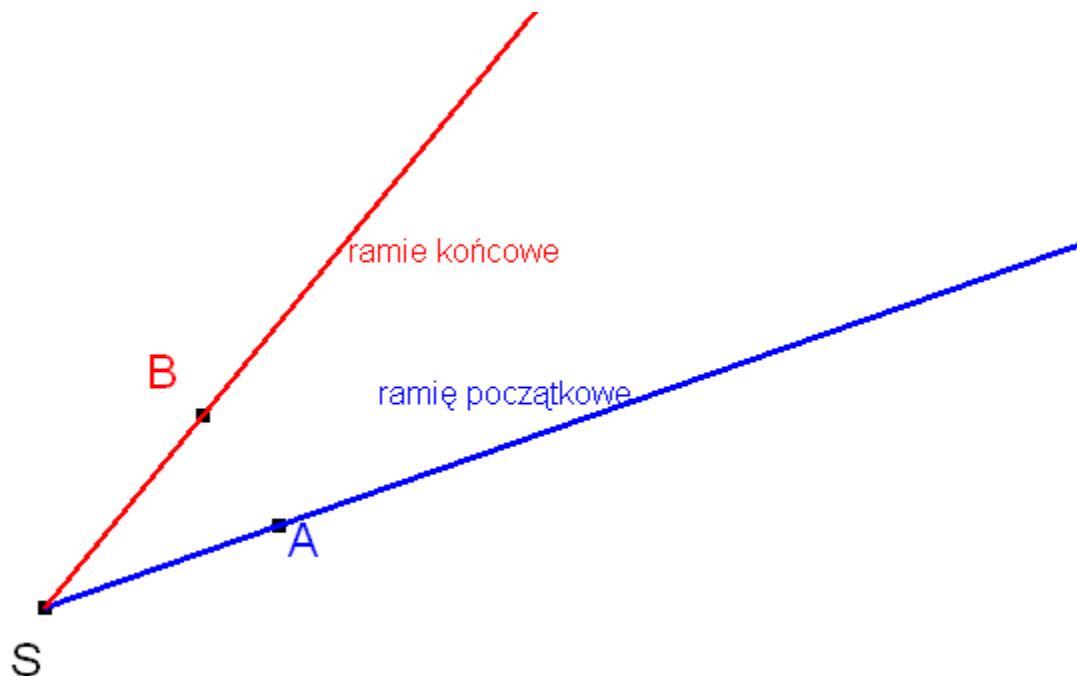
Ile musisz wykonać pełnych obrotów, by utworzyć kąt o mierze  $1080^{\circ}$ ? W jakim kierunku?

Odpowiedź: .....obrotów, w kierunku..... **(20)**



Ile musisz wykonać pełnych obrotów i o jaki kąt jeszcze obrócić, by utworzyć kąt o mierze  $-1543^\circ$ ? W jakim kierunku?

Odpowiedź: .....obrotów oraz kąt o mierze .....,  
w kierunku..... **(21)**



Na pytania które pojawiły się w poprzednim slajdzie będziesz musiał sobie często samemu odpowiedzieć, aby wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych dowolnych kątów, np. o mierze  $1080^{\circ}$  lub  $-1543^{\circ}$  .

Wówczas będziesz musiał podzielić miarę tego kąta przez  $360^{\circ}$  i wyznaczyć resztę z tego dzielenia.

Potem zajmiesz się już tylko tą resztą.

Dla kąta  $-1543^{\circ}$  będzie to  $(-4) \cdot 360^{\circ} - 103^{\circ}$  i dlatego zamiast kątem  $-1543^{\circ}$  zajmiesz się tylko kątem  $-103^{\circ}$ .

Teraz, gdy rozumiesz już, co to jest kąt skierowany, dopasujemy do niego w odpowiedni sposób układ współrzędnych.  
Bez niego nie da się bowiem zdefiniować funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego.

Układ współrzędnych będziemy umieszczać tak, by jego początek  $O$  znajdował się w wierzchołku  $S$  kąta skierowanego.

Oś  $OX$  będzie zawierać ramię początkowe kąta, przy czym zwrot dodatni tej osi musi być zgodny ze zwrotem półprostej wyznaczającej to ramię.

Oś  $OY$  układamy tak, by była prostopadła do osi  $OX$ , przy czym jej dodatni zwrot ma być tak położony, by obracając się od dodatniej półosi  $OX$  do dodatniej półosi  $OY$  poruszać się niezgodnie ze wskazówkami zegara.



Obejrzymy to na dwóch filmach:

1. gdy kąt jest skierowany dodatnio i jest rozwarty

$\cdot$   
**S**

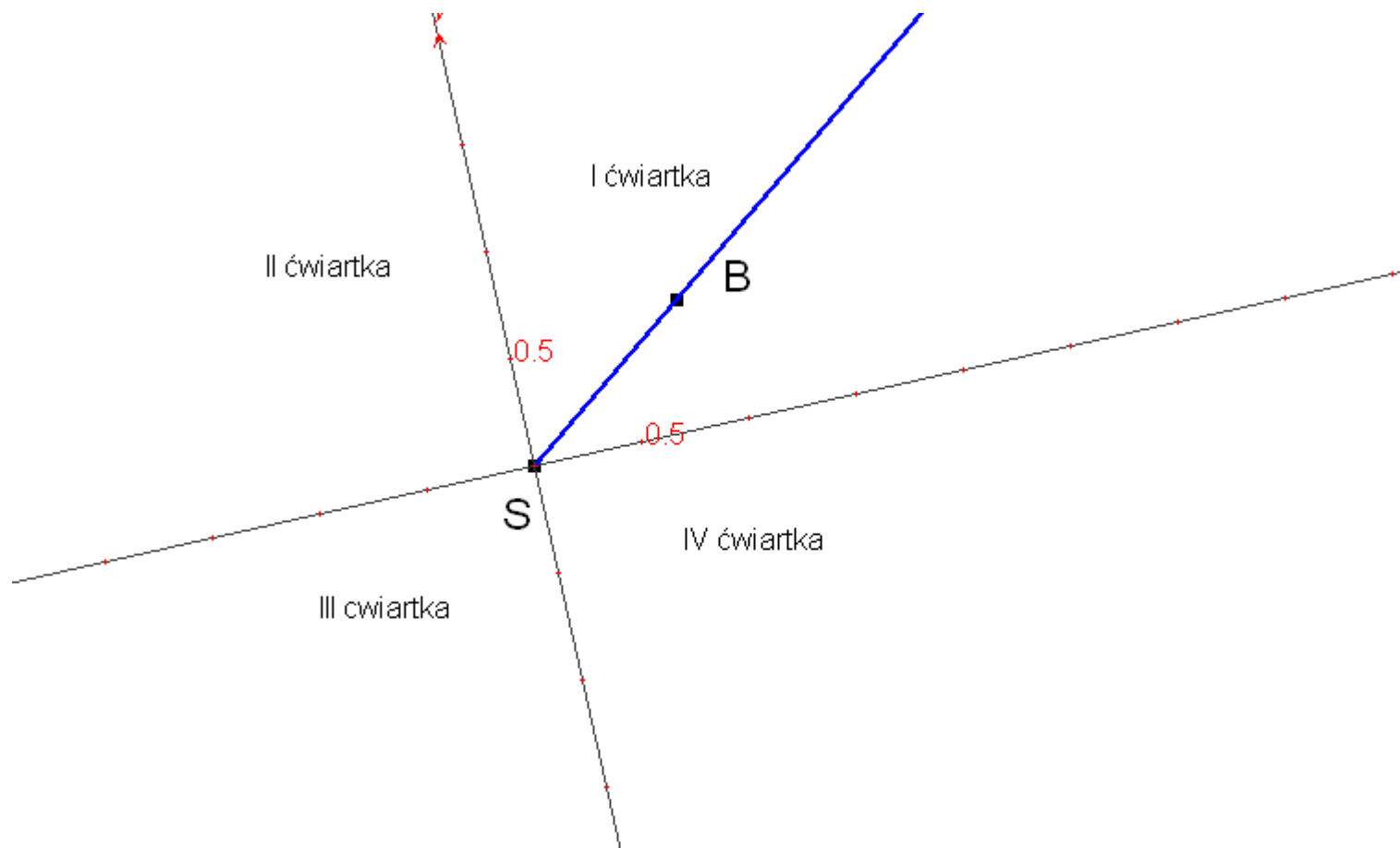
Obejrzymy to na dwóch filmach:

2. gdy kąt jest skierowany ujemnie i jest ostry

·  
**S**

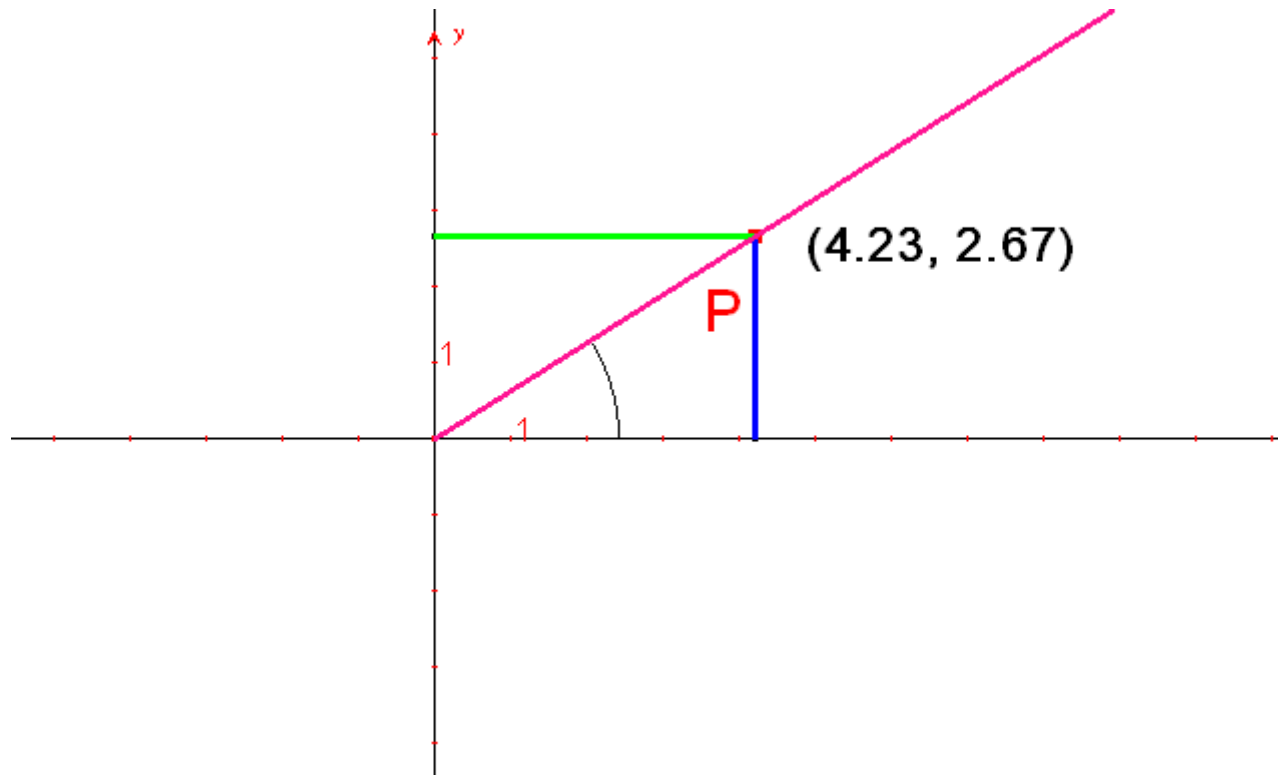
Ramię końcowe kąta skierowanego może się znaleźć w różnych ćwiartkach tak wprowadzonego układu współrzędnych.

Sprawdź to na poniższym aplecie, poruszając punkt **B**.



Aby zdefiniować funkcje trygonometryczne dowolnego kąta skierowanego, obieramy na ramieniu końcowym kąta dowolny punkt  $P$ . Punkt ten ma w układzie współrzędnych dwie współrzędne: odcięta  $OP_x$  i rzędną  $OP_y$ . Jego odległość od początku układu współrzędnych nazywamy promieniem wodzącym  $r$  kąta skierowanego.

Obracaj punktem **P** ramię końcowe kąta i obserwuj, jaki znak mają wartości rzędnej (zaznaczone kolorem niebieskim) i odciętej (kolorem zielonym) tego punktu.

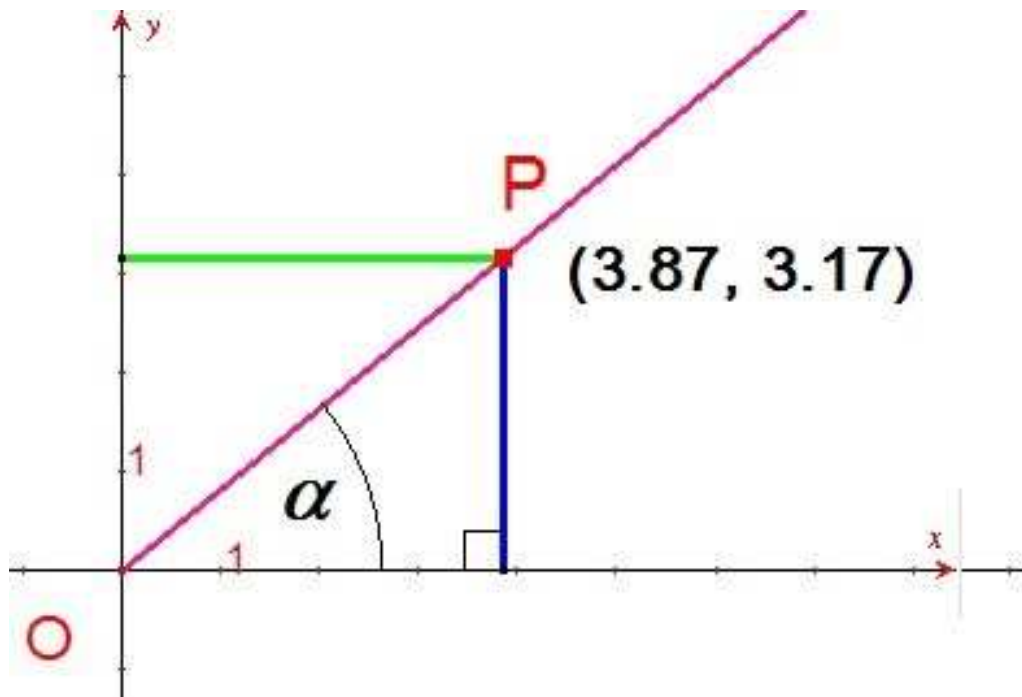


Uzupełnij poniższą tabelę znaków tych wartości w poszczególnych ćwiartkach **(22)** .

ramię końcowe kąta leży w ćwiartce:	rzędna	odcięta
1 ćwiartka		
2 ćwiartka		
3 ćwiartka		
4 ćwiartka		

# Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Zauważ, że gdy ramię końcowe kąta skierowanego znajduje się w I ćwiartce układu współrzędnych, wówczas można tam zbudować odpowiedni trójkąt prostokątny i definicje funkcji trygonometrycznych tego kąta są takie same, jakie poznałeś dla kąta w trójkącie prostokątnym





Zauważ przy tym, że przyprostokątnymi tego trójkąta są odcinki rzędnej i odciętej punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta a przeciwprostokątna to promień wodzący tego punktu.

I tak:

***sinusem*** kąta jest stosunek rzędnej punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do długości jego promienia wodzącego.

Obejrzyj stosowny film na kolejnym slajdzie



Na podstawie obejrzanego filmu i znajomości definicji funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym dokończ definicję cosinusa dowolnego kąta skierowanego: **(23)**

***cosinusem*** kąta jest stosunek .....punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do .....

Podobnie dokończ definicje pozostałych funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta:

***tangensem*** kąta jest stosunek .....punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do ..... (24)

***cotangensem*** kąta jest stosunek .....punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do ..... (25)

Definicje te mogą być jeszcze prostsze, jeśli umówimy się, że punkt ***P*** leży zawsze w odległości jednostki od początku układu współrzędnych, czyli na okręgu o promieniu 1.

Wówczas promień wodzący wynosi  $r=1$  i w definicji sinusa oraz cosinusa nie występuje ułamek.

Wówczas:

***Sinus*** to rzędna punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta.

***Cosinus*** to odcięta punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta.

Widać też, że o znaku wartości trygonometrycznej decyduje tylko znak rzędnej lub odciętej, co bardzo ułatwia wyznaczanie wartości tych dwóch funkcji trygonometrycznych.

Uzupełnij poniższą tabelę, wpisując znak „+” lub „-” **(26)**

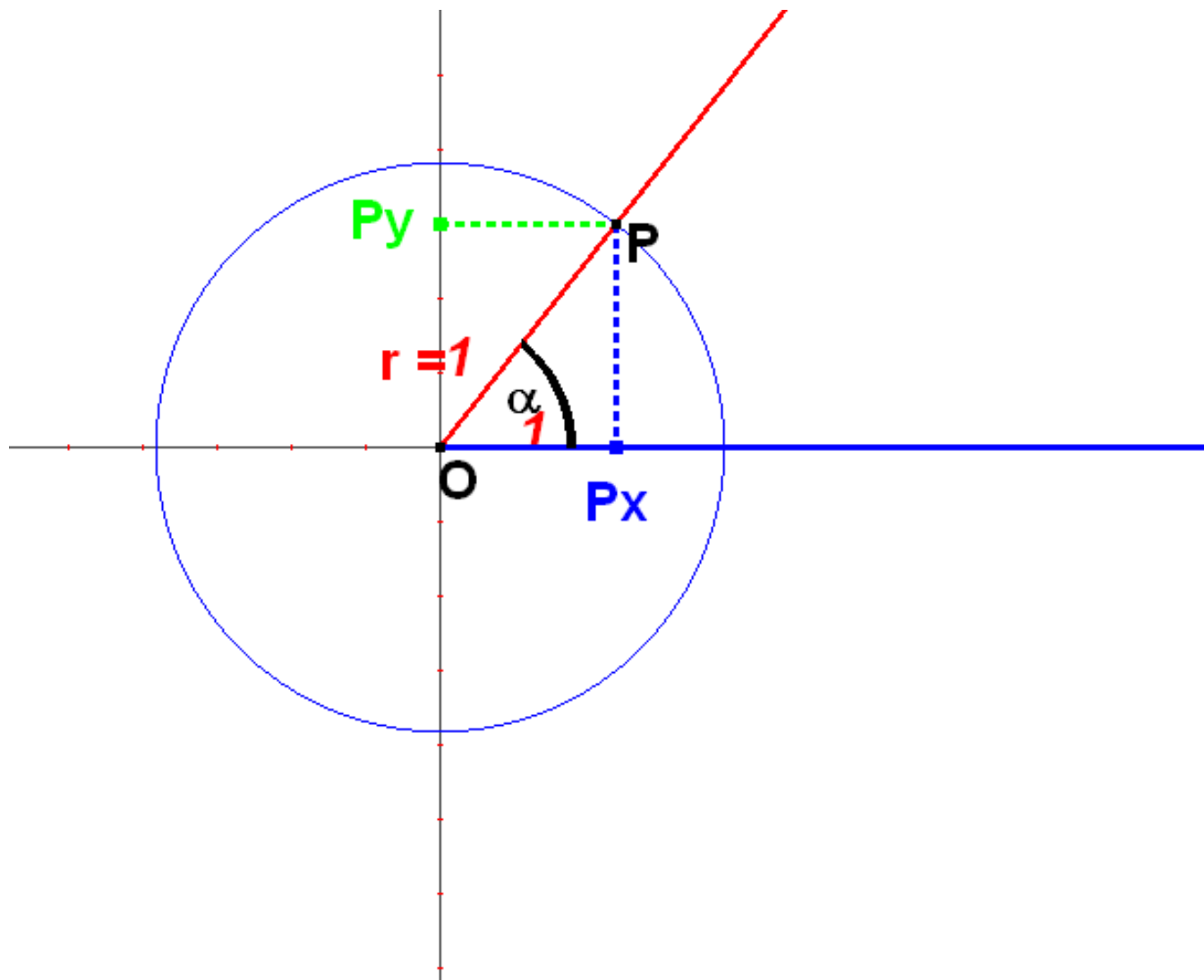
	ćwiartka 1	ćwiartka 2	ćwiartka 3	ćwiartka 4
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				



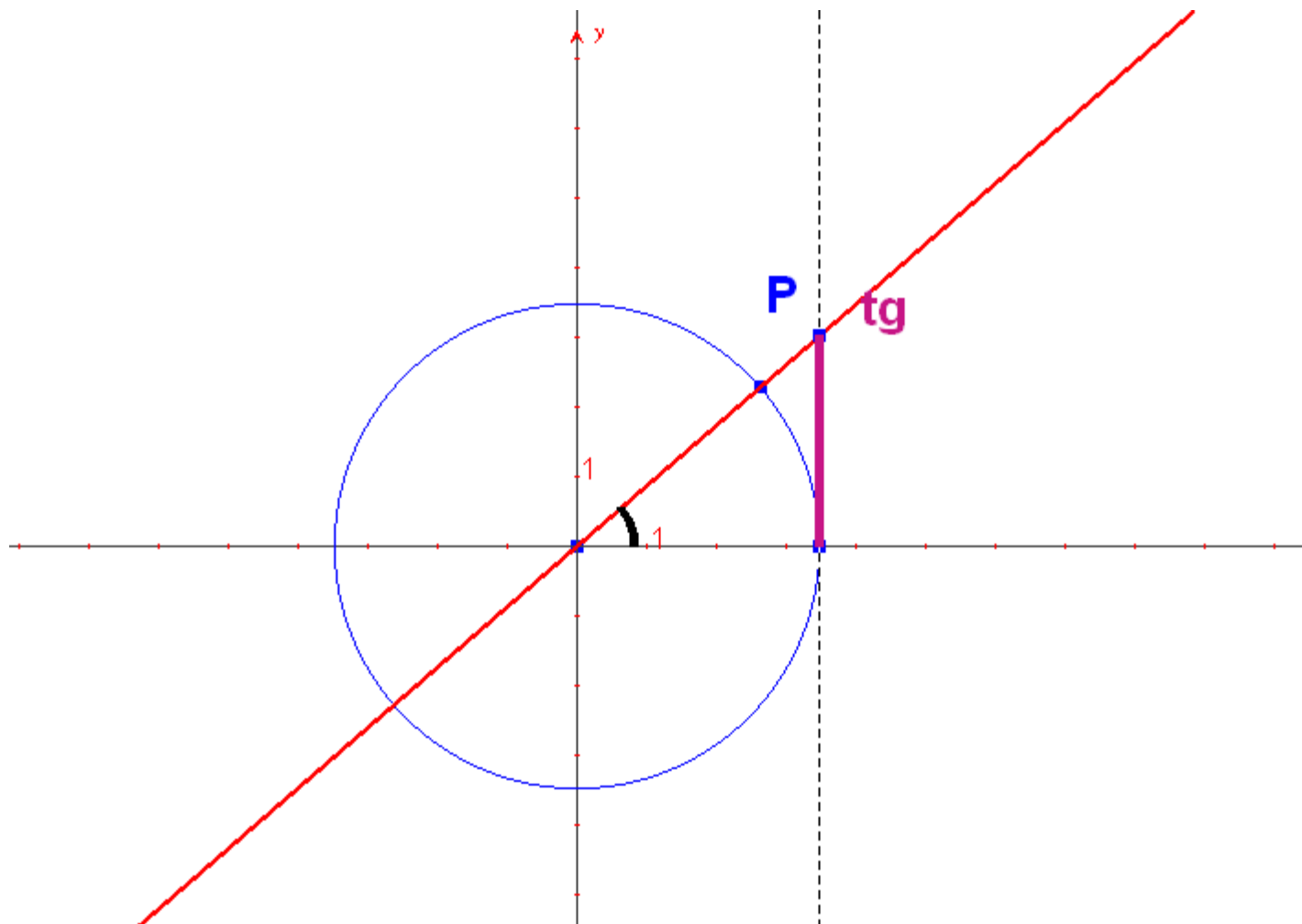
Z tangensem i cotangensem sprawa trochę się komplikuje, bowiem występuje tam iloraz rzędnej do odciętej, lub na odwrót - odciętej do rzędnej.

Ale okazuje się, że wartość tangensa kąta skierowanego można odczytać bezpośrednio w inny sposób.

Popatrz na film na kolejnym slajdzie.



Teraz zbadaj, jak zachowuje się tangens dla innych kątów.



Po pierwsze zauważ co się dzieje z odcinkiem, gdy kąt zbliża się do miary  $90^{\circ}$ .

Potem, gdy kąt przekroczy tę miarę i jest rozwarty, wówczas odcinek pojawia się od dołu, co oznacza, że tangens tych kątów jest ujemny.

Rzeczywiście, gdy kąt jest rozwarty, wówczas odcięta punktu na jego ramieniu końcowym jest dodatnia, ale rzędna ujemna, co uzasadnia ujemność tangensa.

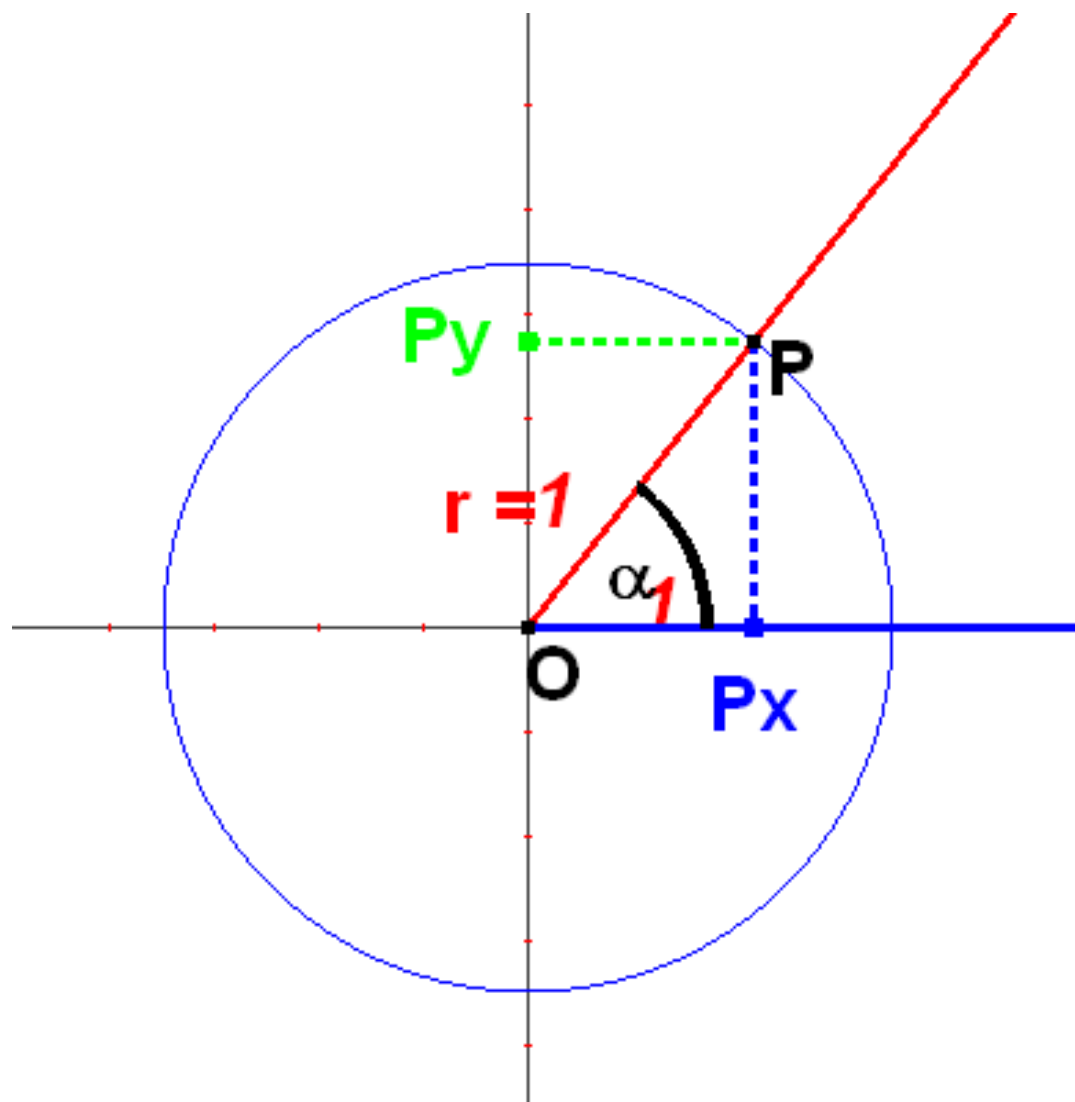
Ale dla kąta  $90^{\circ}$  ramię końcowe kąta nie przecina się ze styczną do okręgu wystawiona prostopadłe do osi OX, gdyż jest do niej równoległe.

To oznacza, że ***tangenes kąta prostego nie istnieje.***

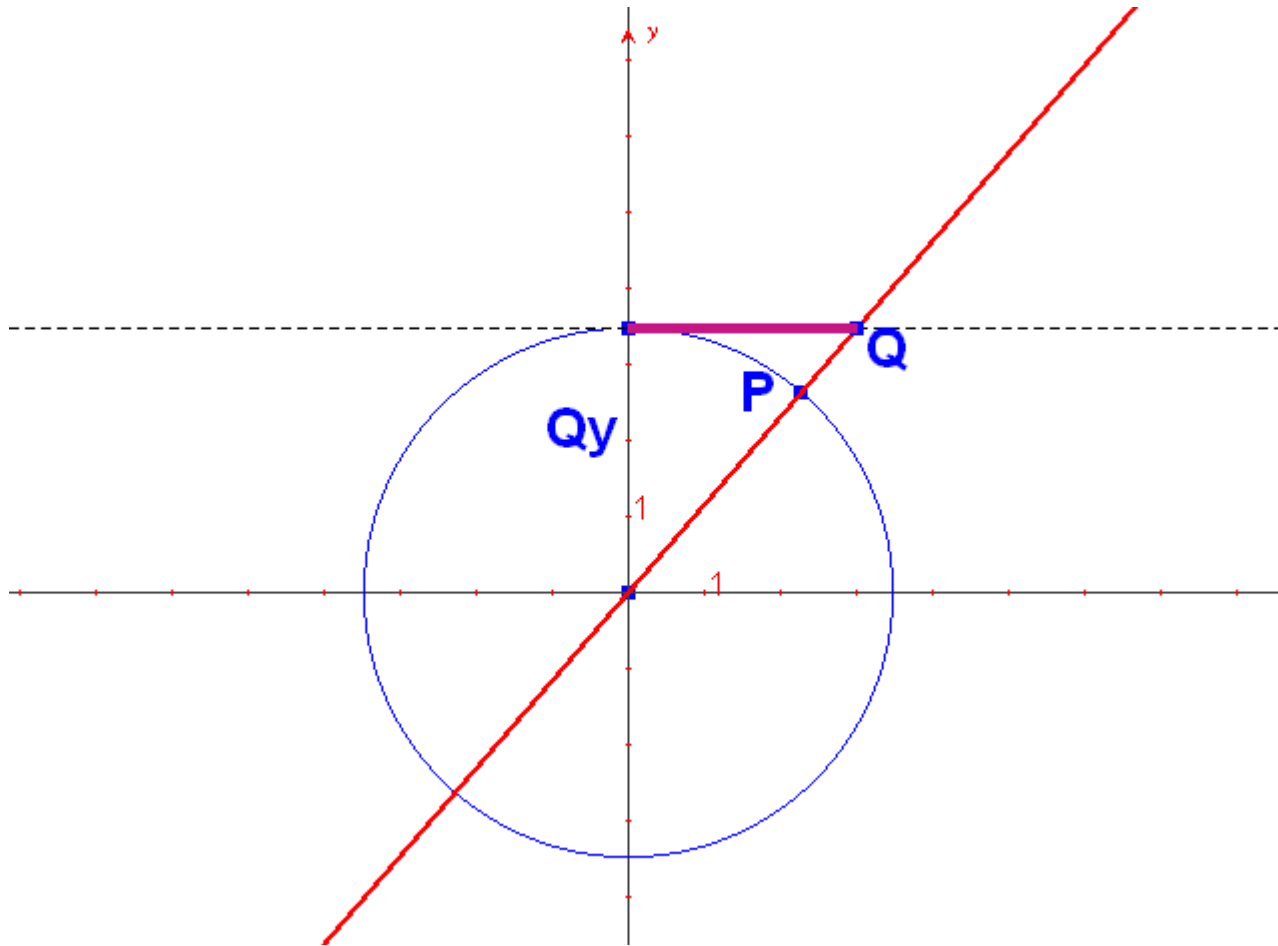
Fakt ten można jeszcze uzasadnić inaczej.  
Dla kąta  $90^\circ$  odcięta punktu na ramieniu końcowym wynosi 0 i wówczas stosunek rzędnej do odciętej nie ma wartości  
(mamy do czynienia z dzieleniem przez zero)

Czy można wskazać również cotangens, jako pewien odcinek?

Obejrzyj film na kolejnym slajdzie i na jego podstawie dokonaj opisu konstrukcji tego odcinka podobnie, jak to widziałeś na filmie z tangensem (27) .



A teraz obejrzyj zachowanie się cotangensa dla innych kątów i opisz dokładnie tak, jak to zostało wcześniej opisane dla tangensa (28). Poruszaj punktem ***P***





# **WYKRESY FUNKCJI TRYGNOMERYCZNYCH**

Funkcje trygonometryczne są nie tylko z nazwy funkcjami, ale faktycznie przypisują mierze każdego kąta dokładnie jedną wartość funkcji.

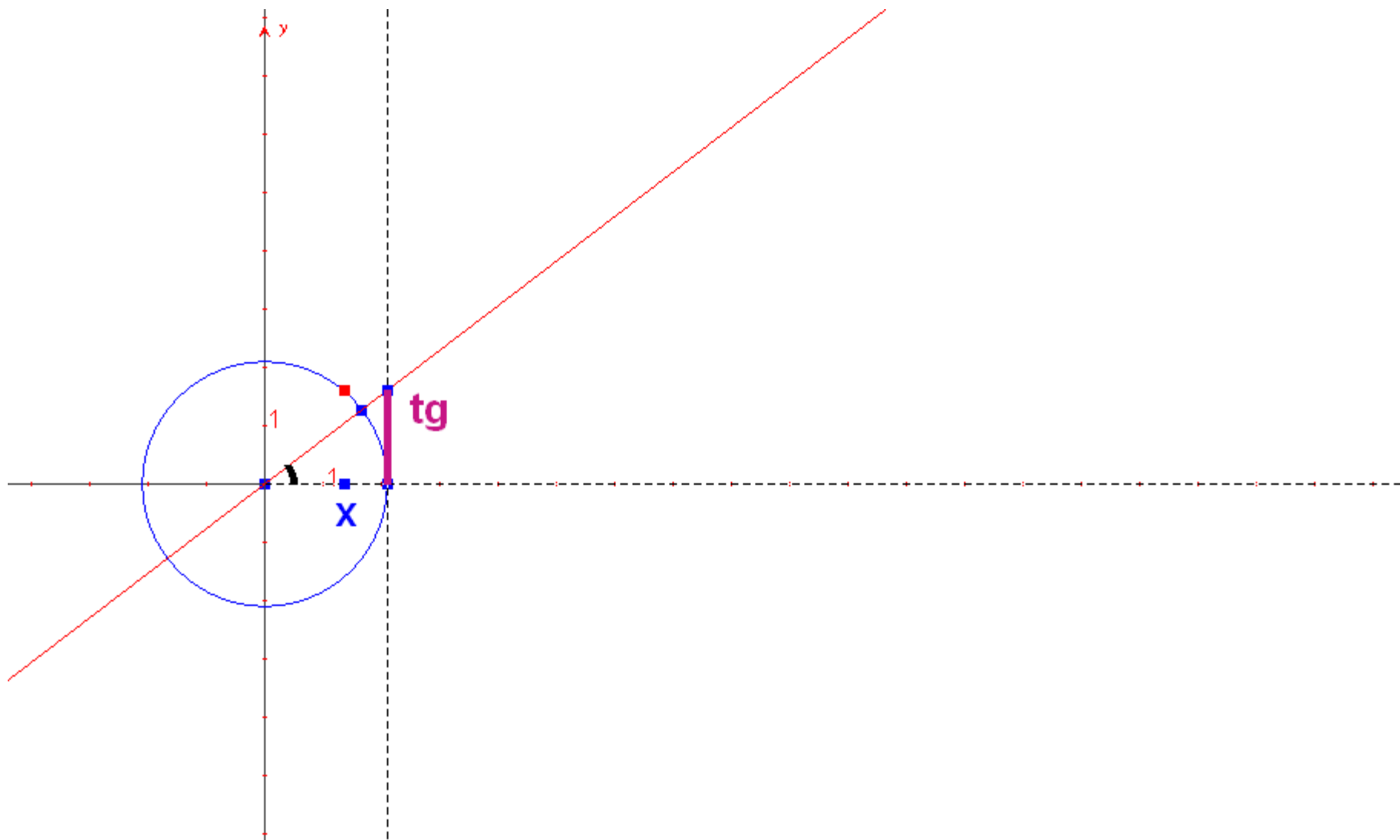
Już wiesz, jak odczytywać te wartości, więc możesz wykonać wykresy tych funkcyjnych zależności.

Zacznijmy od tangensa

Na kolejnym aplecie każdej mierze kąta  $x$  umieszczonej na osi  $OX$  przypisany jest jej tangens odczytany z konstrukcji wykonanej w poprzednich slajdach.

Poruszaj punktem  $x$  na osi  $OX$  i obserwuj wykres funkcji

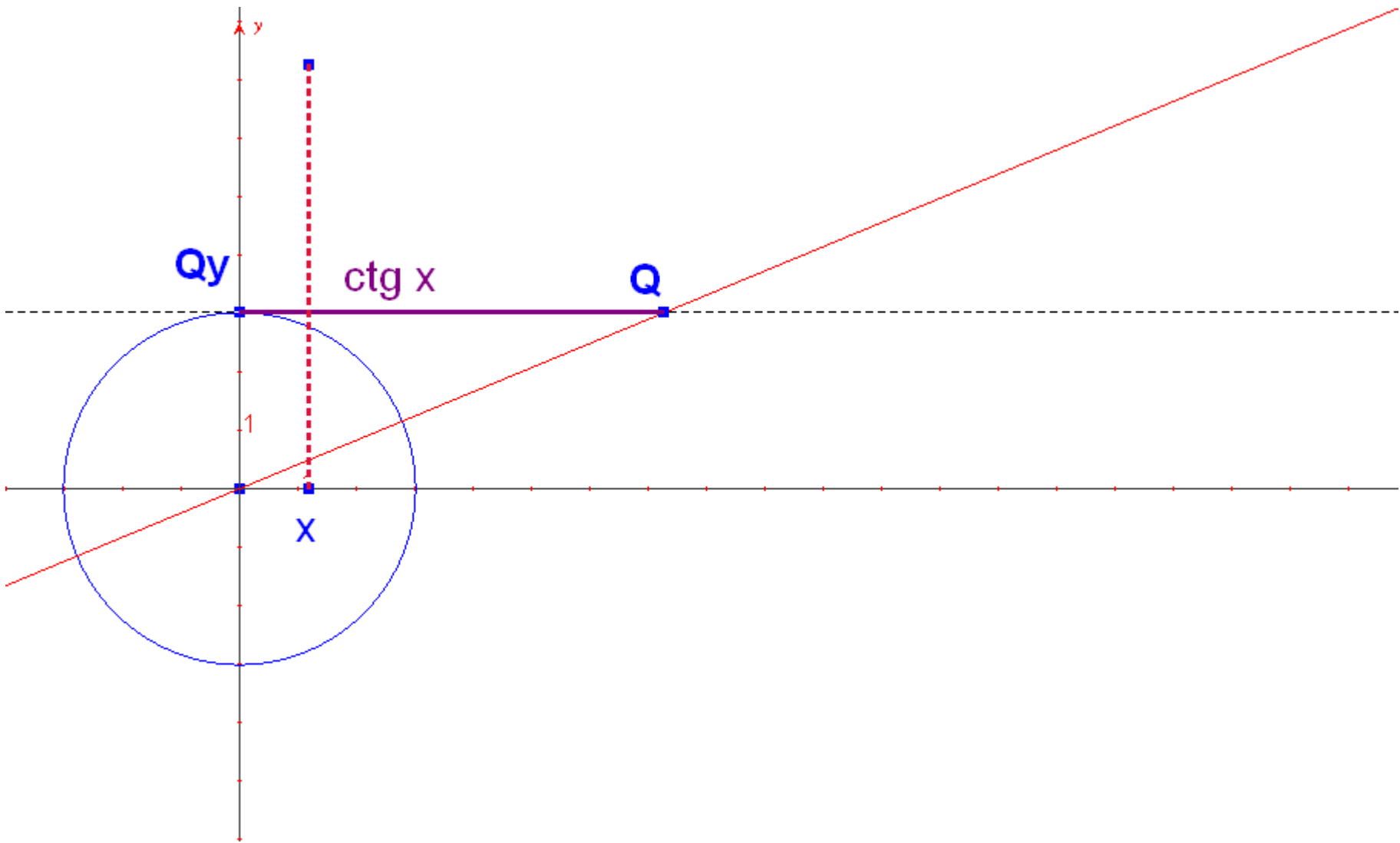
$$y = \operatorname{tg} x$$



Podobnie jest z wykresem funkcji cotangens.

Teraz dla każdej miary kąta  $x$  odłożony jest odcinek  $QQ_x$ ,  
który był konstruowany w poprzednich slajdach.

Dla których kątów  $x$  funkcja  $ctg x$  nie ma wartości? (29)

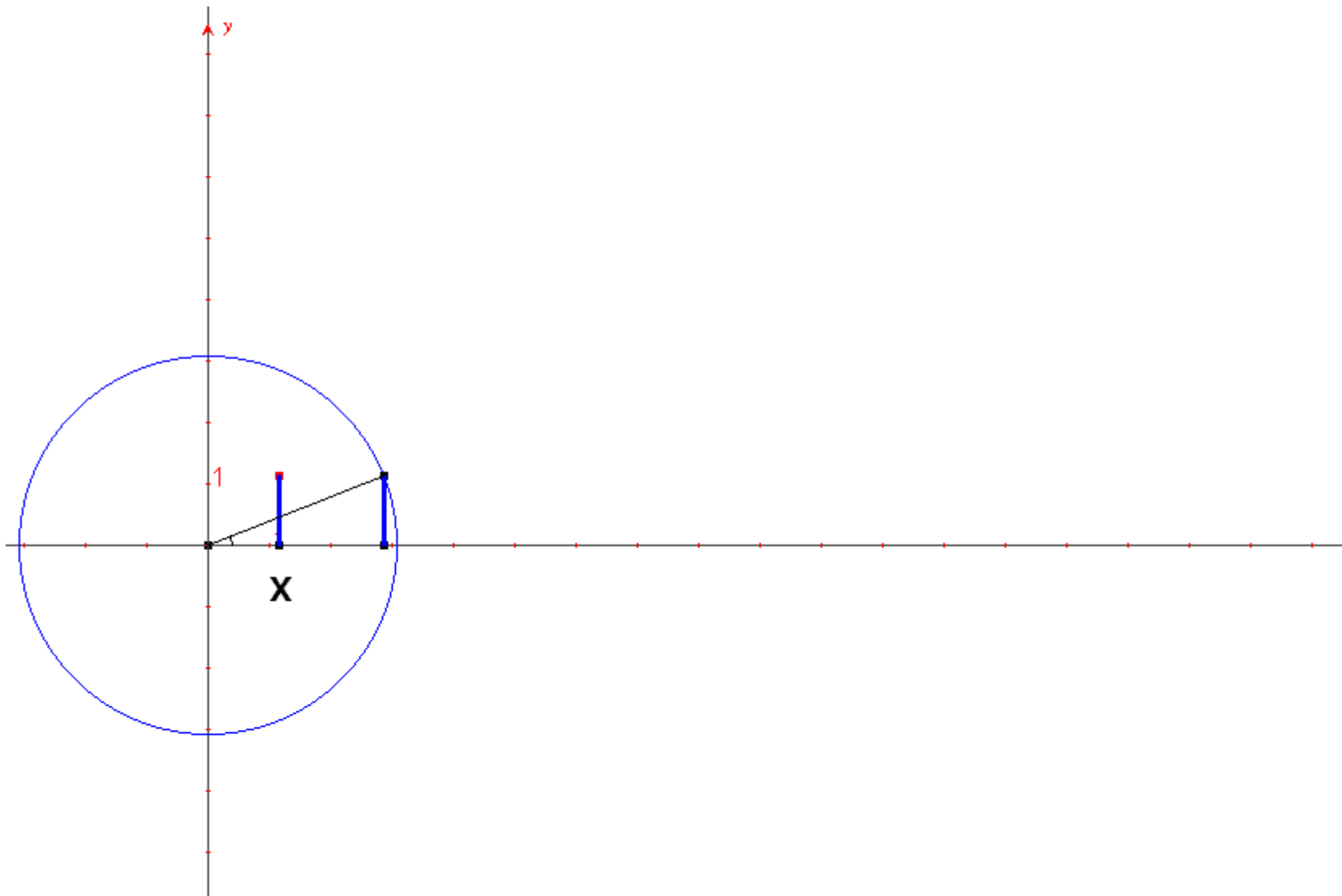


Teraz kolej na wykres sinusa i cosinusa kąta  $x$ .

W obu przypadkach argumentowi  $x$  zmieniającemu się na osi  $OX$  i odpowiadającemu mierze kąta  $\alpha$  przypisujemy wartość, którą geometrycznie skonstruowaliśmy wcześniej w układzie współrzędnych dla tego  $x$ .

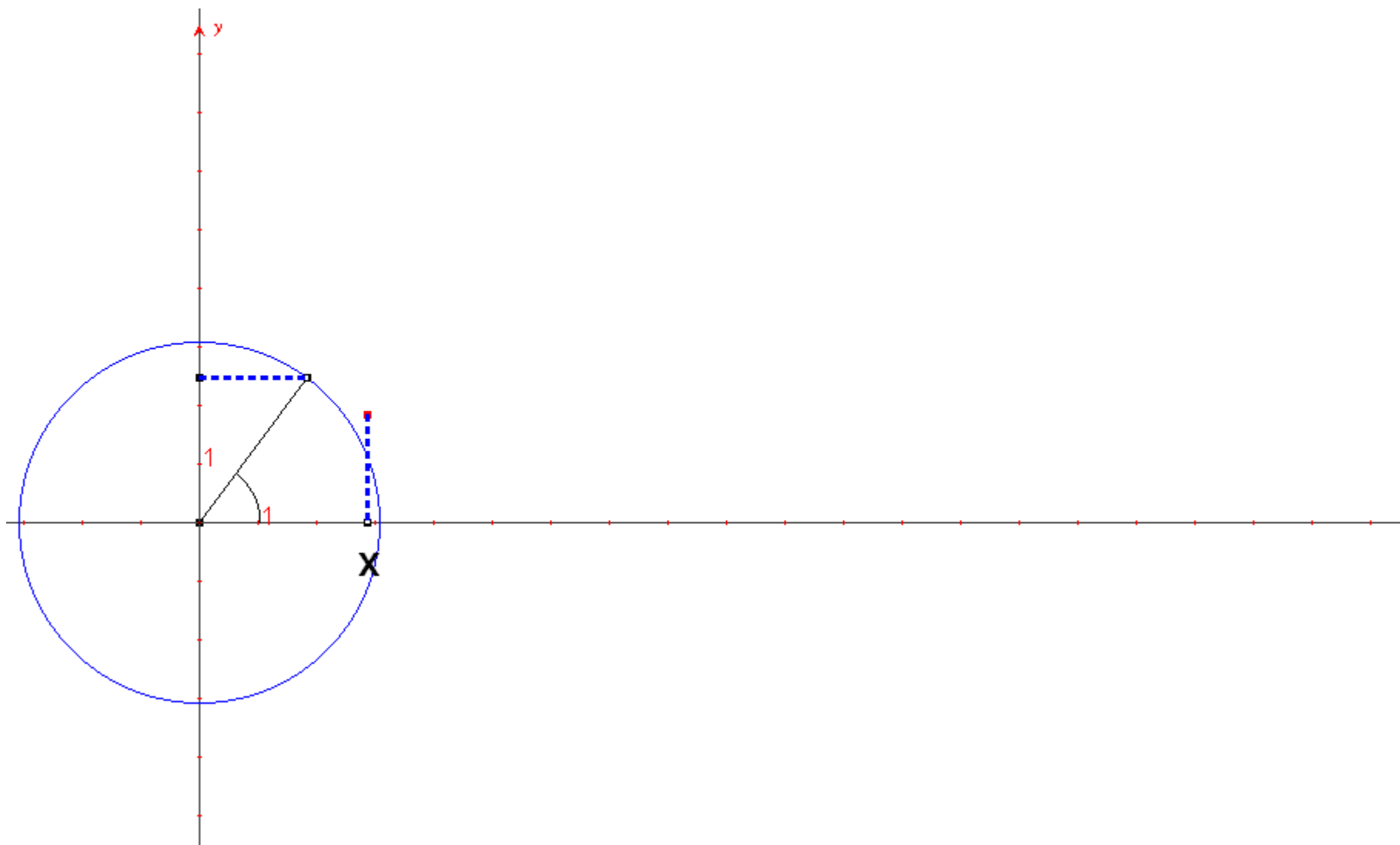
Kolejne slajdy prezentują aplety, które możesz uruchomić poruszając punkt  $x$  na osi  $OX$ .

Wykres  $y = \sin x$

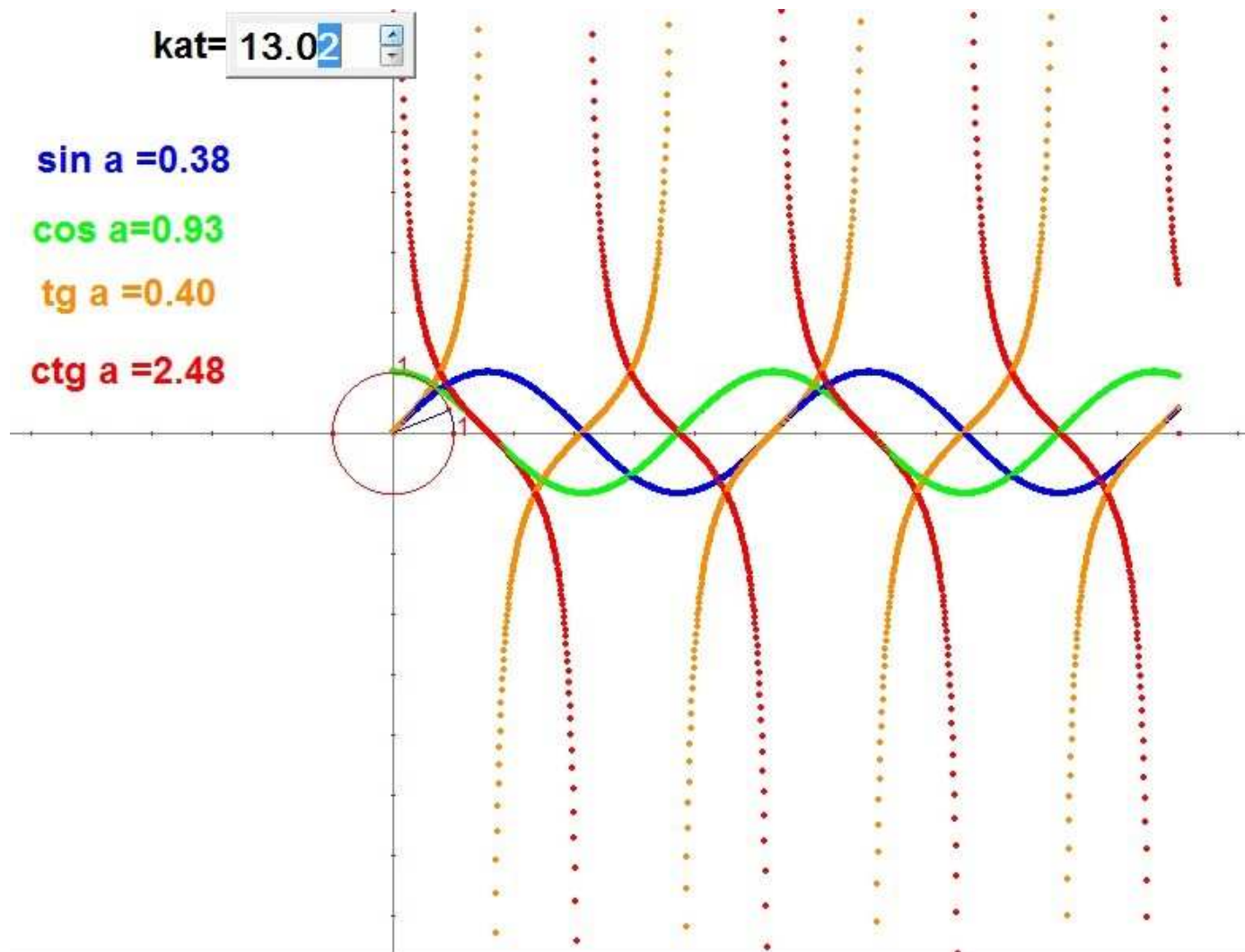




Wykres  $y = \cos x$



A oto wszystkie wykresy zebrane  
w jednym układzie współrzędnych – zrzut z ekranu Cabri



# WZORY REDUKCYJNE

Nadal nie wiesz, jak obliczać wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego większego niż  $90^\circ$ . Do tego służą wzory zwane redukcyjnymi. Redukują one wartość funkcji trygonometrycznej dowolnego kąta do kąta ostrego, czyli takiego, którego ramię końcowe leży w I ćwiartce układu współrzędnych.

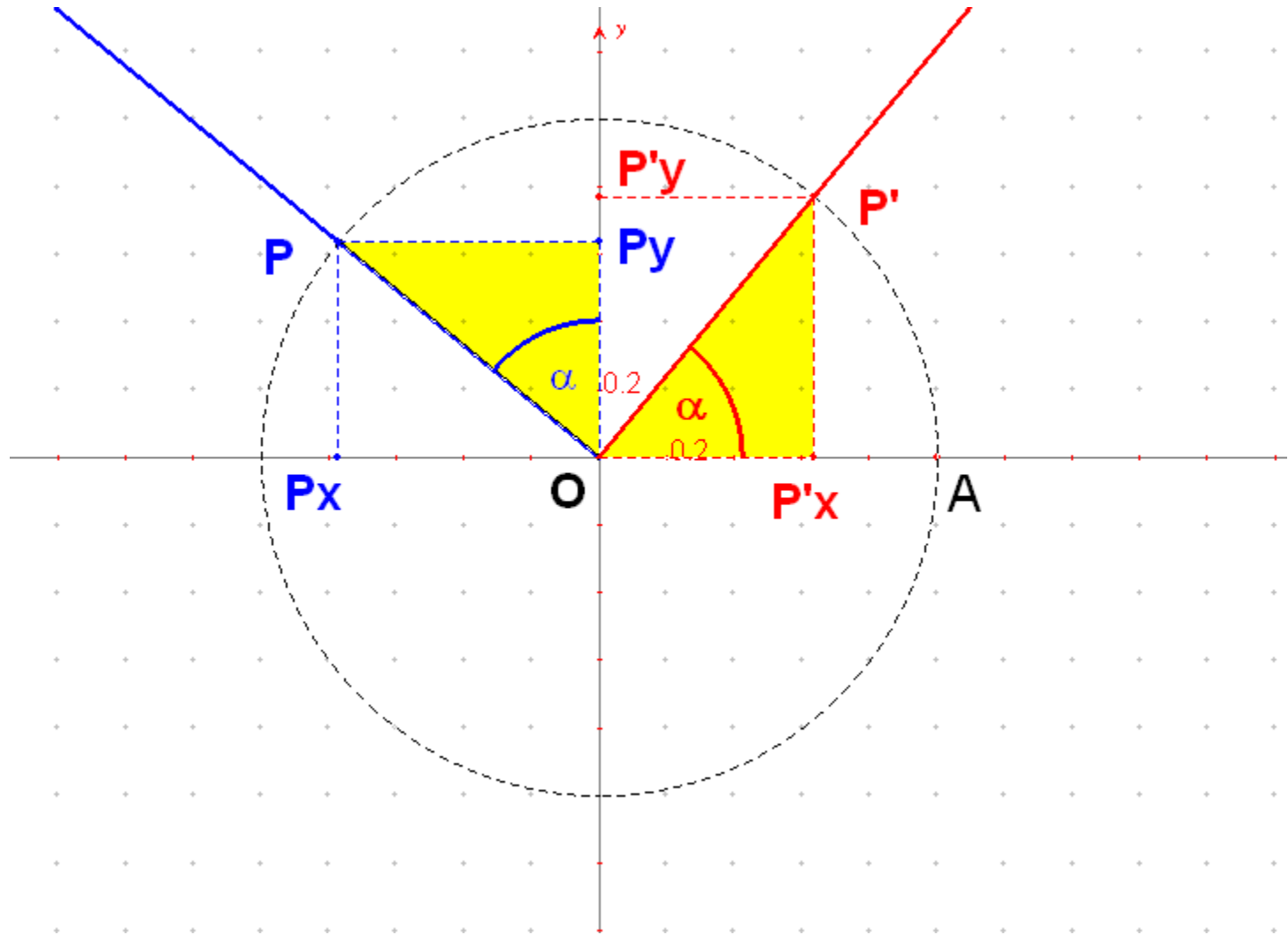
Wzorów tych jest sporo, ale nie ma sensu uczyć się ich na pamięć. Naucz się ich wyprowadzania – wtedy zawsze będziesz umiał wyprowadzić każdy z nich.

Okazuje się też, że nie wszystkie musi się stosować.

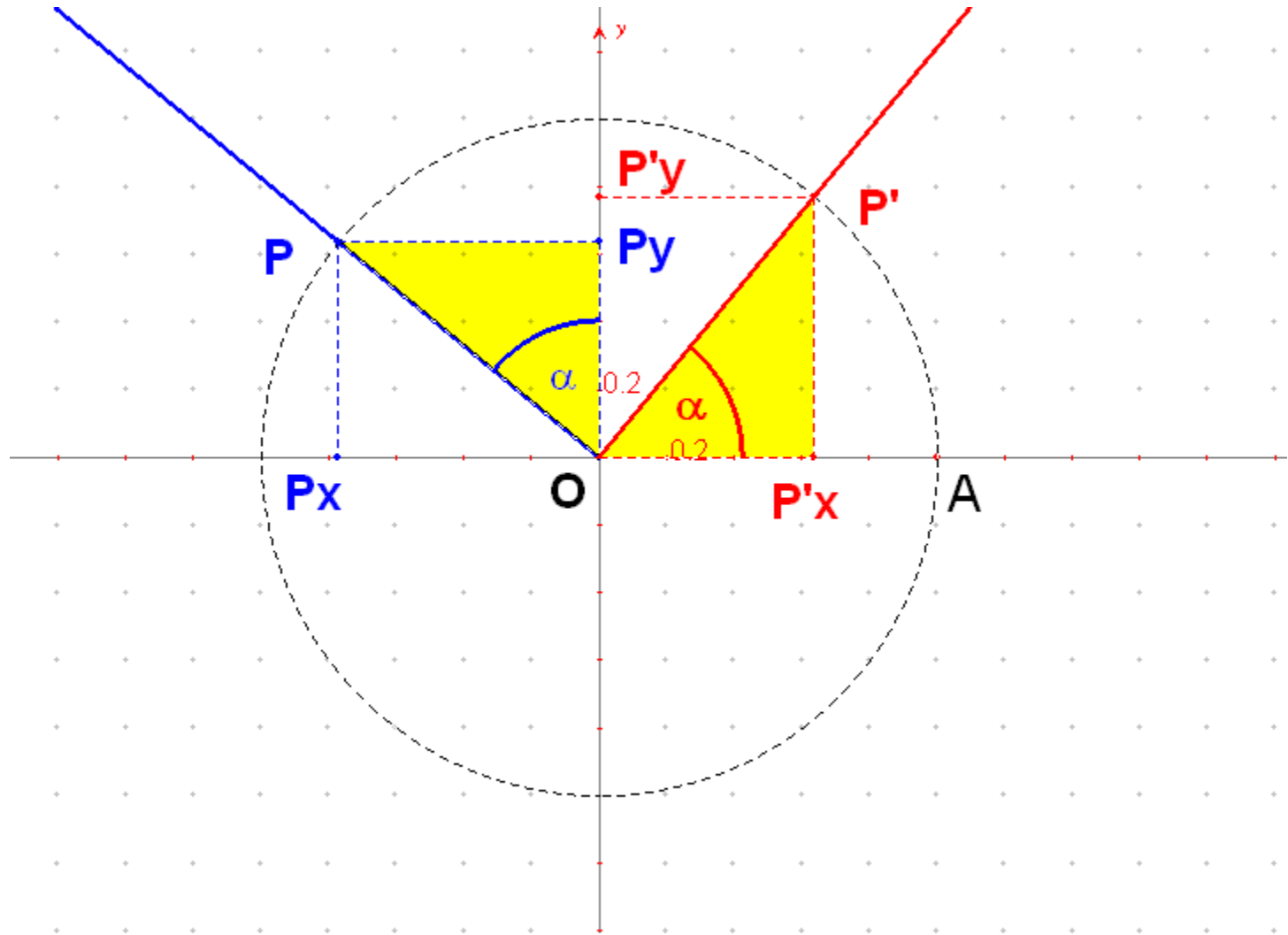
Wystarczy poznać po cztery na ćwiartki: II, III i IV układu współrzędnych

Przeanalizujemy na kilku przykładach strukturę tworzenia tych wzorów.

W poniższym apłecie poruszaj punktem  $P$ , który leży na ramieniu końcowym kąta  $AOP$ .

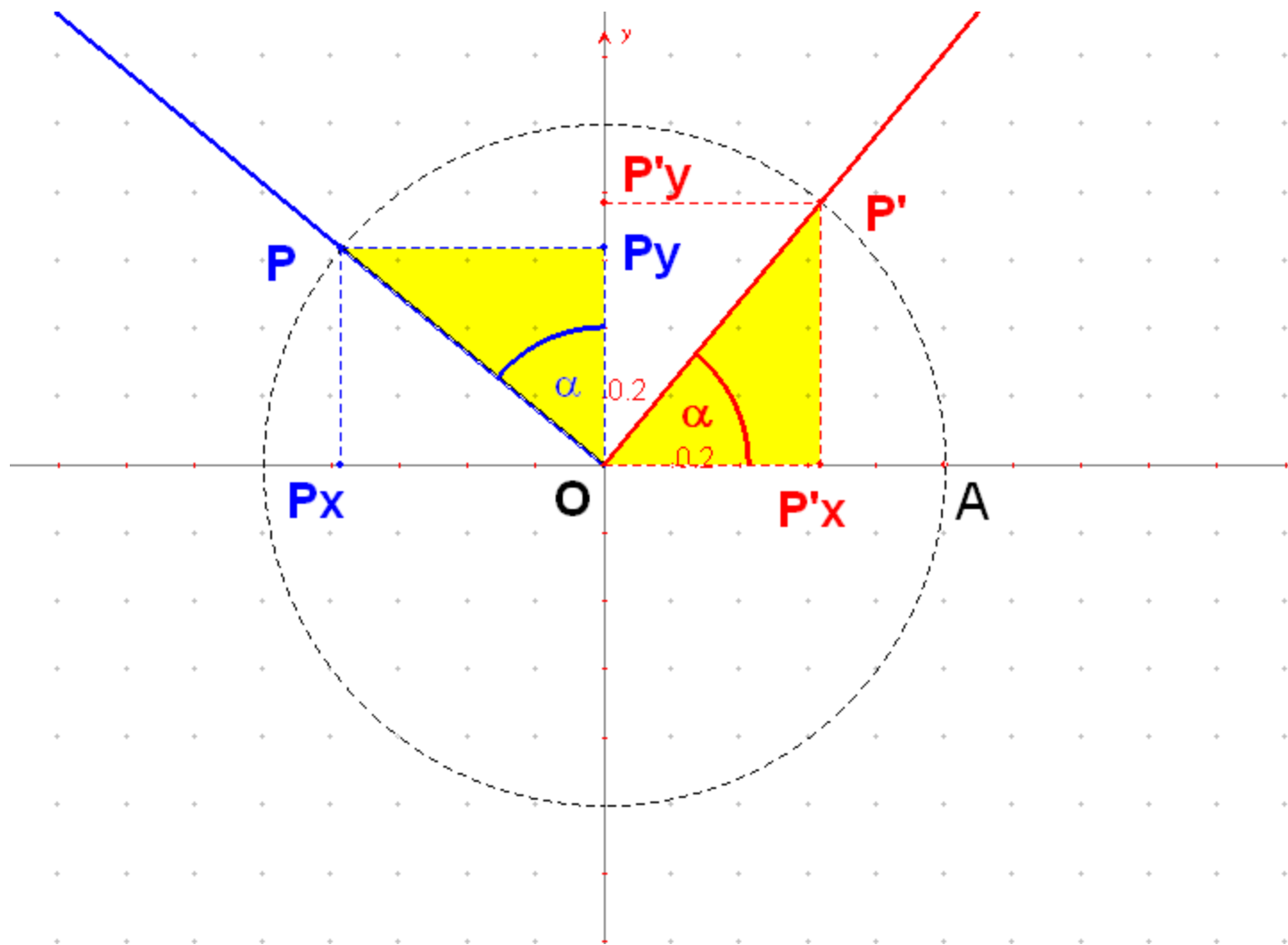


Trójkątowi  $OP_yP$ , odpowiada trójkąt  $OP'_xP'$  przystający do niego, leżący w I ćwiartce układu współrzędnych.

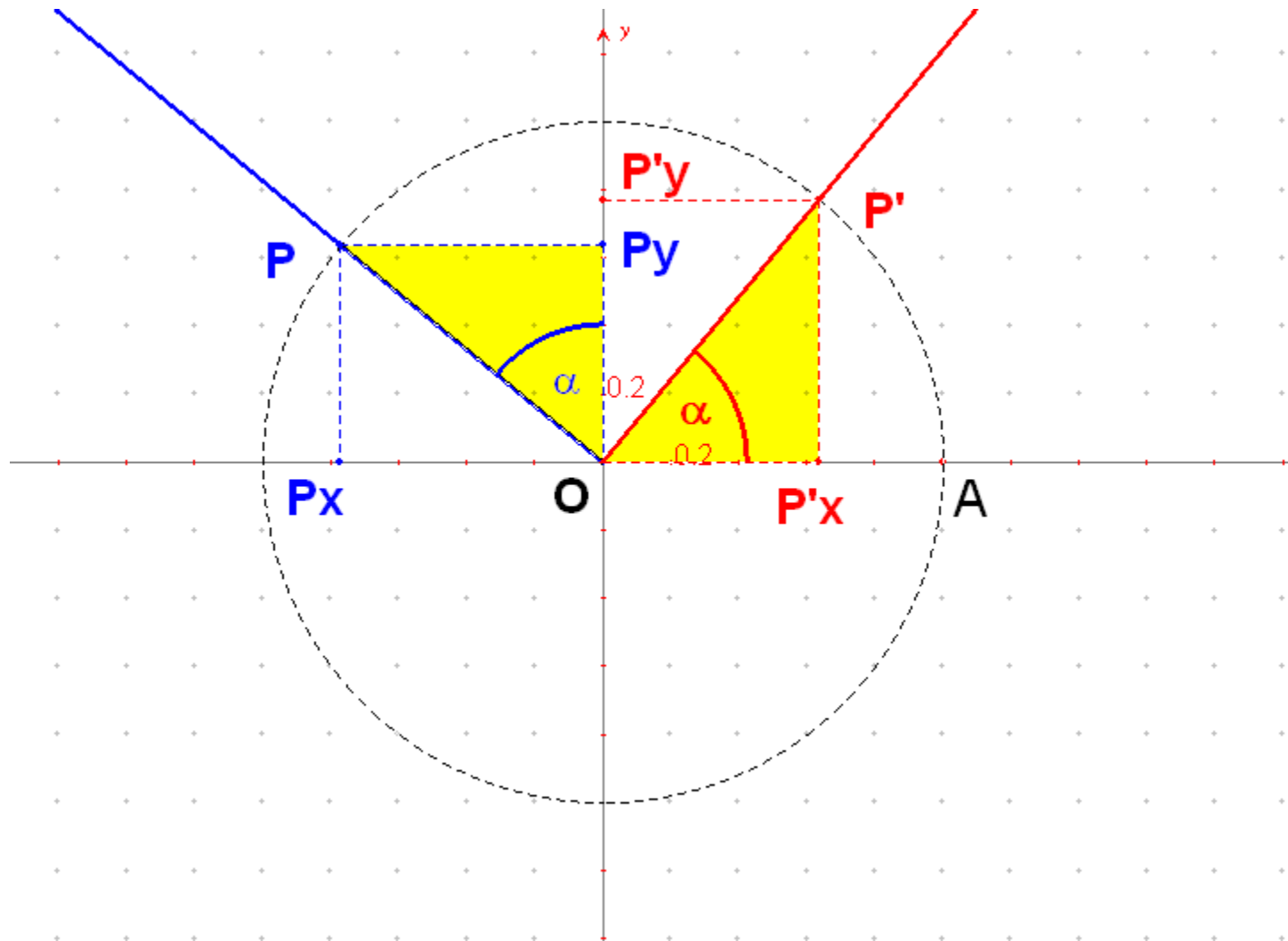


Położ punkt  $P$  w II ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas

$$|\angle AOP| = 90^\circ + \alpha$$

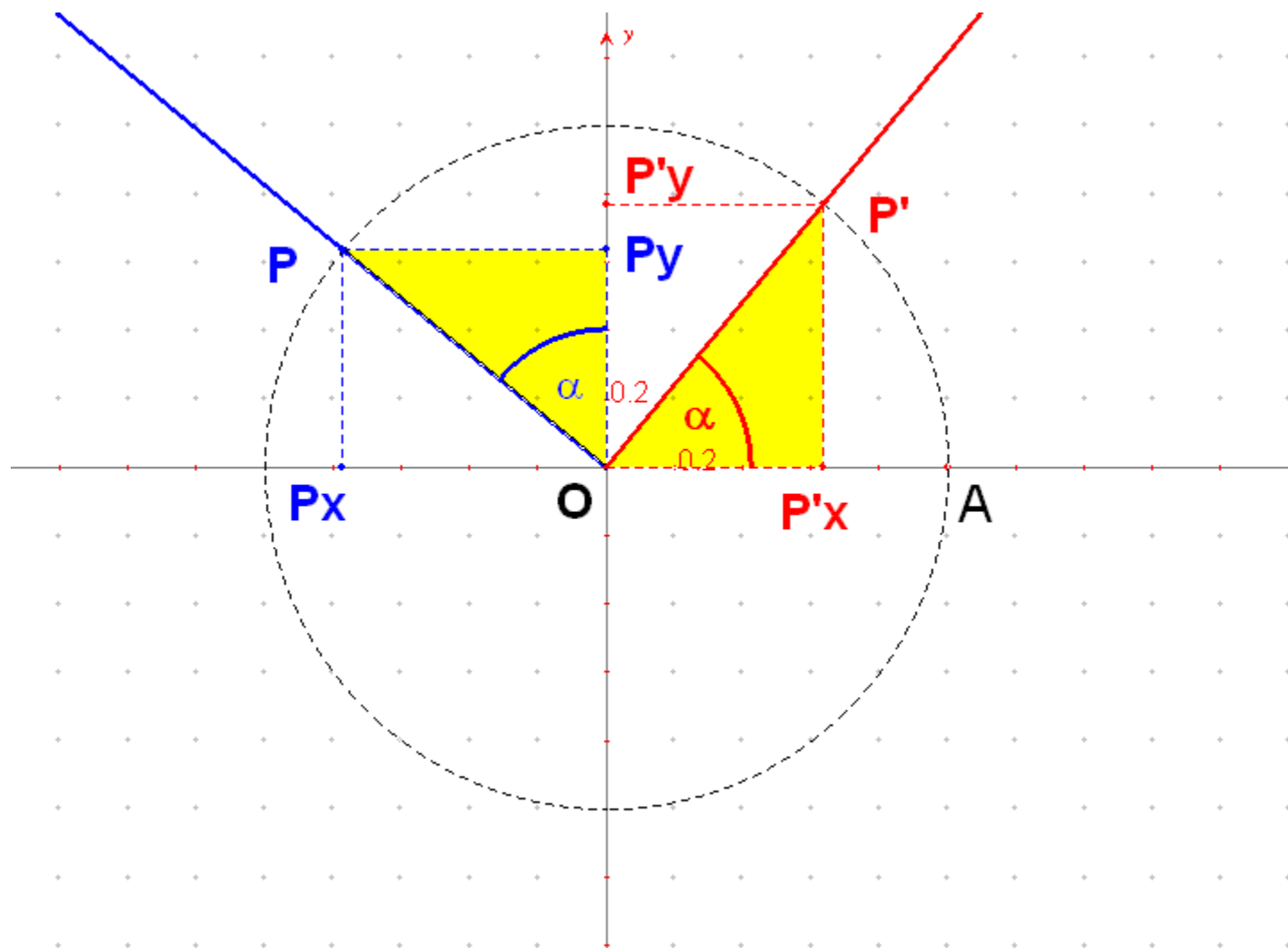


Rzędna i odcięta punktu  $P$  są odpowiednikami rzędnej lub odciętej punktu  $P'$ .

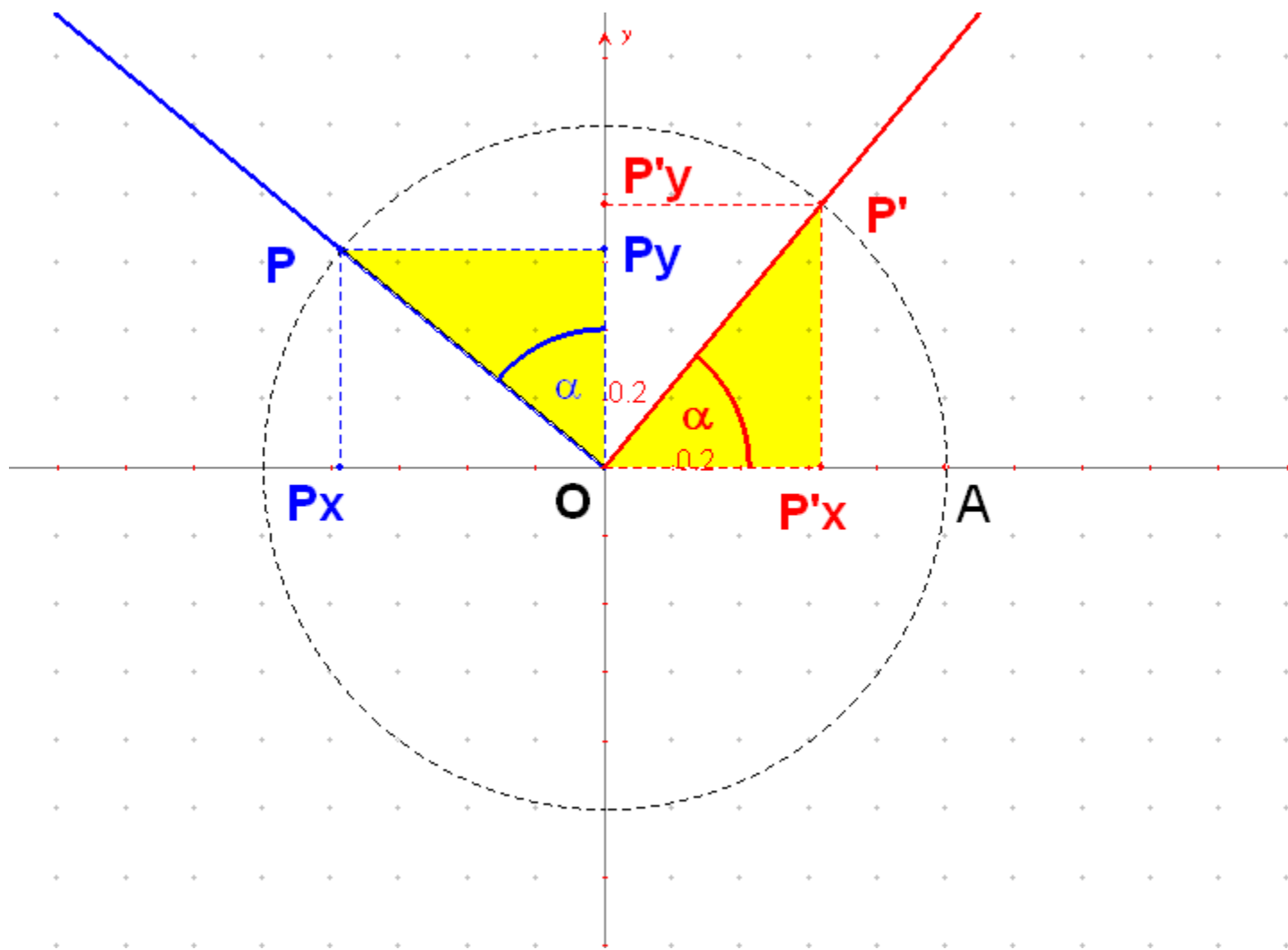




Teraz problem w tym, byś z tej konstrukcji odczytał odpowiedni wzór redukcyjny. Niech punkt  $P$  nadal znajduje się w II ćwiartce.

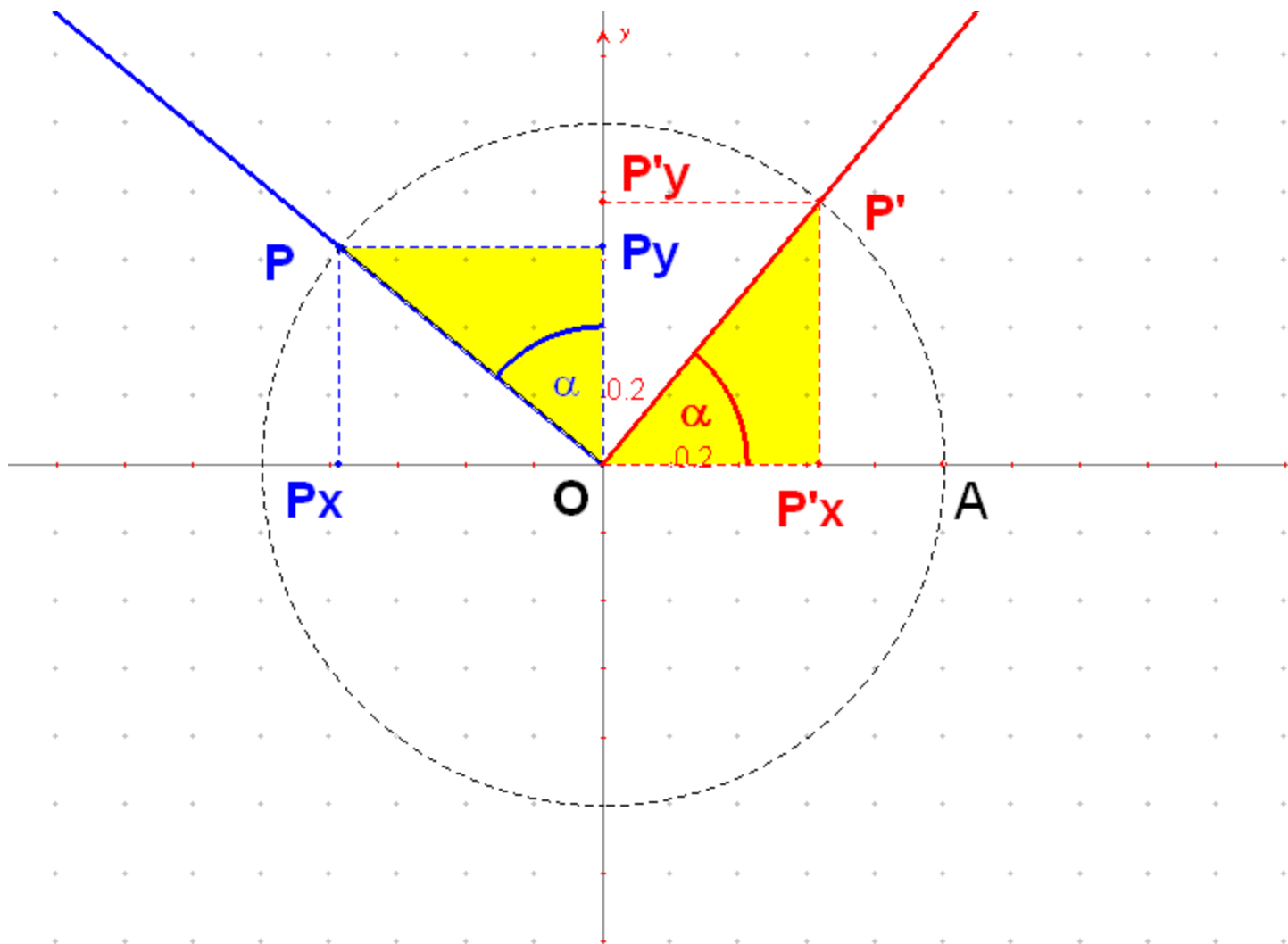


Zauważ, że  $\sin(90^\circ + \alpha)$  to rzędna  $PP_x$  punktu  $P$ . Jej odpowiada w ćwiartce I odcięta  $OP'_x$  punktu  $P'$ , czyli  $\cos \alpha$ .



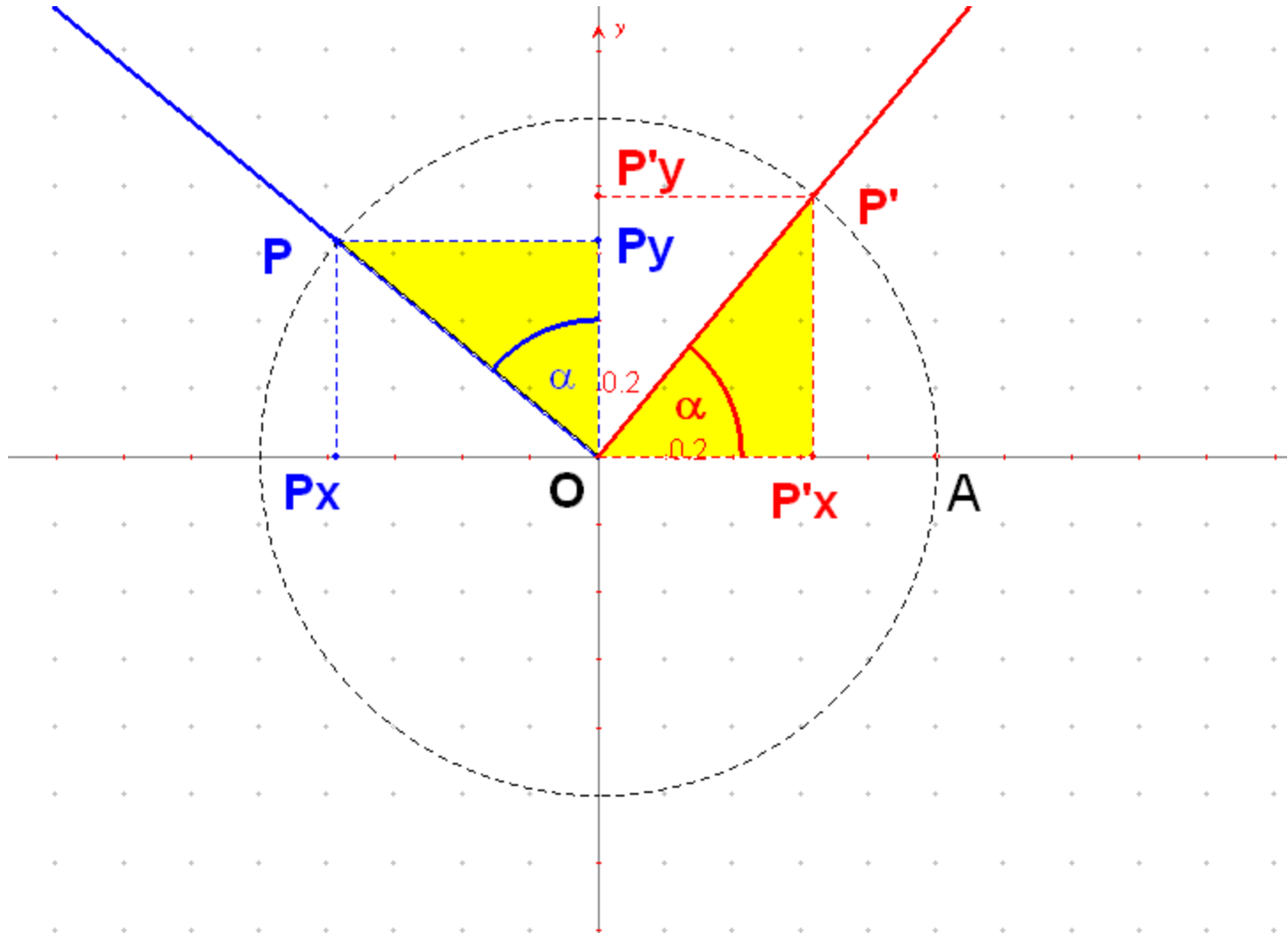
Rzędna  $PP_x$  punktu  $P$  jest dodatnia (bo odczytujemy ją w górę) i odcięta punktu  $P$  jest też dodatnia.

Mamy więc  $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ . To jest pierwszy poznany przez Ciebie wzór redukcyjny.



Wyprowadź samodzielnie wzór na  $\cos(90^\circ + \alpha)$  (30).

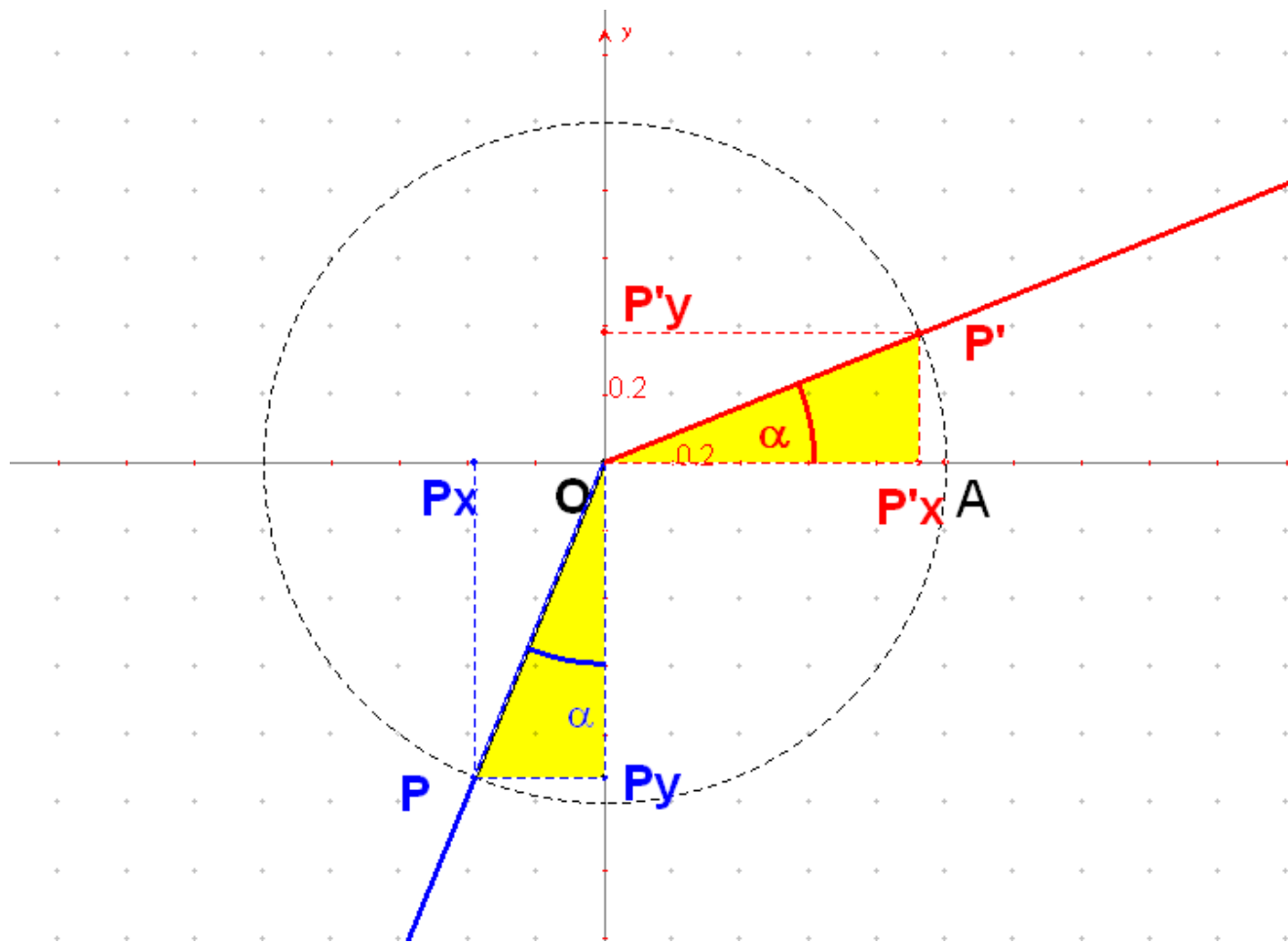
A co z  $\text{tg}(90 + \alpha)$ ? Jest to stosunek rzędnej  $PP_x$  do odciętej  $PP_y$  punktu  $P$ . Jemu odpowiada w I ćwiartce stosunek odciętej  $OP'_x$  do rzędnej  $OP'_y$  punktu  $P'$ , czyli  $\text{ctg } \alpha$ .  
 Napisz , jaki wzor redukcyjny uzyskałeś w ten sposób (31)



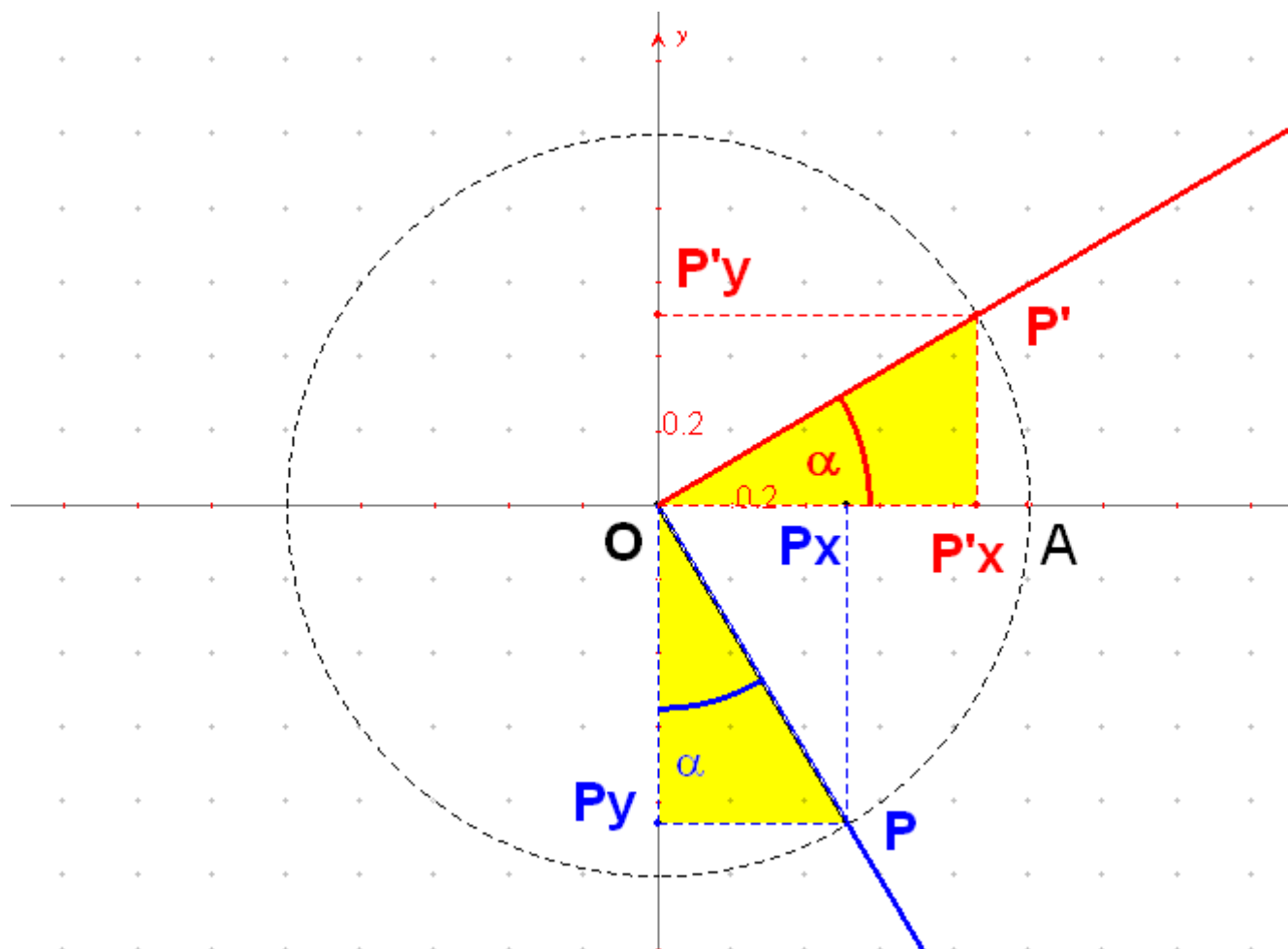
Położ punkt  $P$  w III ćwiartce układu współrzędnych. Wówczas

$$|\angle AOP| = 270^\circ - \alpha$$

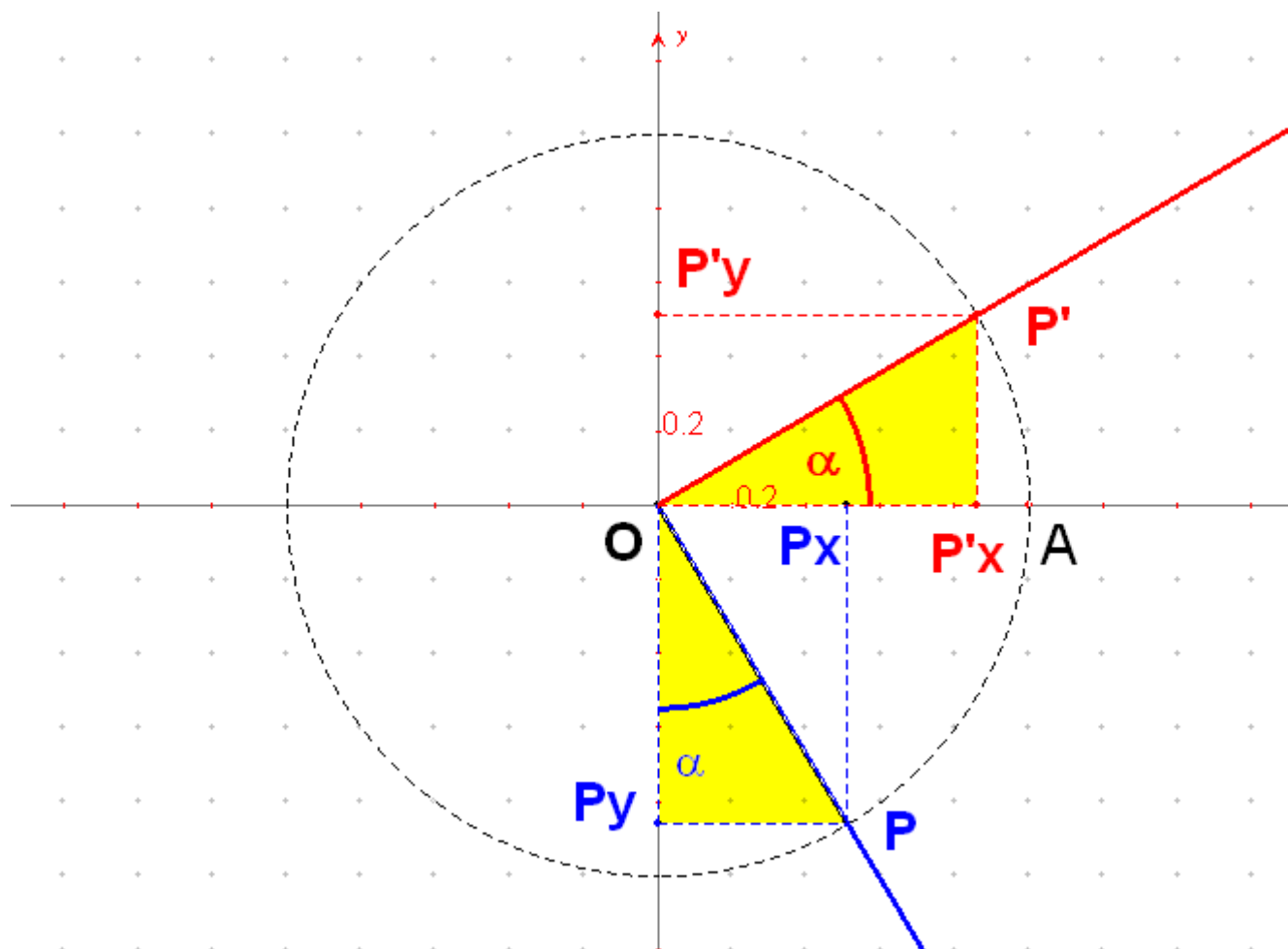
Wyznacz samodzielnie sinus, cosinus i tangens tego kąta redukując go do I ćwiartki **(32)**



Niech teraz kąt ma miarę  $270^\circ + \alpha$ . Jego ramię końcowe znajduje się więc w IV ćwiartce układu współrzędnych.



$\sin (270^\circ + \alpha)$  to rzędna  $OP_y$ . W I ćwiartce odpowiada jej odcięta  $OP'_x$  punktu  $P'$ , a zatem  $\cos \alpha$ .





Wyprowadź w ten sam sposób:

$$\cos (270^\circ + \alpha) = \dots\dots\dots (33)$$

$$\operatorname{tg} (270^\circ + \alpha) = \dots\dots\dots (34)$$

$$\operatorname{ctg} (270^\circ + \alpha) = \dots\dots\dots (35)$$

Jak zauważyłeś, każdy kąt dowolnej ćwiartki da się przedstawić jako kąt o mierze odpowiednio:

$$90^\circ + \alpha, \text{ (dla II ćwiartki)}$$

$$270^\circ - \alpha, \text{ (dla III ćwiartki)}$$

$$270^\circ + \alpha \text{ (dla IV ćwiartki)}$$

Zatem wystarczy każdy z nich zastąpić odpowiednim wzorem redukcyjnym.

W ten sposób będziesz mógł wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kąta zarówno dla kąta  $172^\circ$ , jak również  $284^\circ$  i  $318^\circ$

A jak wyznaczyć wartość cosinusa kąta np.  $1593^\circ$ ?

Najpierw dzielimy ten kąt przez  $360^\circ$  gdyż kąt  $1493^\circ$  jest kątem powstałym w wyniku kilku pełnych obrotów i obrotu o kąt mniejszy niż  $360^\circ$ .

Interesować nas będzie reszta z dzielenia kąta  $1593^\circ$  przez  $360^\circ$ .

Ponieważ  $1593^\circ = 4 \cdot 360 + 153^\circ$ ,

więc reszta wynosi  $153^\circ$ .

Teraz wystarczy znaleźć  $\sin 153^\circ$

$$\sin 153^\circ = \sin (90^\circ + 63^\circ)$$

a to zgodnie ze wzorem

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$$

daje wartość

$$\sin 1593^\circ = \sin 153^\circ = \cos 63^\circ \approx 0,4540$$

Wyznacz

$$\cos 1245^\circ, \operatorname{tg} (-473^\circ) \quad (36)$$

Uwaga:  $-473^\circ = -720^\circ + 247^\circ$

## TABELA PYTAŃ I ODPOWIEDZI

Pytania zamieszczone w tym dokumencie są powtórzeniem pytań zawartych w pokazie „Trygonometria”.

Pobieraj stąd teksty pytań, odpowiadaj na nie lub uzupełniaj je i wyslij jako plik Worda swojemu nauczycielowi.

1. Stosunek długości odcinków **AA'** do długości **AS** zmienia się / nie zmienia się **(1)**
2. Czy wiesz, dlaczego tak się dzieje?  
Spróbuj to wyjaśnić - prześlij wyjaśnienie tego faktu swojemu nauczycielowi matematyki **(2)**.
3. Stosunek długości odcinków **AA** do długości **SA'** zmienia się / nie zmienia się **(3)**
4. Poruszaj na poniższym aplecie punktem **M** zmieniając w ten sposób miarę kąta przy wierzchołku **K**. Wyznacz wartości sinusa dla kilku różnych kątów i wpisz je do tabeli w pliku rozwiązań **(4)**.
5. Poruszaj na poniższym aplecie punktem **M** zmieniając w ten sposób miarę kąta przy wierzchołku **K**. Wyznacz wartości cosinusa dla kilku różnych kątów i wpisz je do tabeli w pliku rozwiązań **(5)**.
6. Czy może się zdarzyć, by wartość sinusa lub cosinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym przekroczyła wartość 1? Dlaczego? **(6)**
7. Wartości sinusów i cosinusów kątów jest zawsze większa niż ..... oraz mniejsza niż ..... **(7)**:
8. Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy iloraz długości ..... do długości ..... **(8)**.
9. Na poniższym aplecie jest to iloraz .....**(9)**
10. Użyj swojego kalkulatora i korzystając z poniższego apletu wyznacz wartości tangensa i cotangensa dla kilku różnych kątów i umieść je w tabeli zamieszczonej w pliku Worda **(10)**.
11. Wartość sinusa  $30^\circ$  wynosi więc: ..... **(11)**
12. Zatem wartość  $\cos 30^\circ$  wynosi ..... **(12)**
13. Wartość  $\cos 60^\circ$  wynosi więc: ..... **(13)**
14. Zatem wartość  $\sin 60^\circ$  wynosi ..... **(14)**
15.  $\sin 45^\circ = \dots\dots$  **(15)**

16.  $\cos 45^\circ = \dots\dots\dots$  (16)

17. Gdy obracam od strony lewej do prawej, wówczas kąt zakreślony przez punkt  $M$  jest skierowany zgodnie / niezgodnie z ruchem wskazówek zegara. (17)

18. Ruch punktu  $M$  na okręgu po lewej stronie jest ruchem w kierunku ....., zaś po prawej w kierunku ..... (18)

19. Poruszaj nim tak, by kąt który tworzą te półproste był dodatnio skierowany. Czy poruszasz zgodnie czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara?  
Udziel odpowiedzi: zgodnie / przeciwnie (19)

20. Ile musisz wykonać pełnych obrotów, by utworzyć kąt o mierze  $1080^\circ$ ? W jakim kierunku? Odpowiedź: .....obrotów, w kierunku..... (20)

21. Ile musisz wykonać pełnych obrotów i o jaki kąt jeszcze obrócić, by utworzyć kąt o mierze  $-15430^\circ$ ? W jakim kierunku?  
Odpowiedź: .....obrotów oraz kąt o mierze ....., w kierunku..... (21)

22. Uzupełnij poniższą tabelę znaków tych wartości w poszczególnych ćwiartkach (22).

ramię końcowe kąta leży w ćwiartce:	rzędna	odcięta
1 ćwiartka		
2 ćwiartka		
3 ćwiartka		
4 ćwiartka		

23. Na podstawie obejrzanego filmu i znajomości definicji funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym dokończ definicję cosinusa dowolnego kąta skierowanego:  
**cosinusem** kąta jest stosunek .....punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do ..... (23)

24. **tangensem** kąta jest stosunek .....punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do ..... (24)

25. **cotangensem** kąta jest stosunek .....punktu leżącego na ramieniu końcowym kąta do ..... (25)

26. Uzupełnij poniższą tabelę, wpisując znak „+” lub „-” (26)

	ćwiartka 1	ćwiartka 2	ćwiartka 3	ćwiartka 4
$\sin \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				

27. Czy można wskazać również cotangens, jako pewien odcinek? Obejrzyj film i na jego podstawie dokonaj opisu konstrukcji tego odcinka podobnie, jak to widziałeś na filmie z tangensem **(27)** .

28. A teraz obejrzyj zachowanie się cotangensa dla innych kątów i opisz dokładnie tak, jak to zostało wcześniej opisane dla tangensa **(28)**.

29. Dla których kątów  $x$  funkcja  $\operatorname{ctg} x$  nie ma wartości? **(29)**

30. Wyprowadź samodzielnie wzór na  $\cos (90^\circ + \alpha)$  ..... **(30)**

31. Napisz , jaki wzór redukcyjny uzyskałeś w ten sposób? **(31)**

32. Wyznacz samodzielnie sinus, cosinus i tangens kąta  $270^\circ - \alpha$  redukując go do I ćwiartki **(32)**

**33.**