KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Stereometria

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Kurs ten przeprowadzi Cię przez zakamarki stereometrii, której nie poświęcono w polskim programie nauczania matematyki

w szkole średniej zbyt wiele czasu.

Jednak głębsza znajomość tej wiedzy będzie niezbędna, byś

z powodzeniem mógł studiować wybrany przedmiot na politechnice, lub studiując matematykę w różnych jej formach.

Treść jest wzbogacona o trójwymiarowe aplety programu CABRI 3D, czyli konstrukcje, które możesz uruchamiać po wciśnięciu prawego klawisza myszy.

Czasem warto poruszać wybranymi obiektami trójwymiarowymi, by sprawdzić, odkryć lub poznać nowe nieznane ich własności.

Staraj się ruszać wszystkim, czym się da.

Ale też z uwagą czytaj polecenia typu: „***poruszaj punktem …***”

Ponadto będą pytania lub proste problemy dla Ciebie, na które będziesz odpowiadał swojemu nauczycielowi poprzez platformę e-learningową.

Być może Twój nauczyciel oceni Cię za to, ale głównie chodzi

o to, byś w ten sposób samodzielnie studiował i porządkował nieznaną Ci wiedzę.

Będą też zadania, które na egzaminie maturalnym ułatwią Ci podejście do zadań egzaminacyjnych.

Wszystko to po to, byś polubił matematykę i uwierzył, że to nie jest wcale trudny przedmiot.

Stereometria jak każda inna dziedzina matematyki wymaga poznania pewnej teorii, według której została zbudowana.

W tworzeniu każdej wiedzy matematycznej, szczególnie geometrii wymagane są pewne ***pojęcia pierwotne*** – takie, których sens jest dla nas zrozumiały np. punkt, prosta, odcinek, odległość.

Aby sens tych pojęć był jednoznaczny i w pełni być zrozumiały, dodajemy do nich własności, których nie uzasadniamy z uwagi na ich prostotę.
Są to ***aksjomaty***.

Dopiero na bazie tych dwóch zespołów pojęć tworzymy pozostałą teorię.
Są nią ***twierdzenia***, które powinny być uzasadnione na podstawie wcześniej przyjętych aksjomatów.

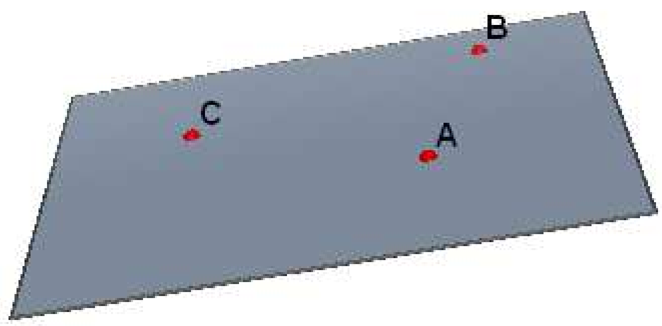
A potem już przychodzą tylko zadania i problemy w których będziemy wykorzystywać poznane twierdzenia.

- ***Pojęcia pierwotne stereometrii*** – te, których nie definiujemy np.: *punkt, prosta, płaszczyzna, przestrzeń, odległość,*

- ***Aksjomaty stereometrii*** będziemy poznawać na początku tego kursu. Aksjomaty nazywa się też często ***pewnikami***.

Aksjomat 1

Przez trzy punkty nie leżące na jednej prostej przechodzi zawsze jedna płaszczyzna.

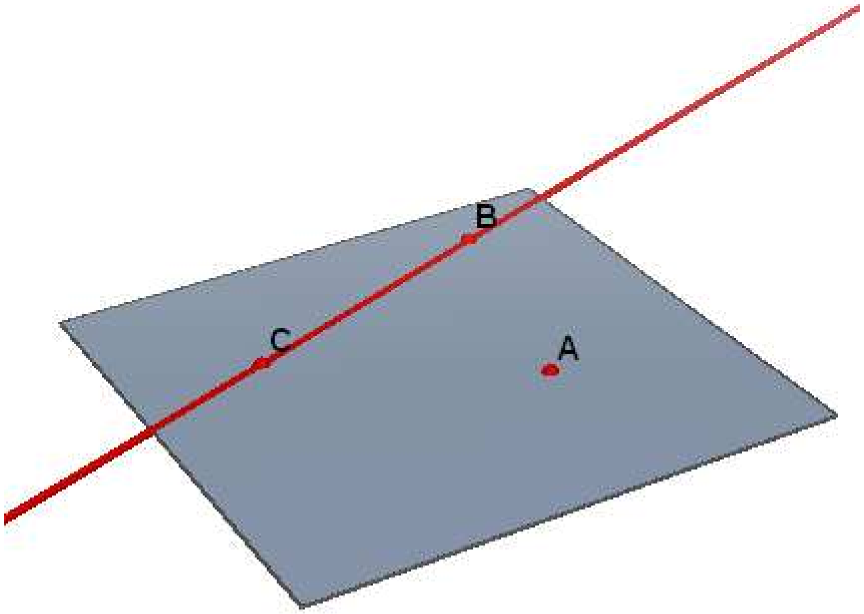


Pewnik ten jest tak oczywisty, że nie ma sensu go wyjaśniać.
Wiemy, że stół na trzech nogach rozstawionych w trójkąt równoboczny najpewniej stoi w równowadze trwałej.

Z aksjomatu tego wynika szereg informacji o tym, jak konstruować płaszczyznę.

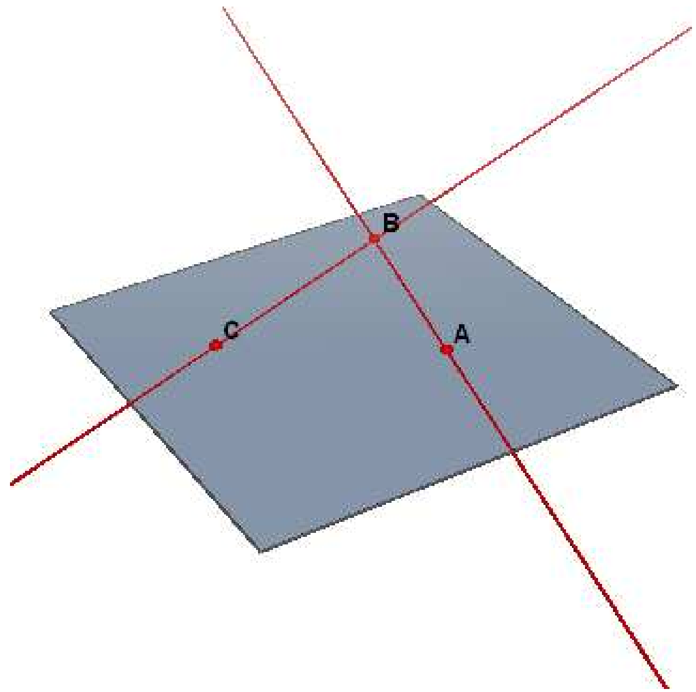
Twierdzenie 1

Płaszczyznę wyznaczają: prosta i punkt nie leżący na niej.



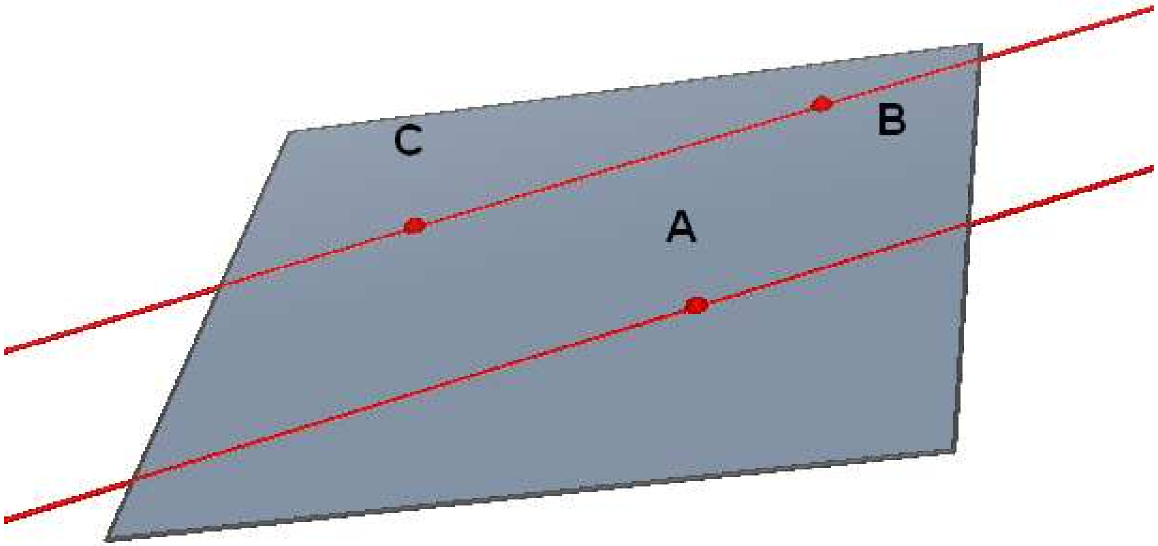
Twierdzenie 2

Płaszczyznę wyznaczają: dwie proste przecinające się



Twierdzenie 3

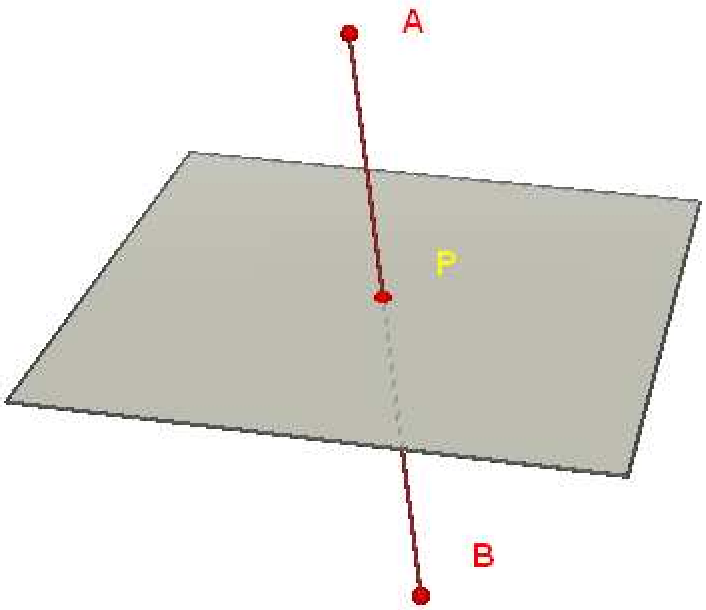
Płaszczyznę wyznaczają: 2 proste równoległe



Aksjomat 2

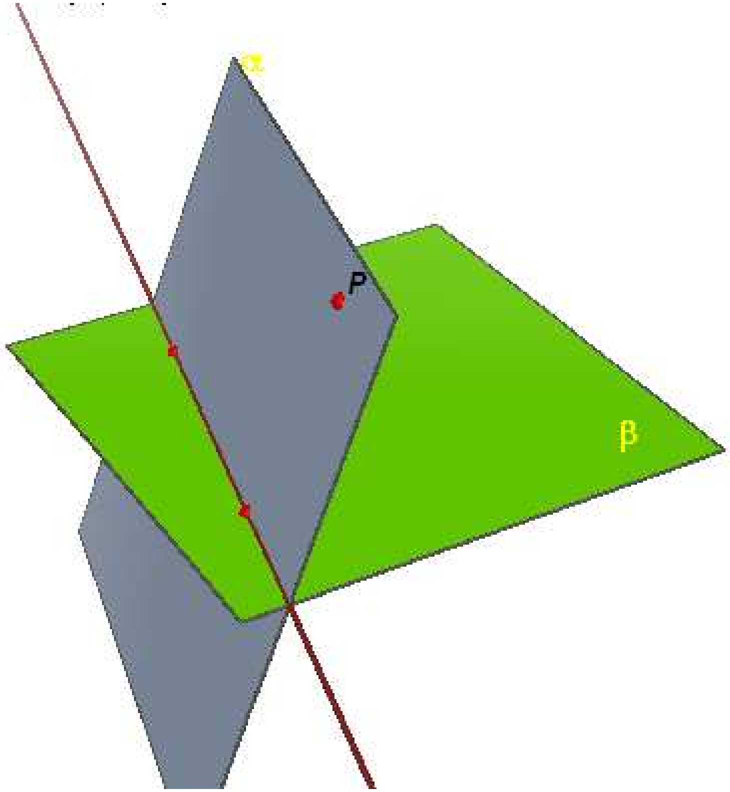
Płaszczyzna (obracaj nią) dzieli przestrzeń na dwie części przy czym:

- w każdej z nich mieści się nieskończenie wiele punktów,
- odcinek łączący dwa punkty tej samej części przestrzeni nie przecina płaszczyzny,
- odcinek łączący dwa punkty należące do dwóch różnych części przestrzeni przecina tę płaszczyznę.



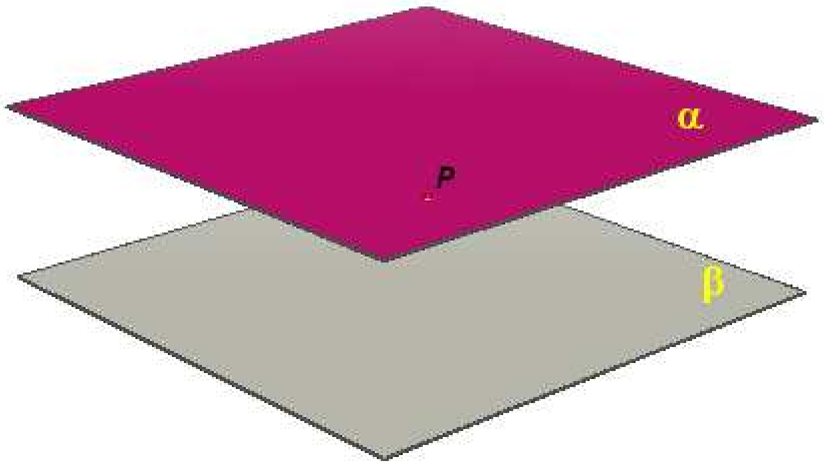
Dwie płaszczyzny

- Mogą się przecinać – ich częścią wspólną jest wówczas prosta zwana krawędzią przecięcia płaszczyzn - poruszaj punktem ***P.***



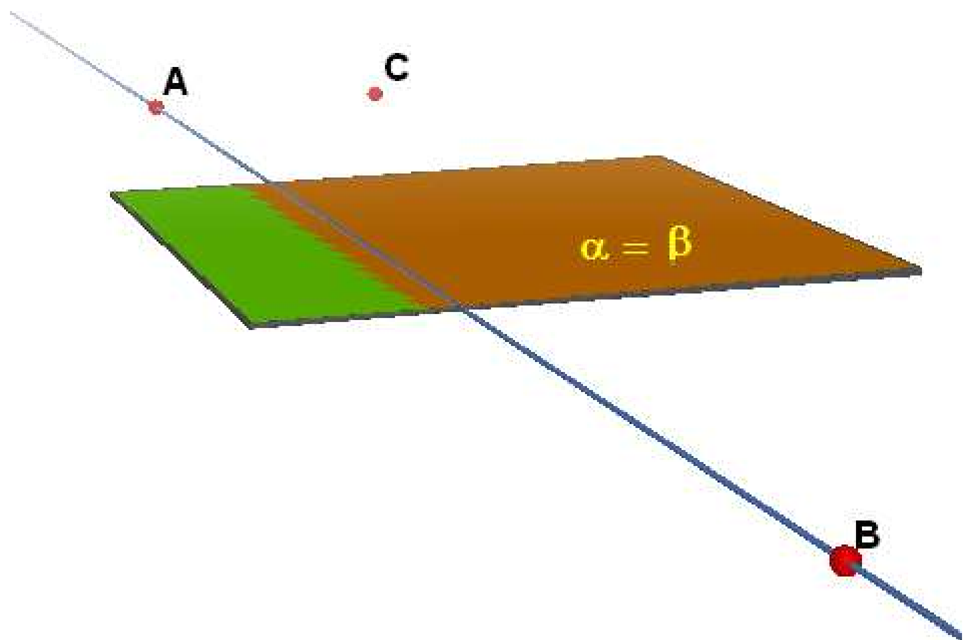
Dwie płaszczyzny

- Mogą być równoległe – nie mają części wspólnej (poruszaj różową płaszczyzną).

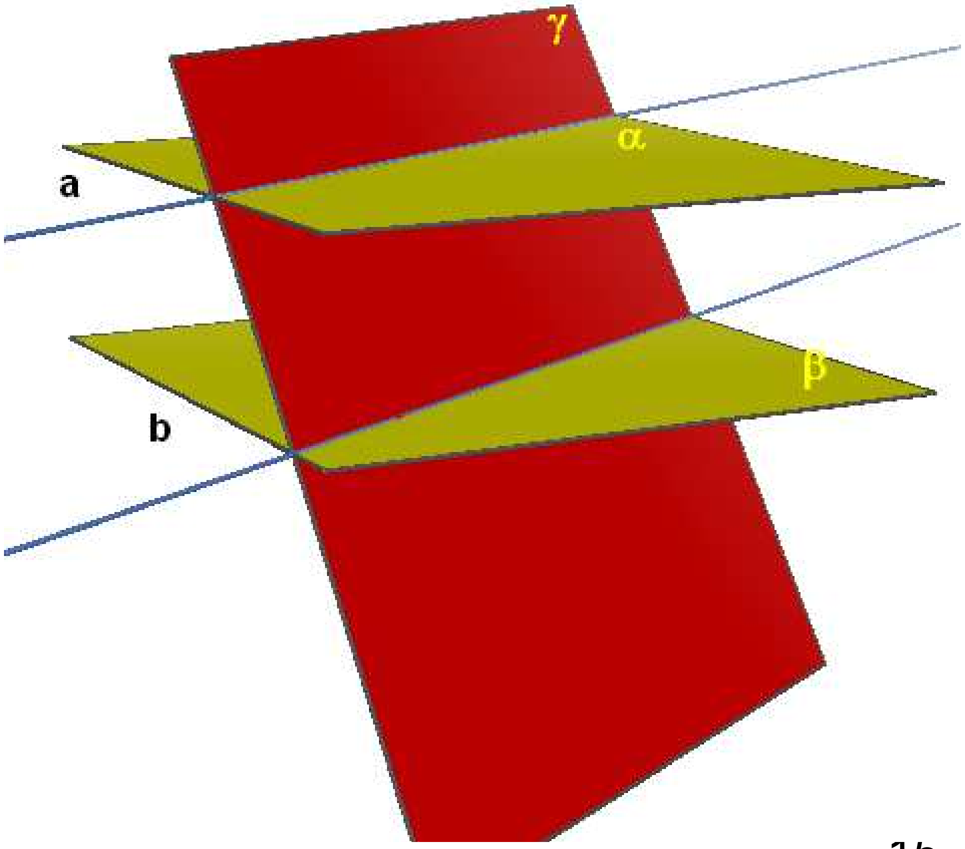


Dwie płaszczyzny

- Mogą się pokrywać - ich częścią wspólna jest każdy punkt jednej
- z tych płaszczyzn – to szczególny przypadek poprzedniej sytuacji – poruszaj punktem *C*



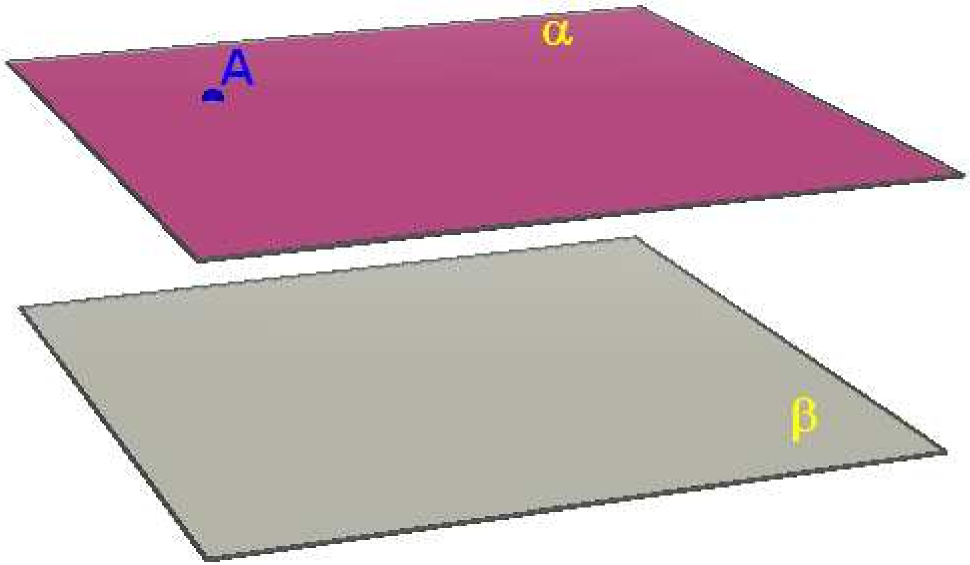
Twierdzenie 3
Jeżeli dwie płaszczyzny równoległe przetniemy trzecią płaszczyzną, to proste będące krawędziami tych przecięć są równoległe ***a*** || ***b***.



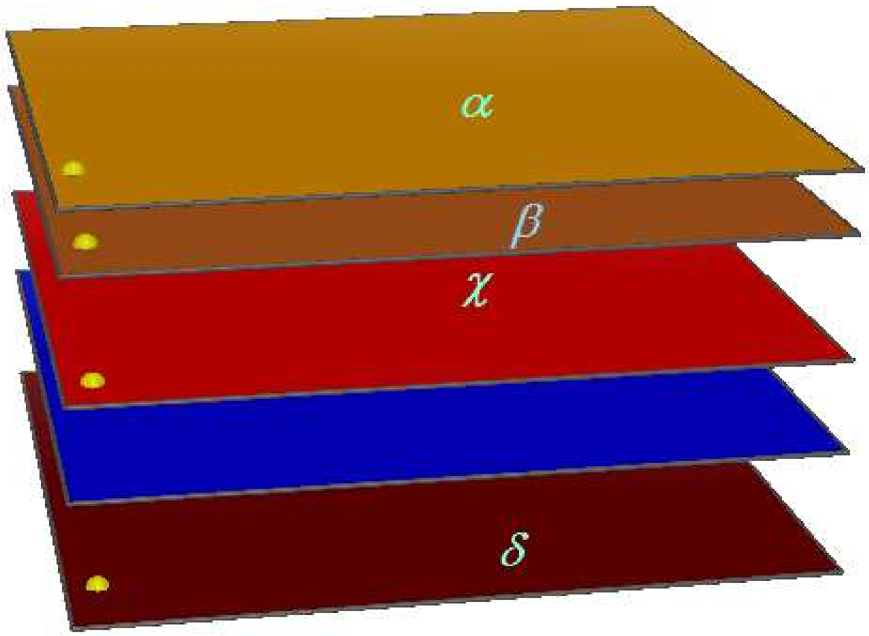
Twierdzenie 4

Przez punkt nie leżący na płaszczyźnie można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę równoległą do danej płaszczyzny.

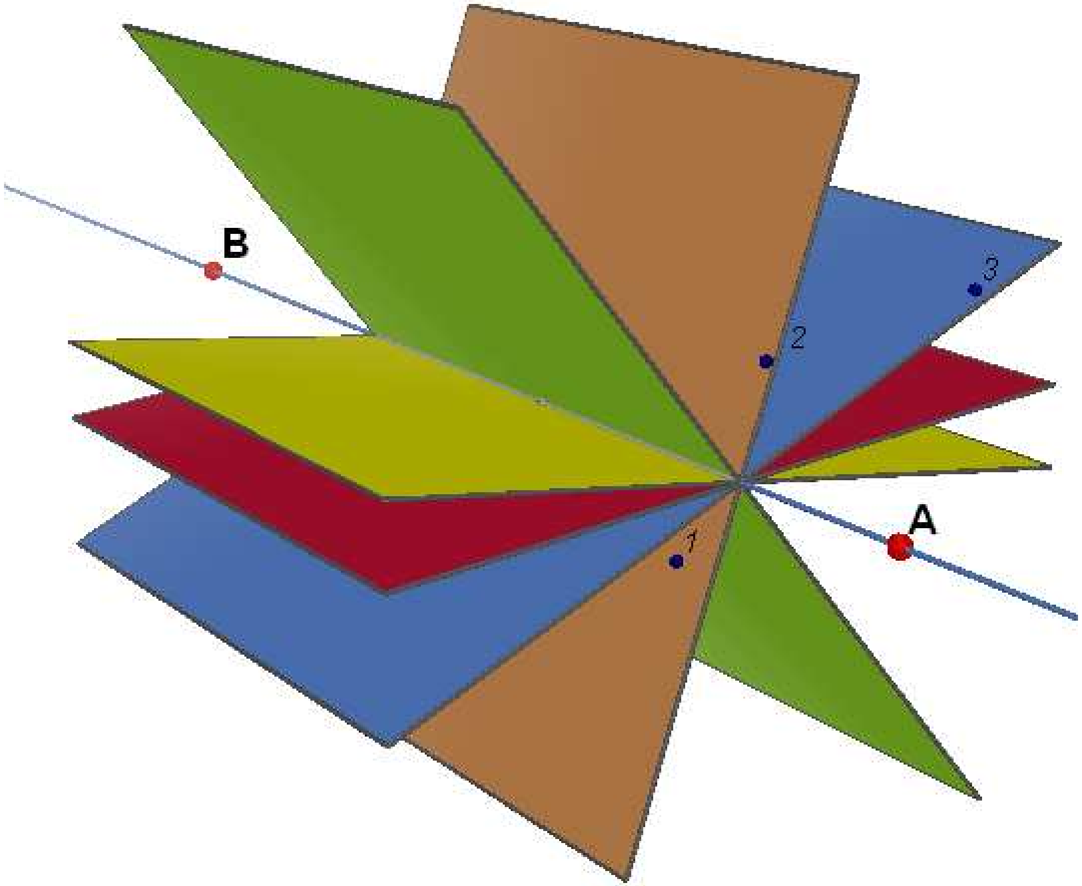
Poruszaj punktem ***A*** z wciśniętym klawiszem ***SHIFT***



Zbiór płaszczyzn równoległych do danej płaszczyzny tworzy ***kierunek płaszczyzn.***

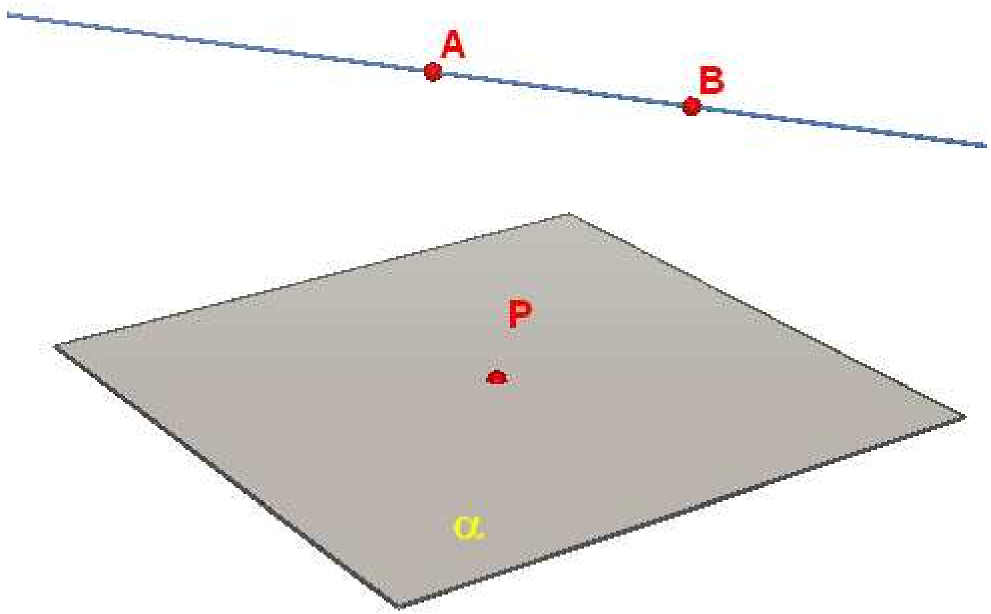


Zbiór płaszczyzn mających wspólną krawędź tworzy ***pęk płaszczyzn***.



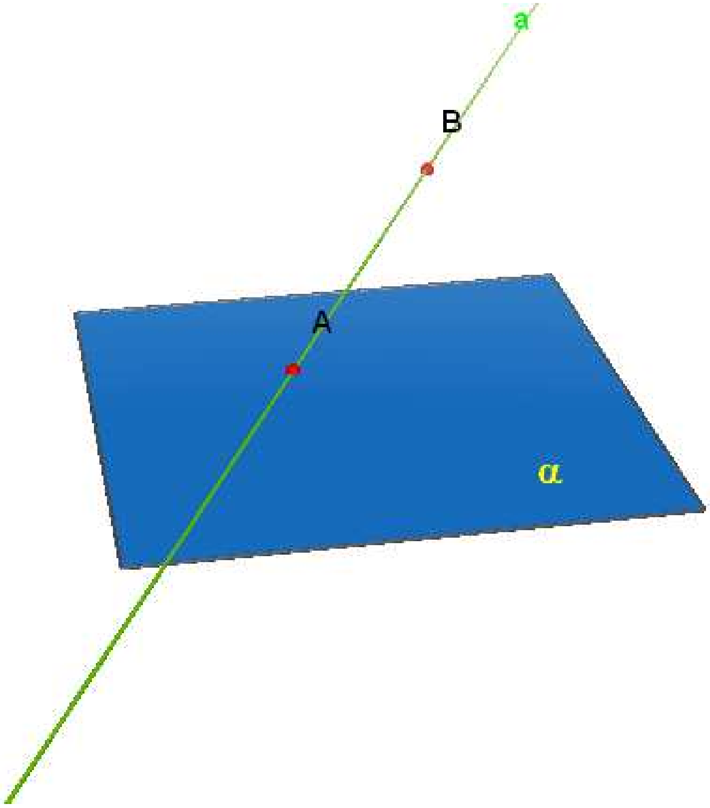
Prosta i płaszczyzna

- prosta równoległa do płaszczyzny – nie ma z nią wspólnych punktów.



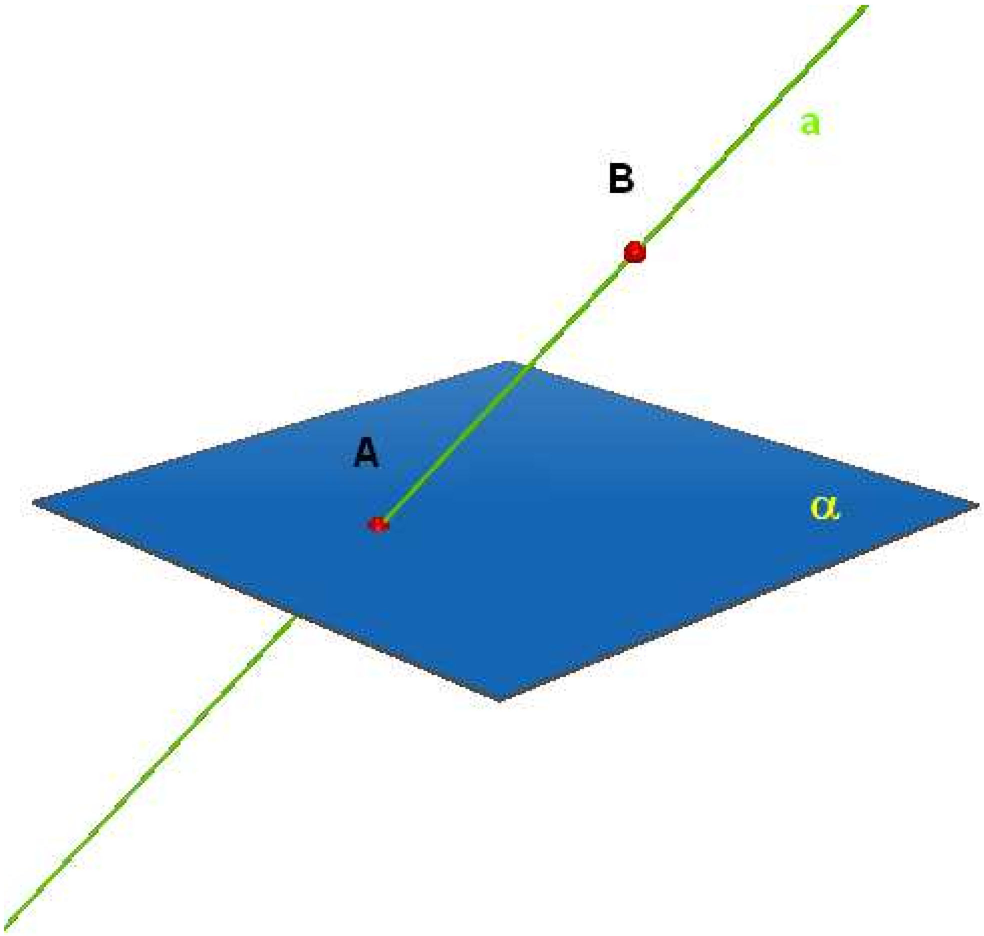
Prosta i płaszczyzna

- prosta leży na płaszczyźnie – też nazywamy ją równoległą do płaszczyzny

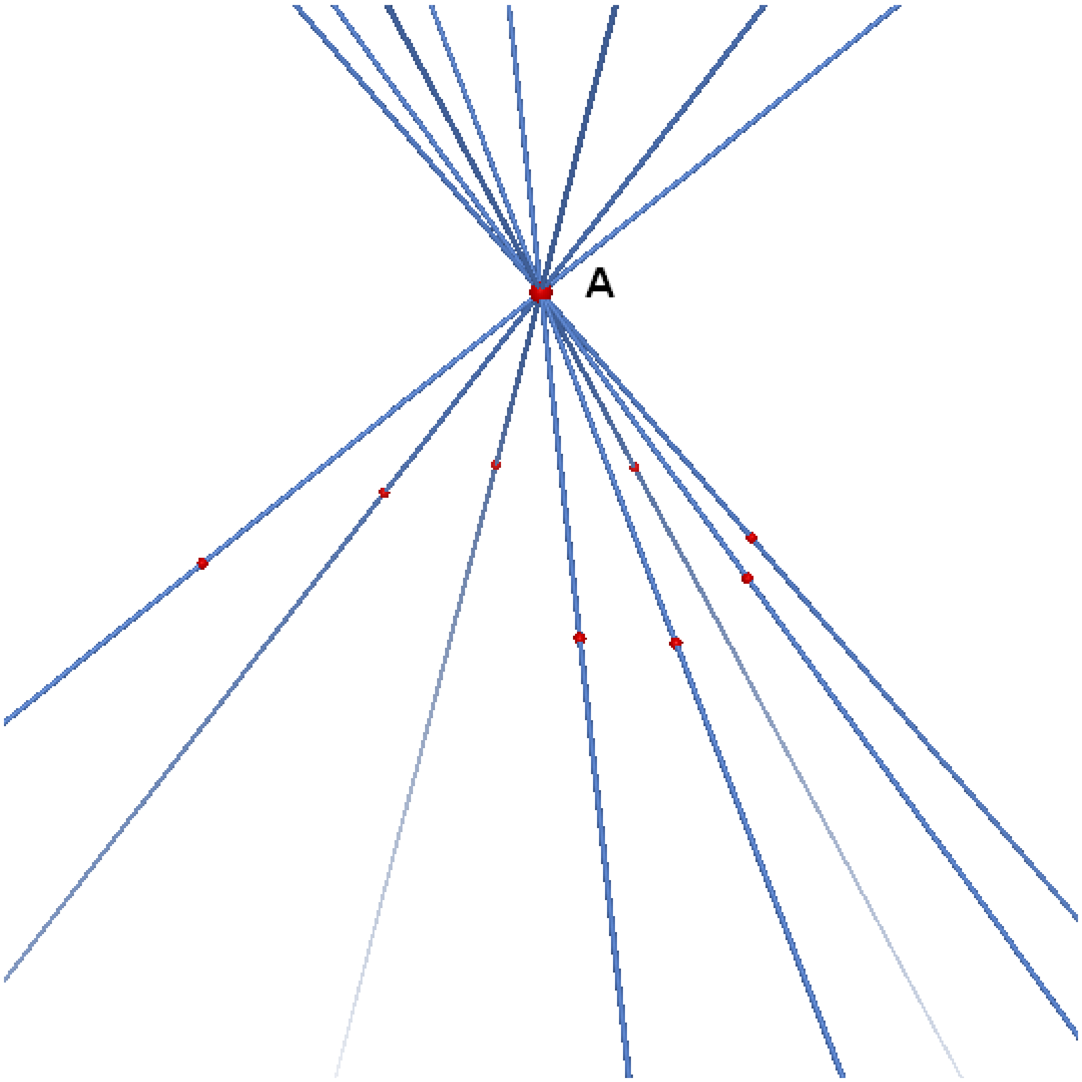


Prosta i płaszczyzna

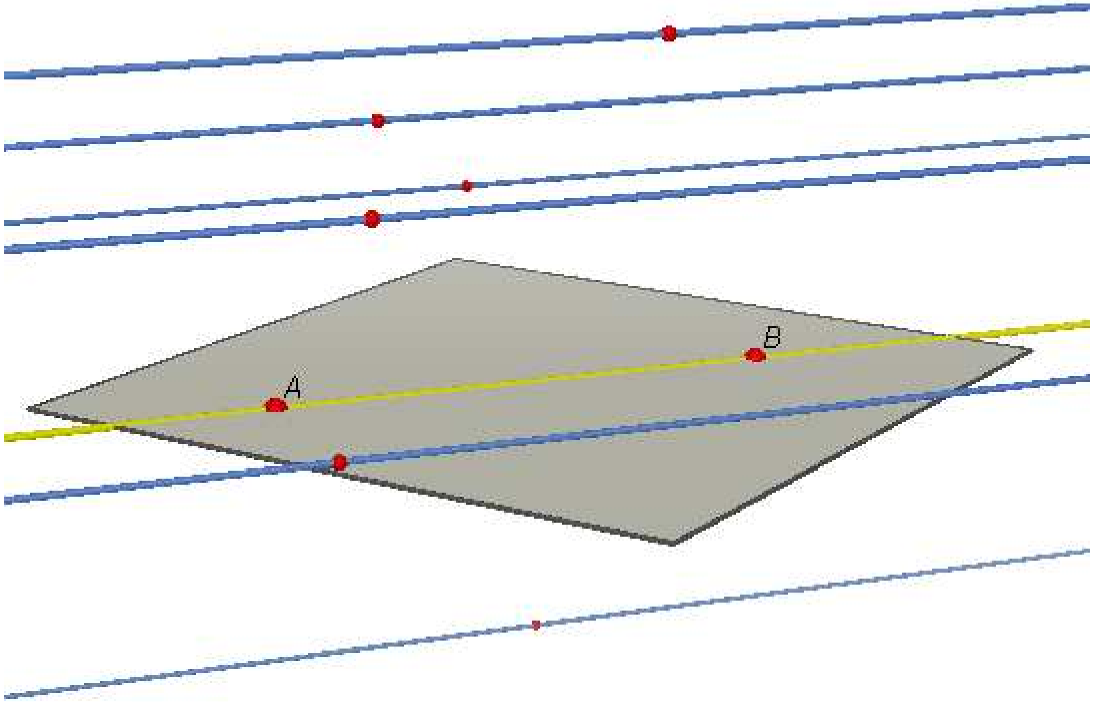
- prosta przecina płaszczyznę.



Rodzina prostych przechodzących przez dany punkt tworzy **pęk prostych**.

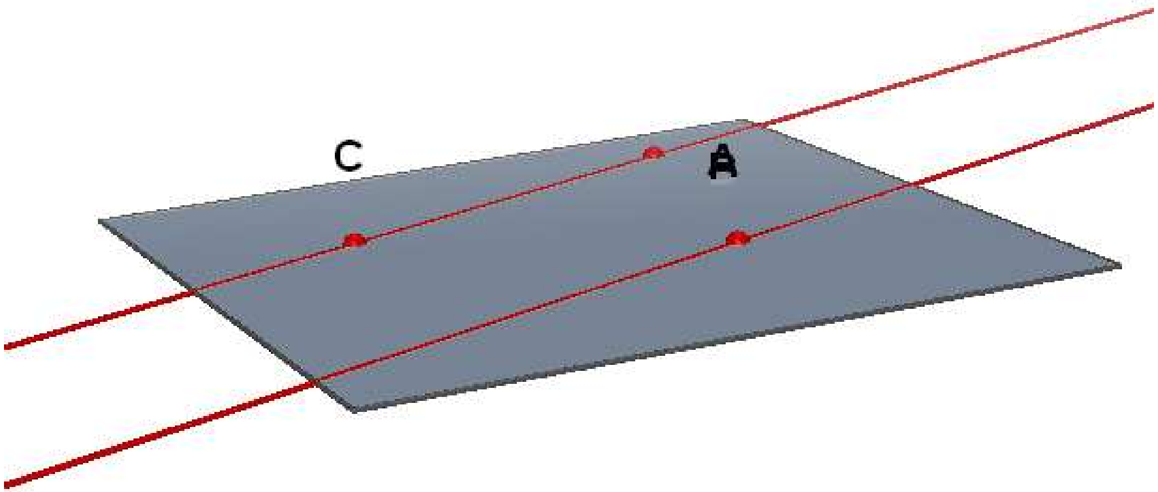


Rodzina prostych równoległych do danej prostej tworzy **kierunek prostych**



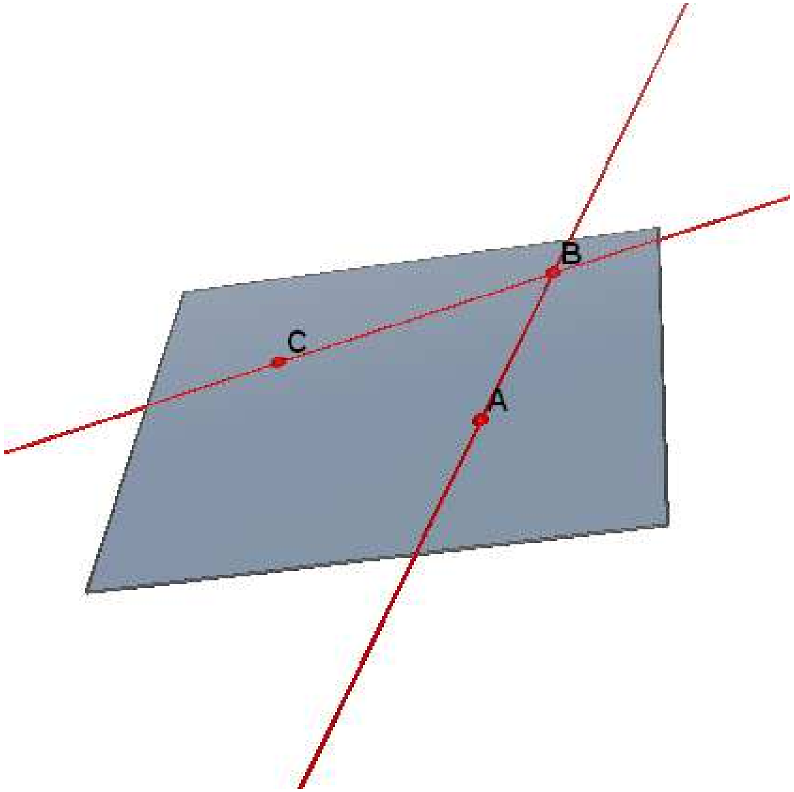
2 proste

- Mogą być równoległe – można przez nie przeprowadzić płaszczyznę



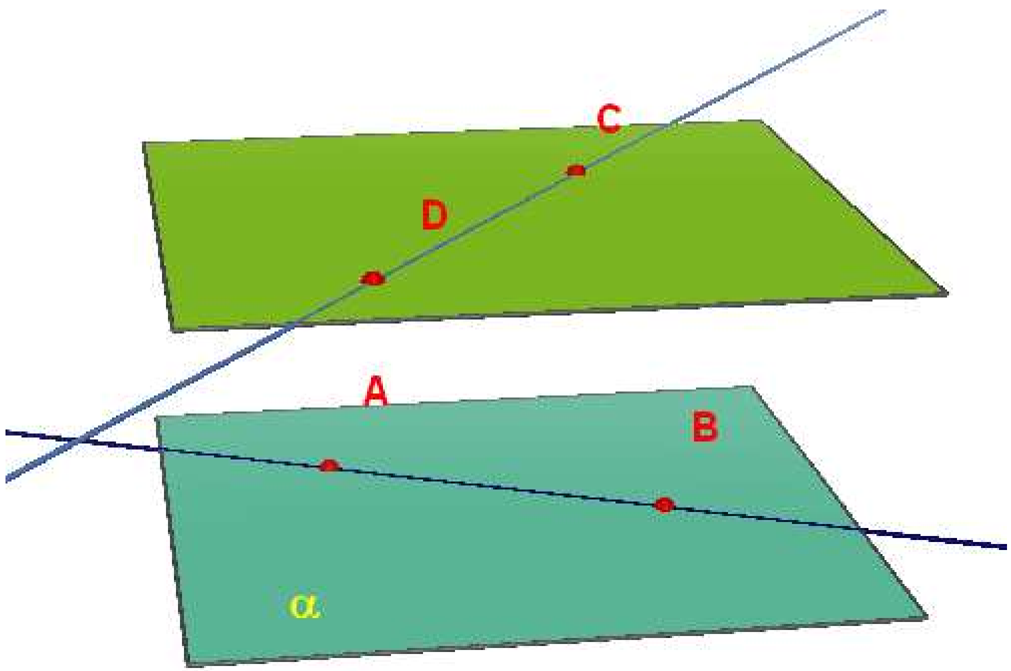
2 proste

- Mogą się przecinać – można przez nie przeprowadzić płaszczyznę



2 proste

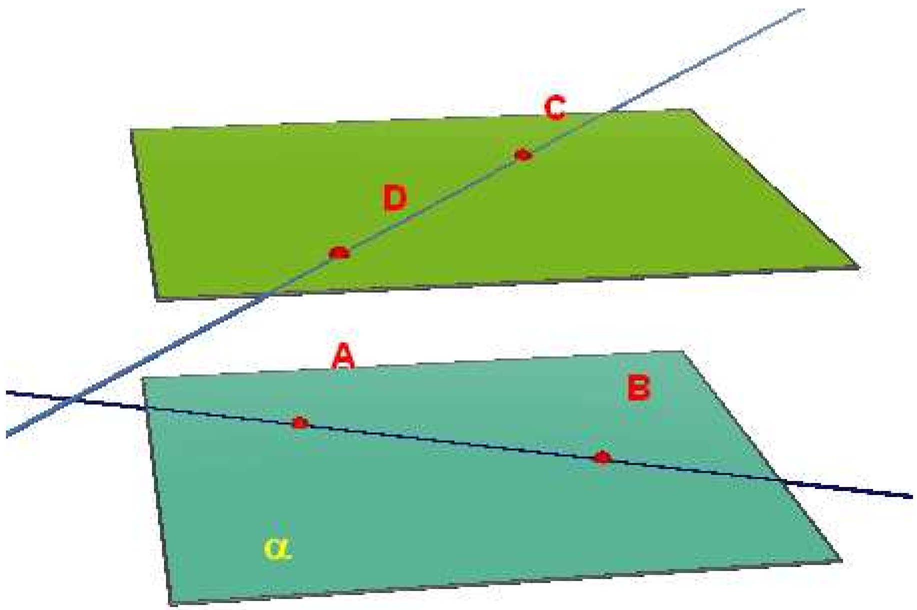
- Mogą być skośne – wówczas nie leżą w jednej płaszczyźnie.



2 proste

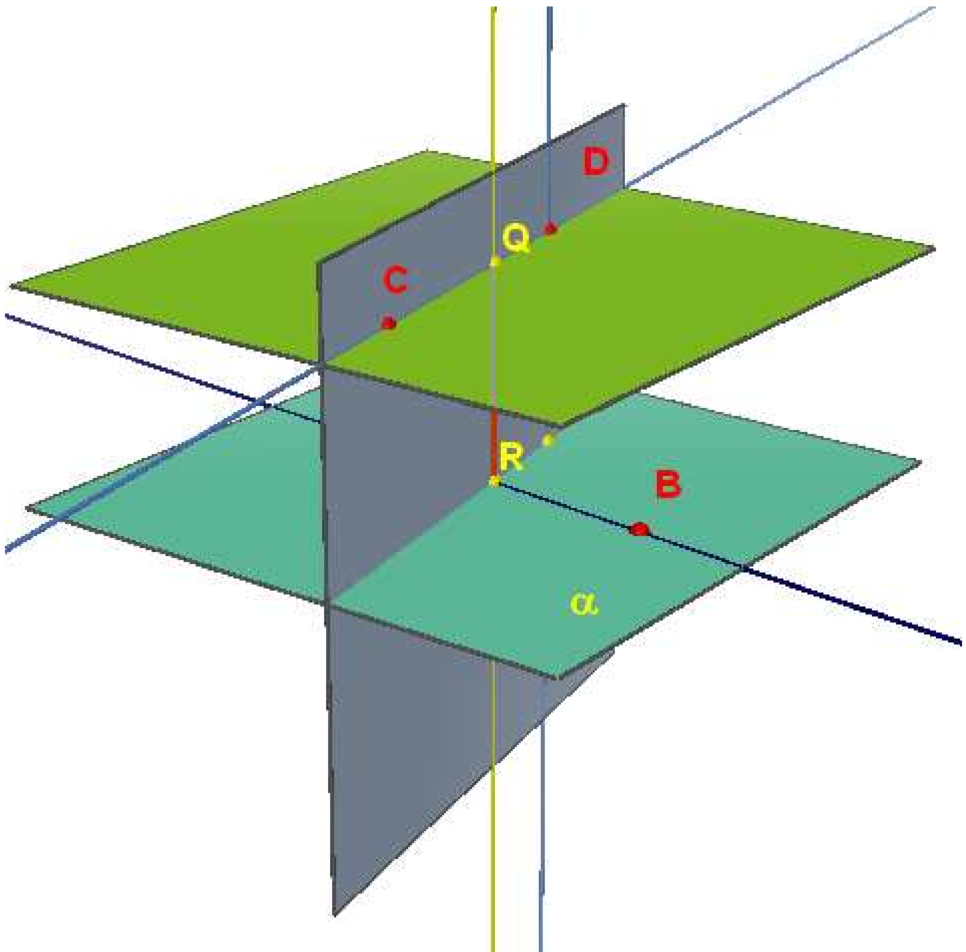
Jeśli proste ***a*** i ***b*** są skośne to :

- nie mają punktu wspólnego,
- istnieją dwie płaszczyzny równoległe, takie, że proste te zawierają się każda w innej.



Twierdzenie 5

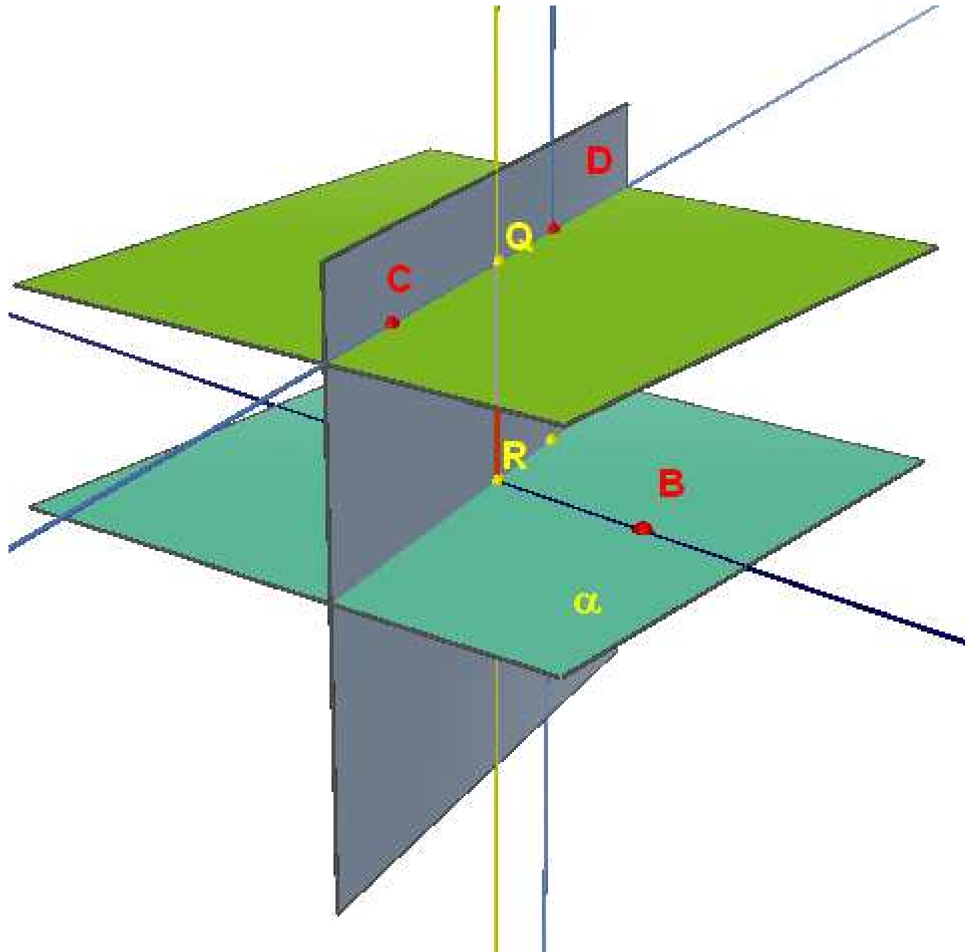
Jeśli dwie proste są skośne, to istnieje trzecia prosta, która przecina obie proste i jest prostopadła do każdej z nich.



Twierdzenie 6

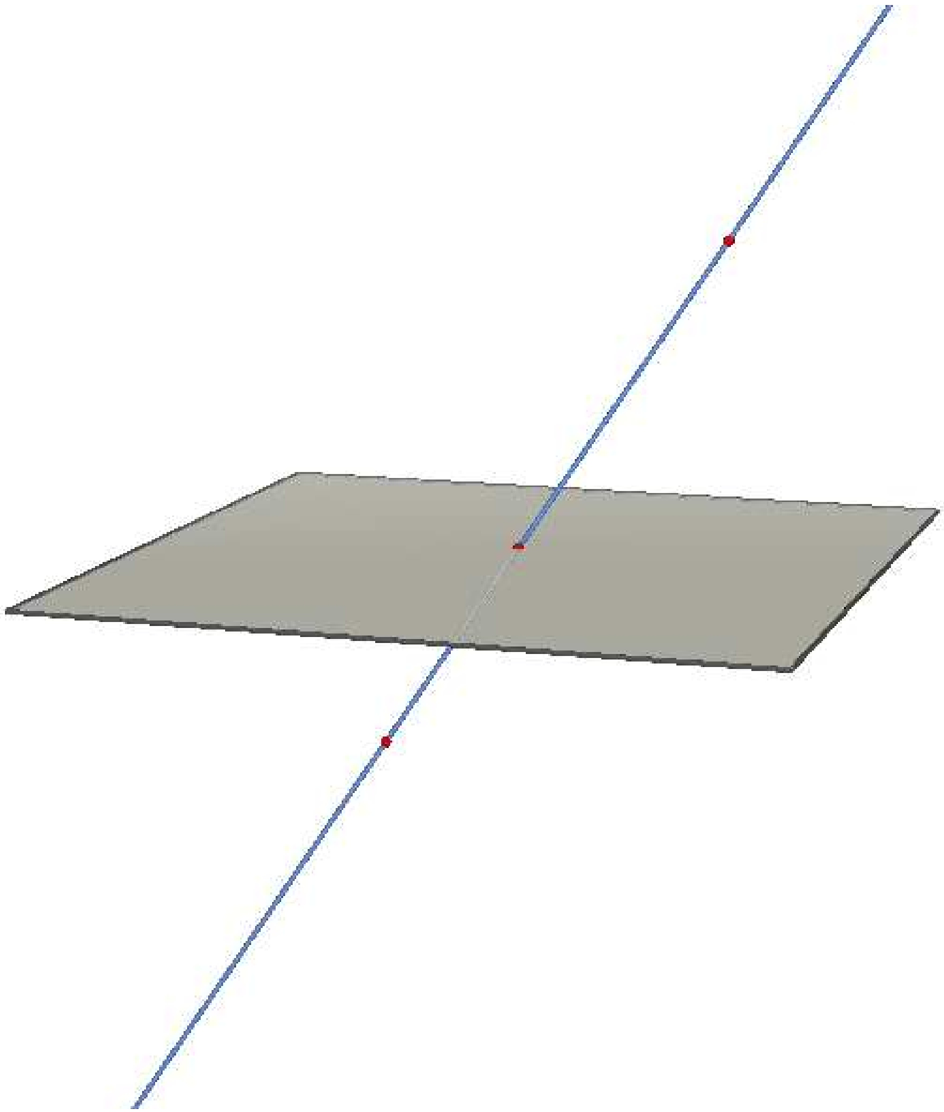
Prosta ta przecina pod kątem prostym również płaszczyzny, w których zawierają się te proste skośne. Niech to będą punkty ***Q*** i ***R***. Odległość punktów ***Q*** i ***R*** nazywamy odległością prostych skośnych.

Jak widać do ich wyznaczenia niezbędna jest konstrukcja równoległych płaszczyzn w których zawierają się te proste.



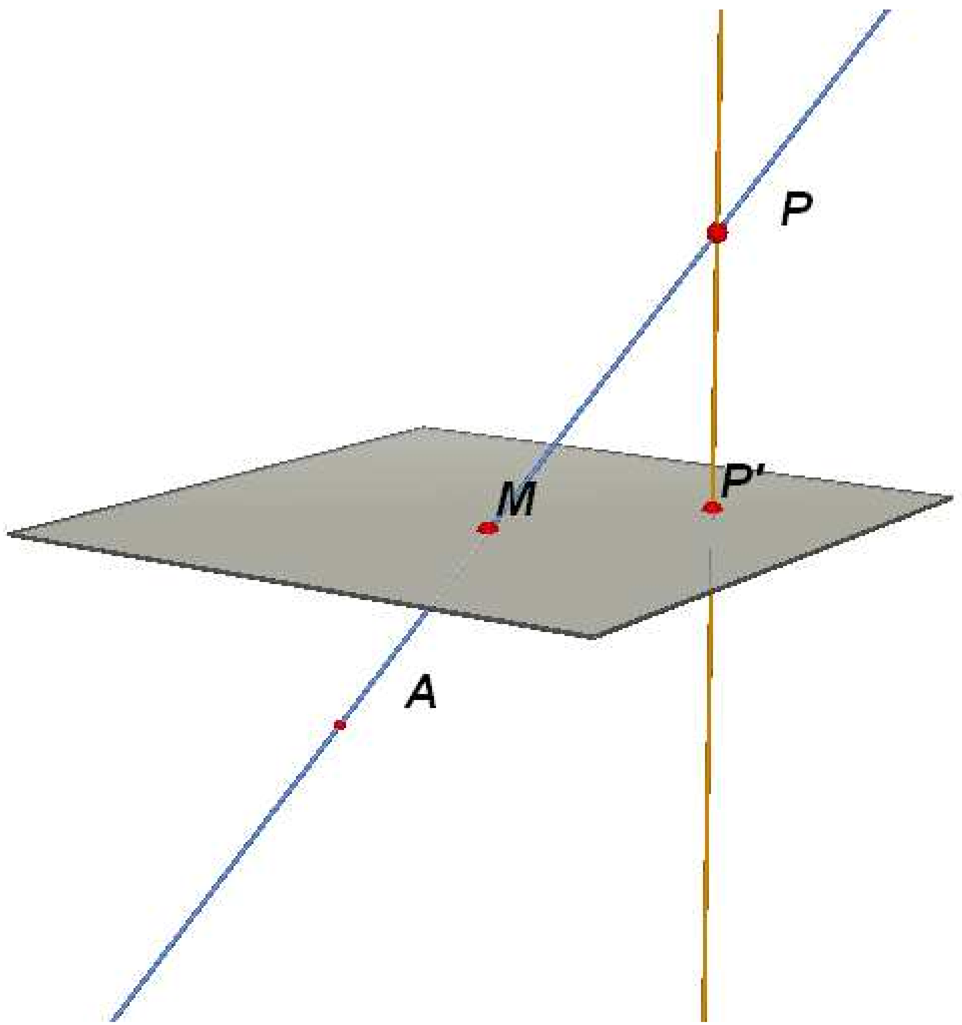
Kąt między prostą i płaszczyzną

Popatrz, jak definiujemy to pojęcie:



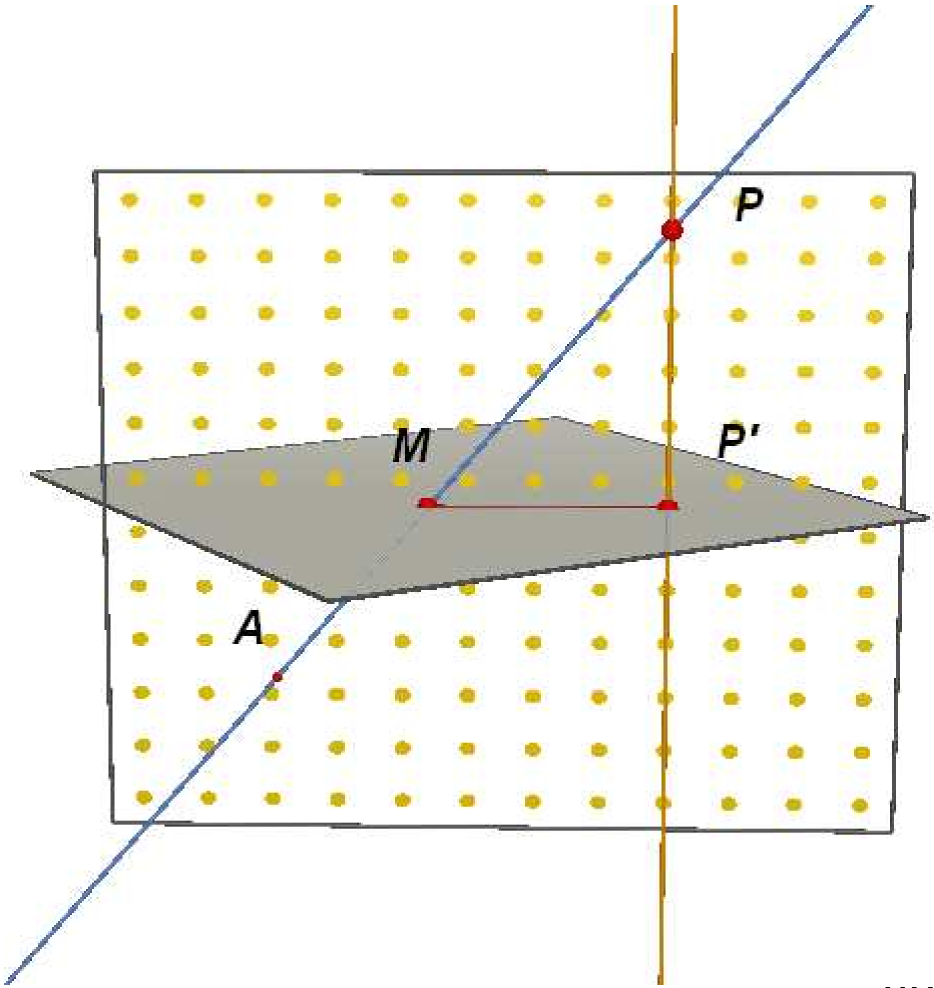
Kąt między prostą i płaszczyzną

Obieramy na tej prostej dowolny punkt przez który prowadzimy prostą prostopadłą do płaszczyzny:



Kąt między prostą i płaszczyzną

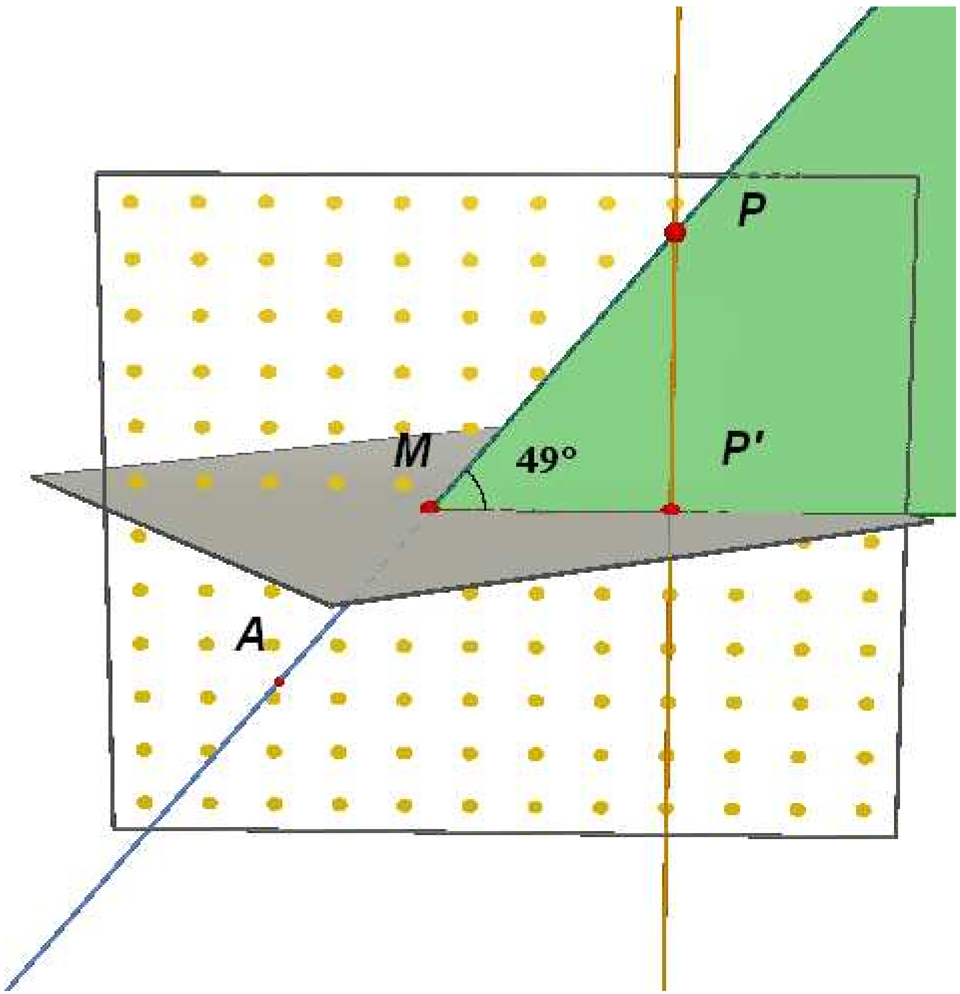
Te dwie proste określają jednoznacznie płaszczyznę. Należą do niej punkty ***P***, ***P'*** i ***M***:



Kąt między prostą i płaszczyzną

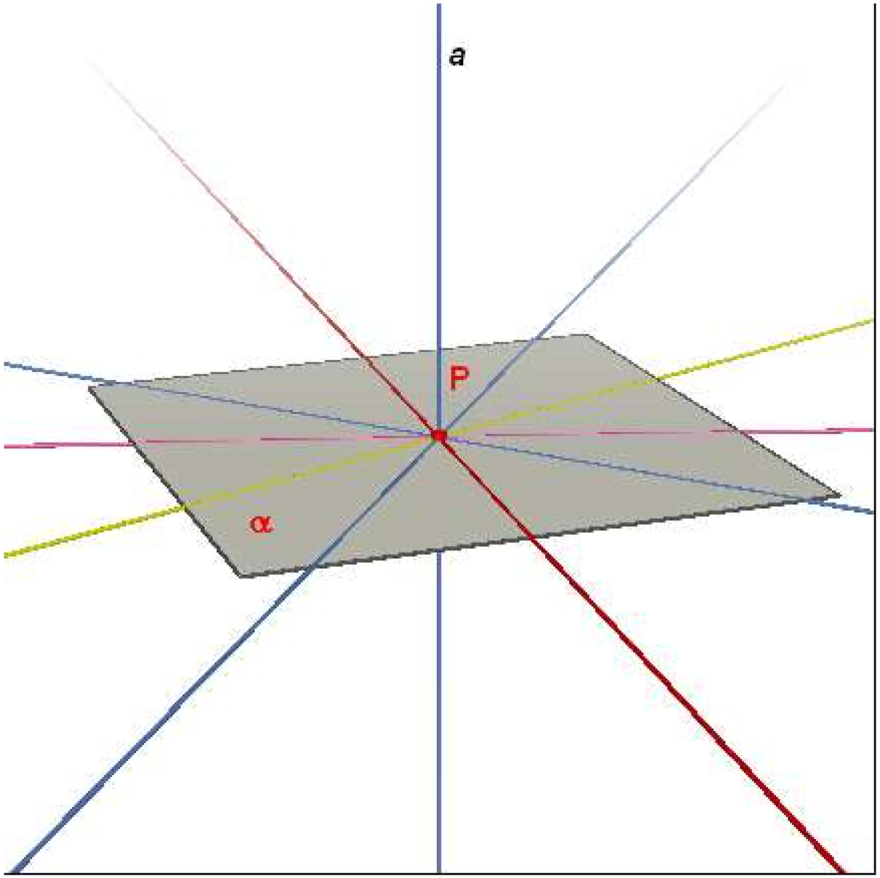
W tej płaszczyźnie definiujemy kąt płaski jako kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.

To jest bardzo ważne pojęcie, które wykorzystuje się w wielu zadaniach.



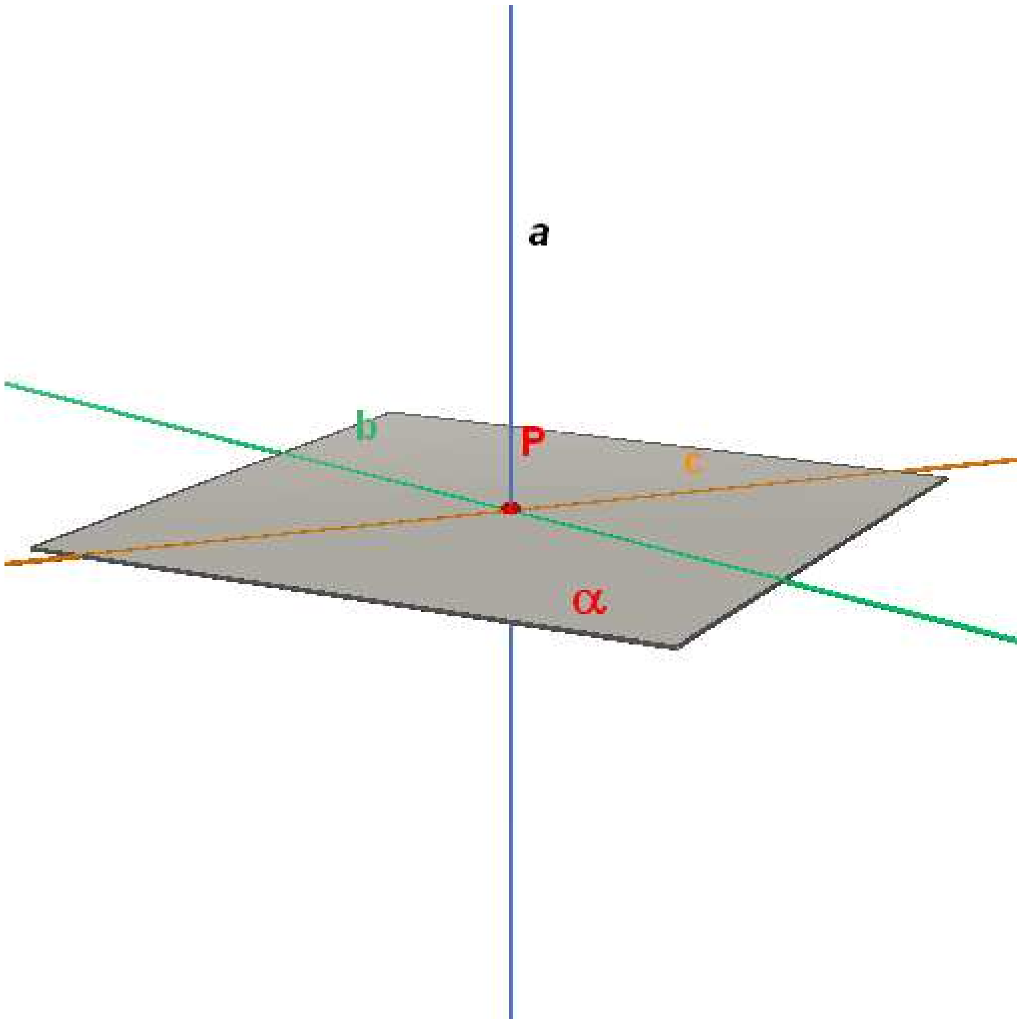
Prostopadłość w przestrzeni

Prosta jest prostopadła do płaszczyzny wtedy, gdy jest prostopadła do każdej prostej leżącej w tej płaszczyźnie. Rzutem prostokątnym tej prostej na płaszczyznę jest punkt, w którym przecina ona tę płaszczyznę.

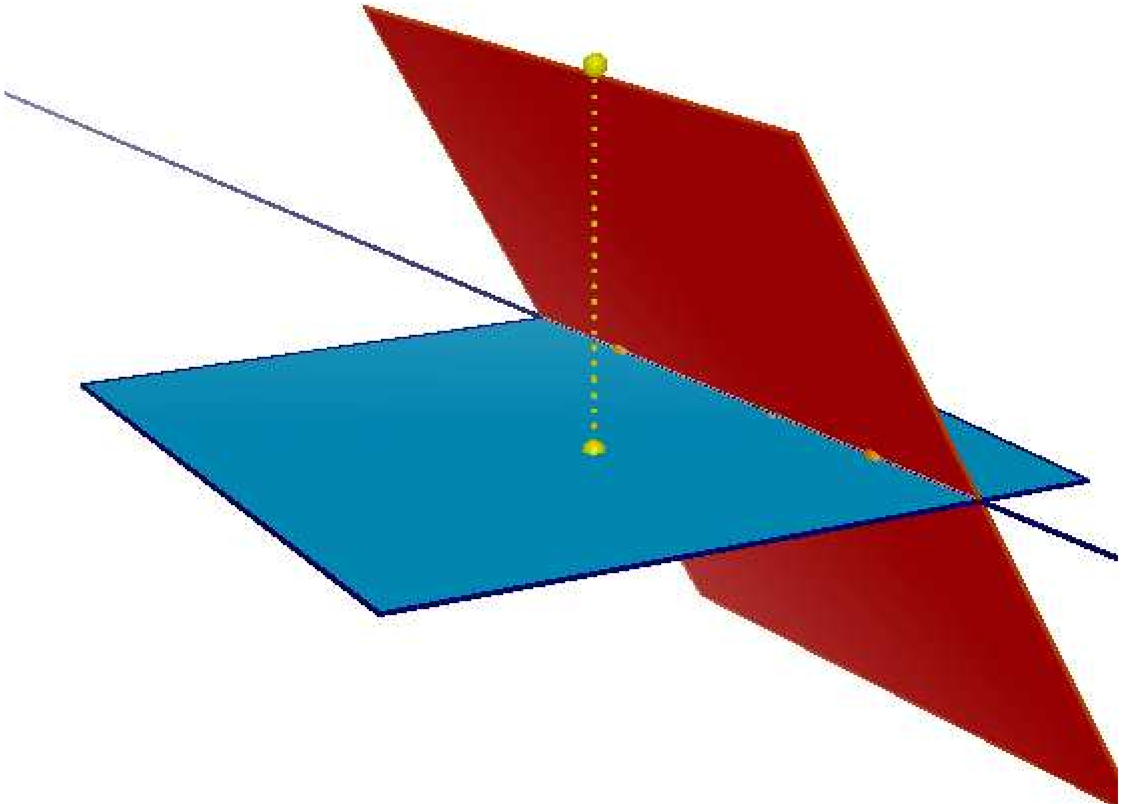


Prostopadłość w przestrzeni

Aby sprawdzić prostopadłość prostej do płaszczyzny, wystarczy sprawdzić, czy jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych zawartych w tej płaszczyźnie.



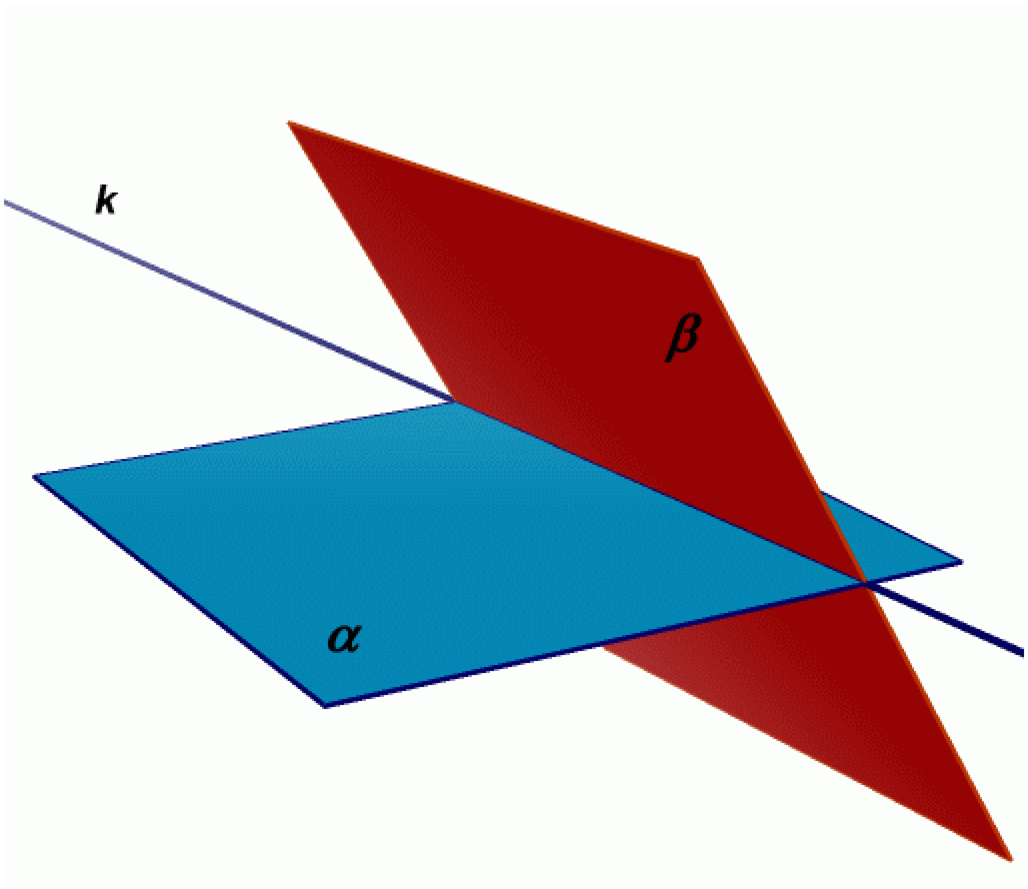
Kąt między płaszczyznami



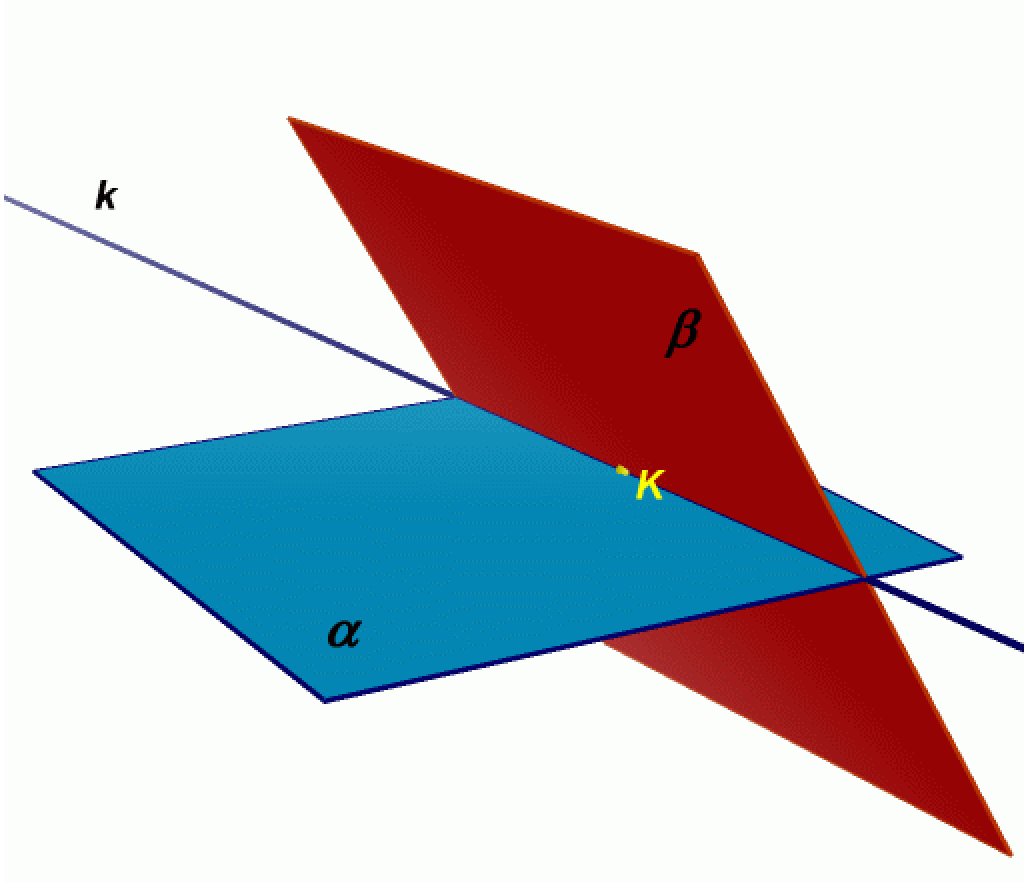
Aby wprowadzić pojęcie kąta nachylenia dwóch płaszczyzn wprowadzimy wcześniej pojęcie ***kąta dwuściennego***.

Pojęcie to nie jest łatwe i warto je dobrze opanować, by umieć poszukiwać miary kąta między dwiema płaszczyznami w rozmaitych zadaniach w tym również maturalnych.

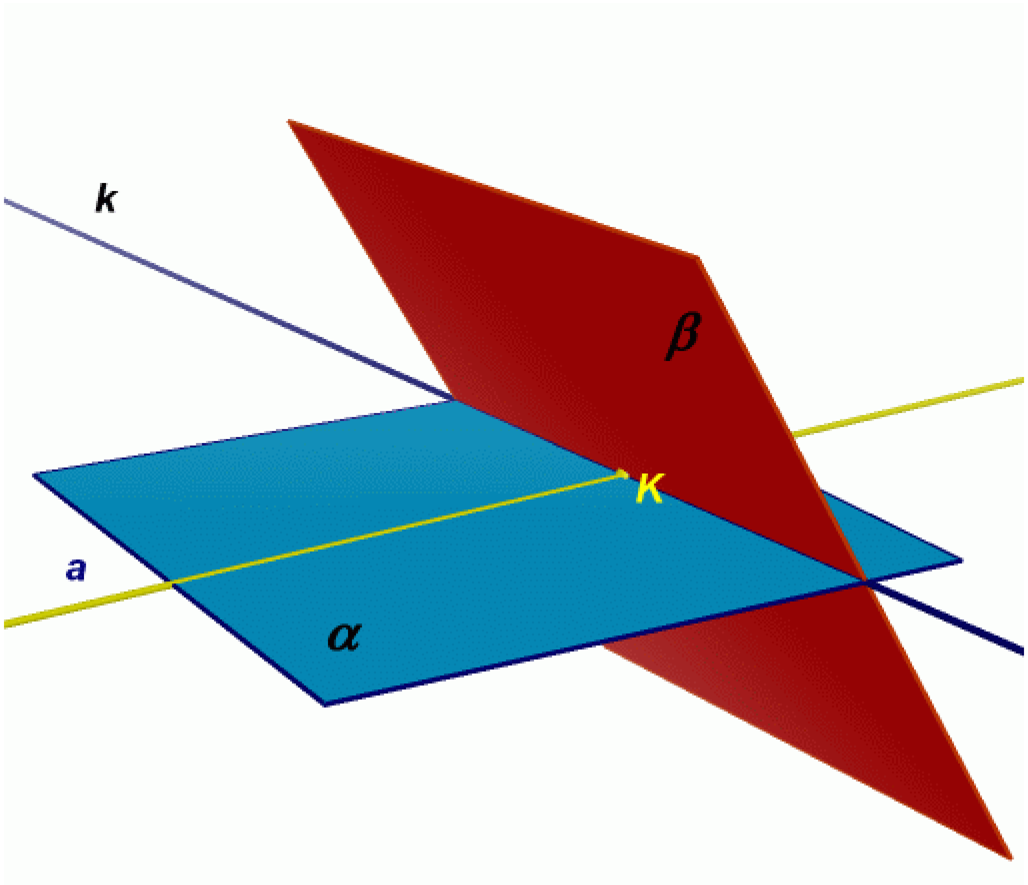
Niech dwie płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej ***k***



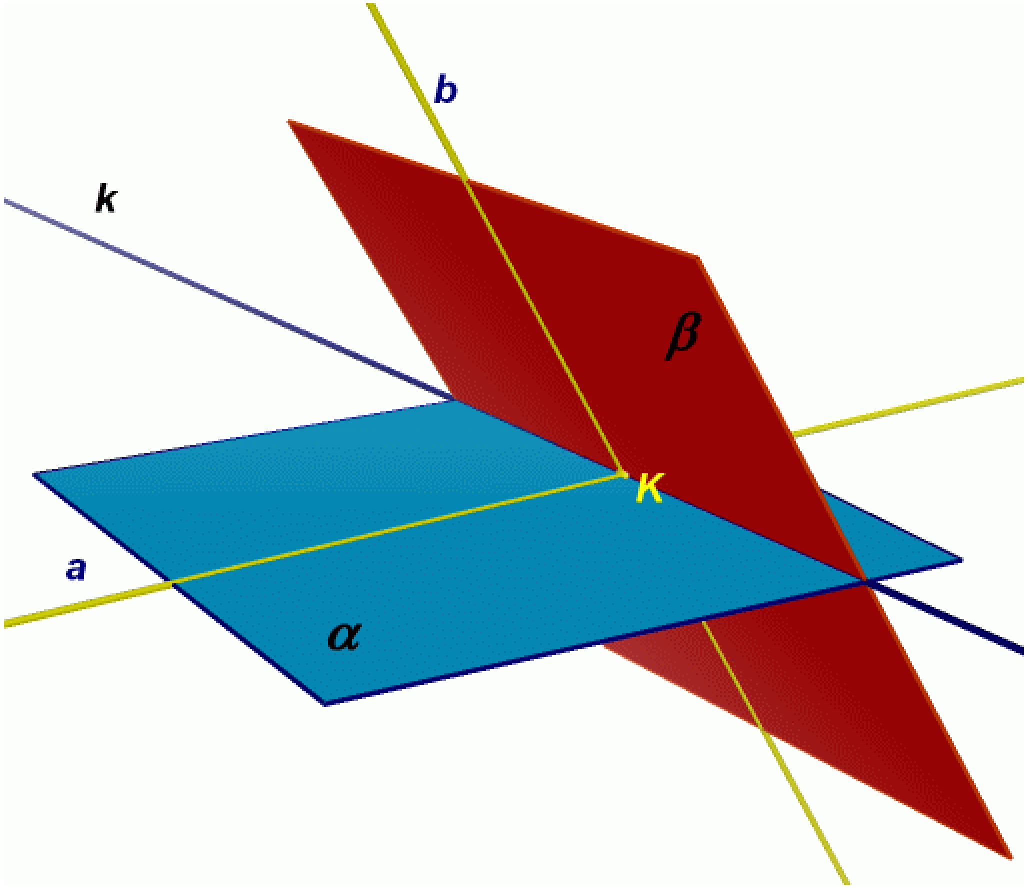
na ich krawędzi obieramy dowolny punkt ***K***



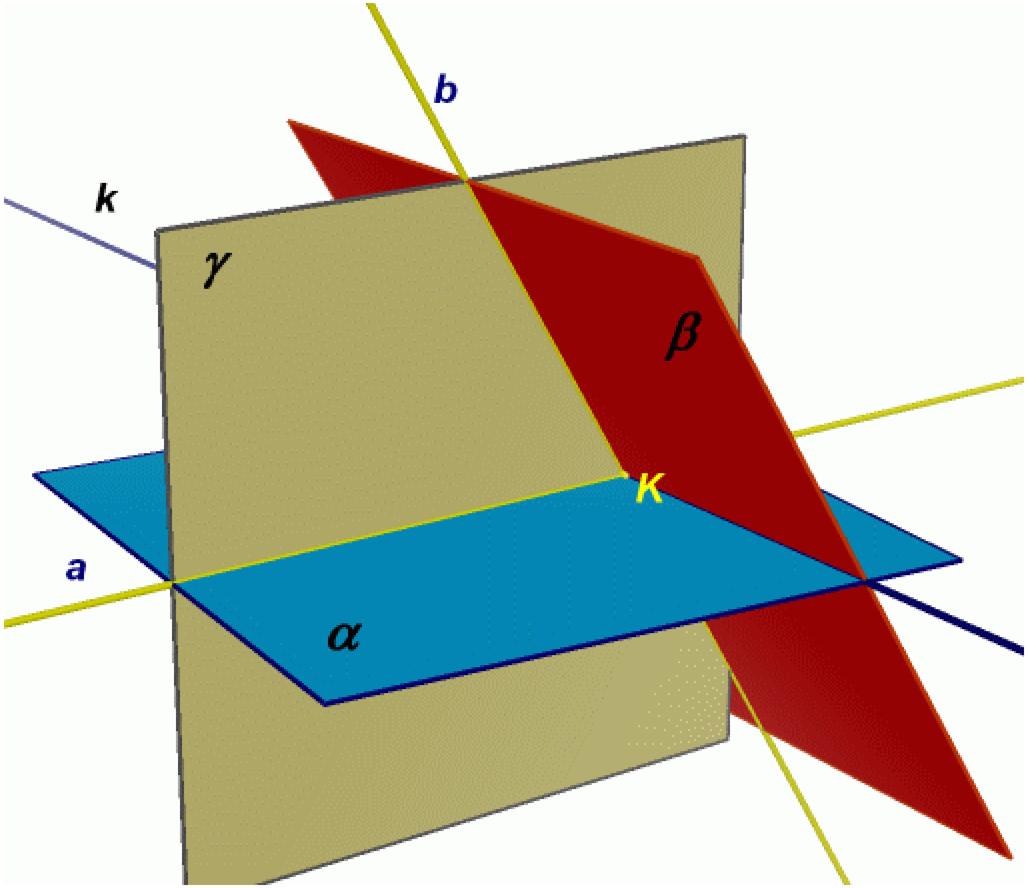
w płaszczyźnie α prowadzimy prostą ***a*** prostopadłą do krawędzi ***k*** przechodząca przez punkt ***K***



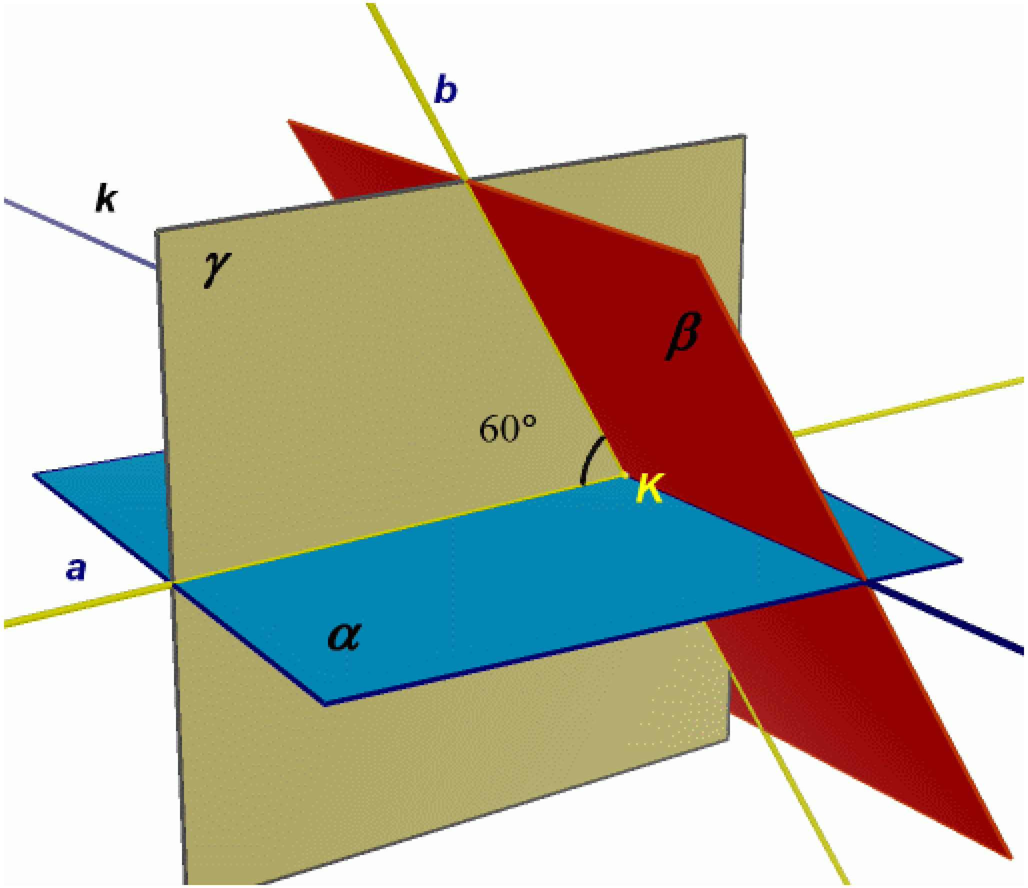
w płaszczyźnie ***β*** prowadzimy prostą ***b*** prostopadłą do krawędzi ***k*** przechodząca przez punkt ***K***



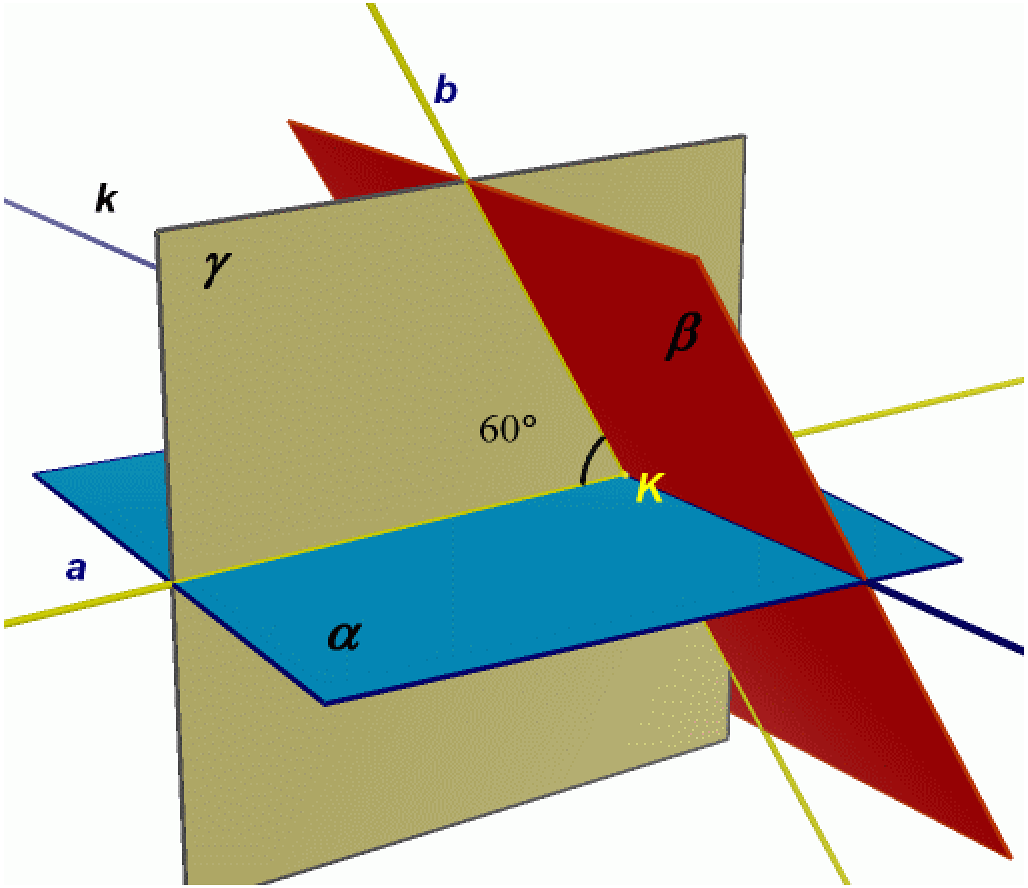
przez proste ***a*** i ***b*** prowadzimy płaszczyznę γ



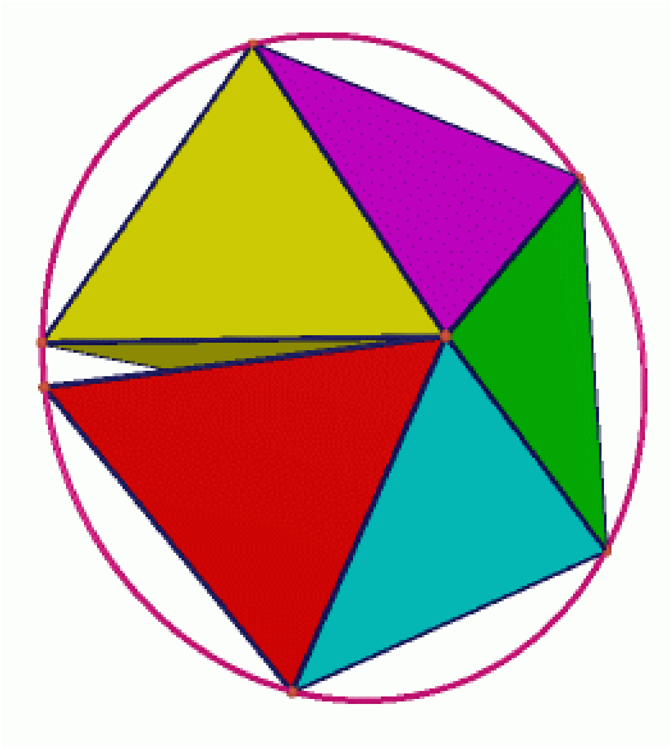
W płaszczyźnie γ tworzymy kąt płaski pomiędzy prostymi ***a*** i ***b***.



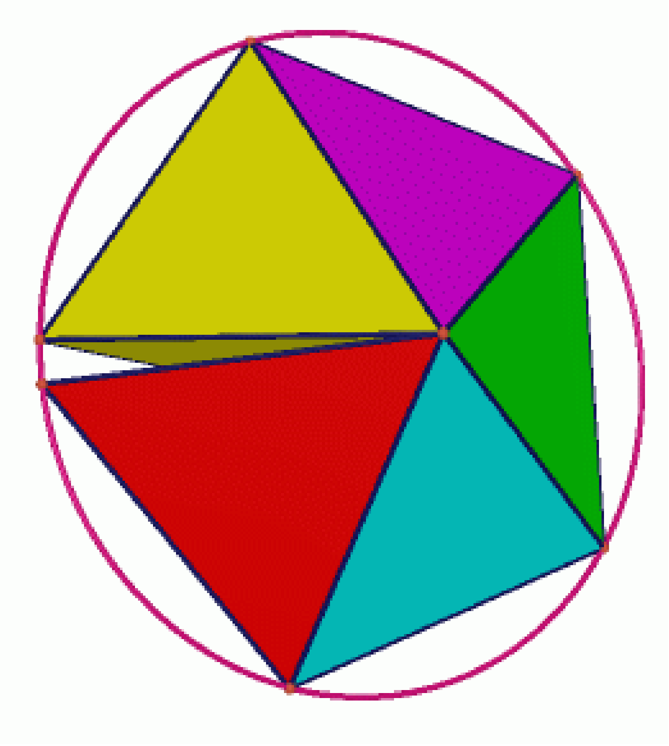
Miara tego kąta jest miarą kąta dwuściennego pomiędzy płaszczyznami α i β.



Jeśli złożymy ze sobą pięć modeli czworościanów foremnych, jak to przedstawia poniższy rysunek, to zauważymy, że pomiędzy nimi występuje luka.
Czy to niedokładność w wykonaniu modeli, czy faktycznie nie da się nimi wypełnić przestrzeni?



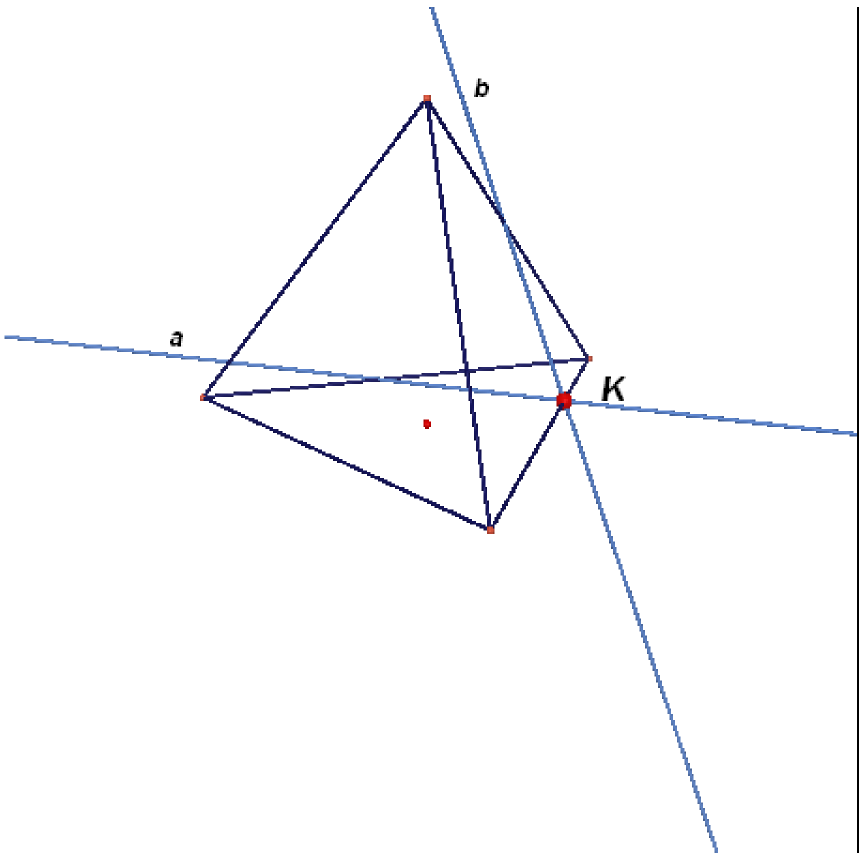
Gdyby faktycznie tej luki by nie było, to oznaczałoby, że miara kąta dwuściennego w każdym z nich musiałaby wynosić 1/5 kąta pełnego, czyli 72°.
Zmierzmy więc ten kąt



Wprowadźmy więc zgodnie z teorią punkt ***K*** na krawędzi czworościanu i dwie proste ***a*** i ***b*** zawarte w jego ścianach prostopadle do wspólnej krawędzi.

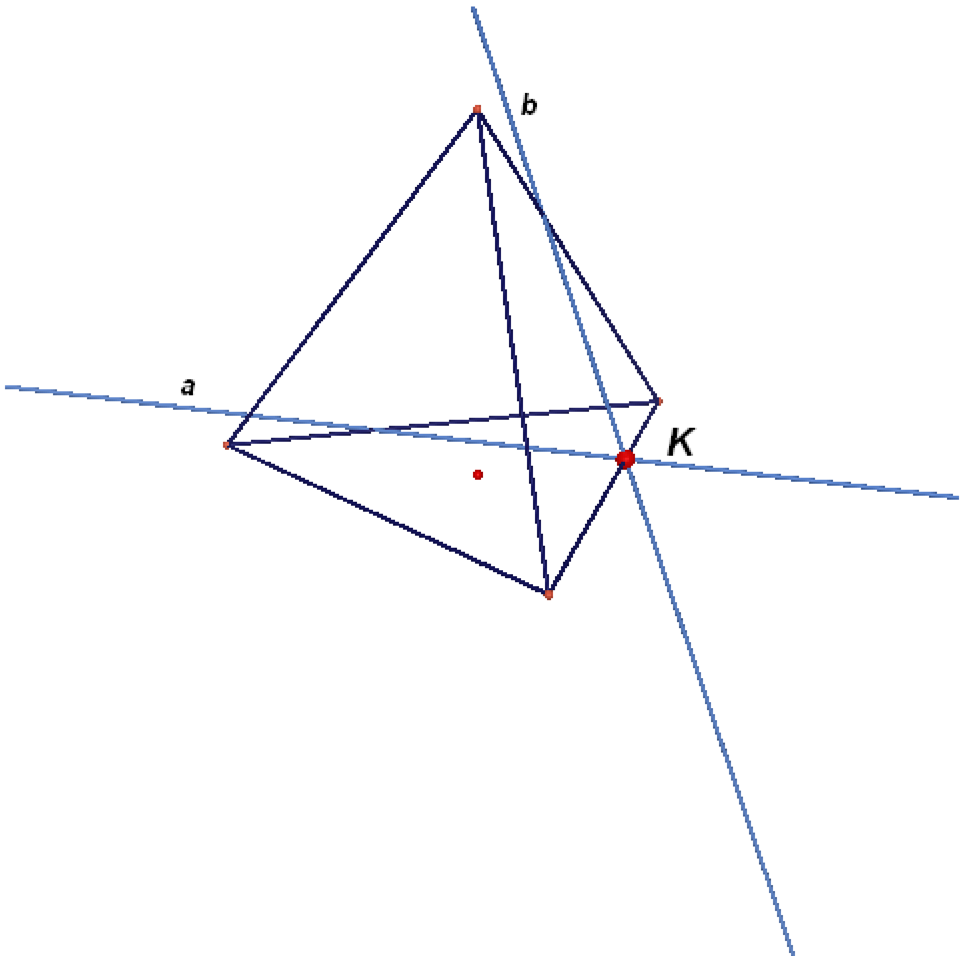
Gdzie najkorzystniej wybrać położenie punktu ***K***?

Przesuwaj punkt ***K*** i ustal to najkorzystniejsze jego położenie.

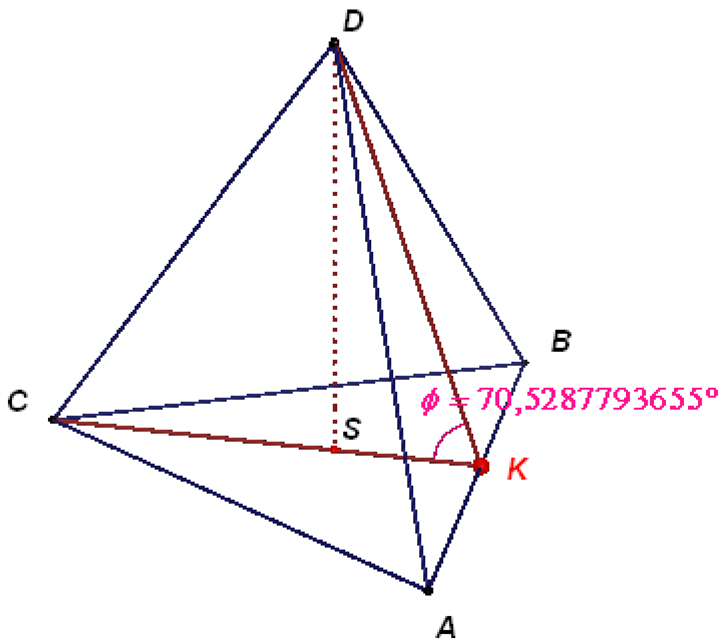


Jakie położenie punktu ***K*** wybrałeś za najkorzystniejsze?
Dlaczego?
Prześlij odpowiedź na platformę e-learningową. **(01)**

Oczywiście najkorzystniej wybrać takie położenie punktu ***K***, w którym proste ***a*** i ***b*** będą przechodzić przez wierzchołki czworościanu. Gdzie wówczas znajduje się punkt K? **(02)**

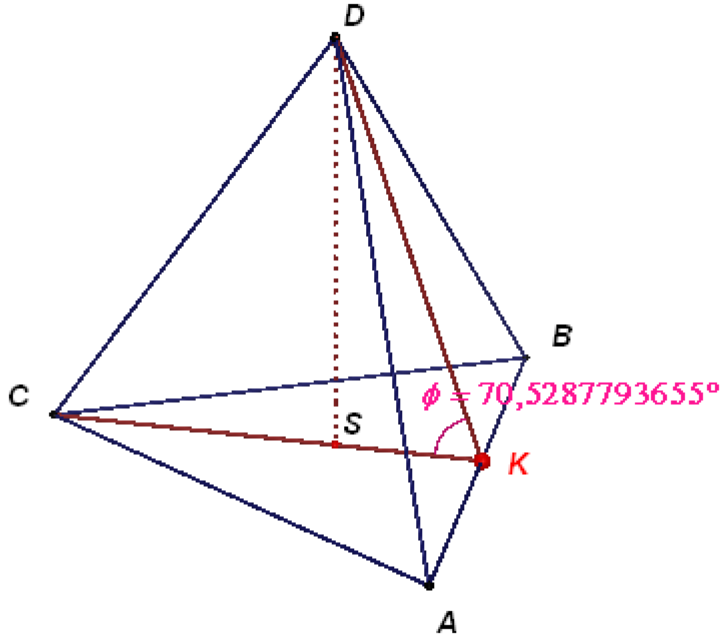


Kąt między ścianami czworościanu foremnego można wyznaczyć z trójkąta równoramiennego ***DCK*** utworzonego przez przekrój czworościanu foremnego zawierającego wysokości dwóch jego ścian. Oczywiście ***DK*** = ***CK*** oraz ***SK*** = ***1/3 CK***. Obliczenia są łatwe, gdyż :



$$\cos\varphi = \frac{SK}{DK} = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$$

Z tablic trygonometrycznych można odczytać, że miara kąta 70°42' wynosi 0,3305 (tablice funkcji cosinus na następnym slajdzie), więc $\phi \neq 72°$:



Tablice wartości sinusów i kosinusów

sin A

A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
											0,0000	90°			
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0588	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338-	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	3	5	8
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3902.	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	65°	3	5	8
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	60°	3	5	8
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180.	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	5736	55°	2	5	7
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	6428	50°	2	4	7
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	45°	2	4	6
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'

cos B

Wartości tangensów i kotangensów

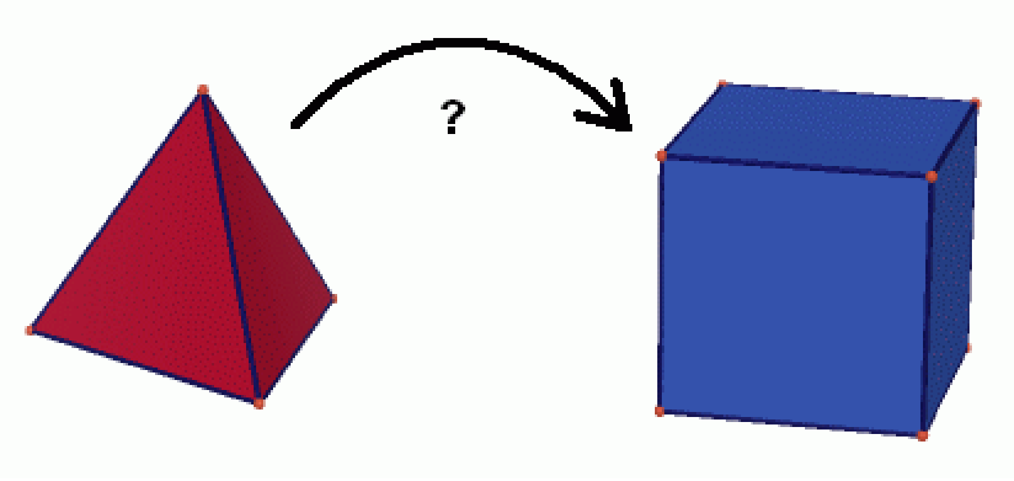
tg A

A	0'	6'	12	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
											0,0000	90°			
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87°	3	6	9
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86°	3	6	9
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0,0875	85°	3	6	9
5°	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84°	3	6	9
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1130	1157	1175	1192	1210	1228	83°	3	6	9
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82°	3	6	9
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81°	3	6	9
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	0,1763	80°	3	6	9
10°	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79°	3	6	9
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78°	3	6	9
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77°	3	6	9
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76°	3	6	9
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	0,2679	75°	3	6	9
15°	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74°	3	6	9
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73°	3	6	9
17°	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72°	3	6	10
18	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71°	3	6	10
19°	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0,3640	70°	3	7	10
20°	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69°	3	7	10
21°	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68°	3	7	10
22°	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67°	3	7	10
23°	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66°	3	7	10
24°	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	0,4663	65°	4	7	11
25°	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64°	4	7	11
26°	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63°	4	7	11
27°	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62°	4	7	11
28°	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61°	4	8	11
29°	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0,5774	60°	4	8	12
30°	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59°	4	8	12
31°	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58°	4	8	12
32°	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57°	4	8	12
33°	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56°	4	8	13
34°	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	0,7002	55°	4	9	13
35°	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54°	4	9	13
36°	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53°	5	9	14
37°	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52°	5	9	14
38°	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8041	8069	8098	51°	5	9	14
39°	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0,8391	50°	5	10	15
	60'	54'	48'	42'	36'	30'	24'	18'	12'	6'	0'	B	1'	2'	3'

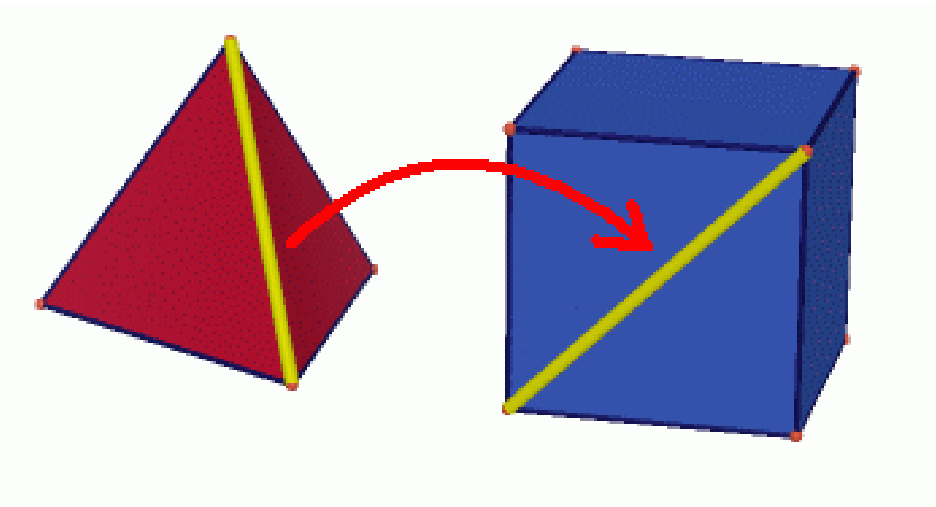
Ctg B

Inny sposób rozwiązania znajdziemy umieszczając czworościan foremny w sześcianie tak, by jego wierzchołki były równocześnie wierzchołkami sześcianu. Czy to da się zrobić?

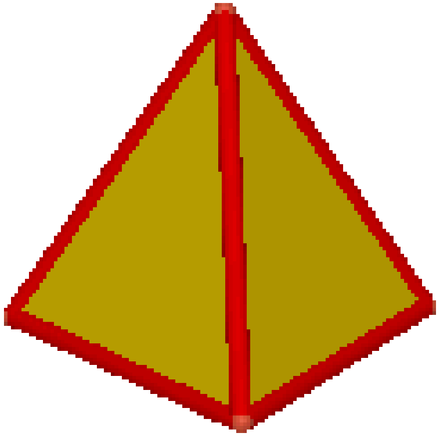
Spróbuj najpierw na rysunku. Jeśli Ci się udało to zrobić, prześlij ten rysunek swojemu nauczycielowi.

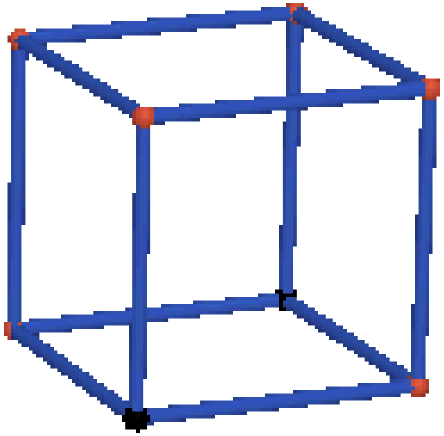


Jeśli nie potrafisz nadal tego zrobić, to zauważ, że sześcian ma 6 ścian a czworościan 6 krawędzi.
Skoro więc czworościan ma być umieszczony w sześcianie, a jego wierzchołki równocześnie wierzchołkami sześcianu, to czym muszą być krawędzie czworościanu w sześcianie? **(03)**

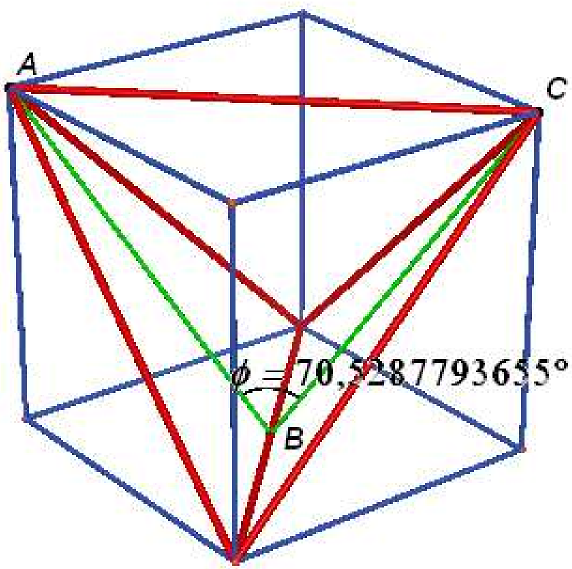


Może ten film pomoże Ci to zrobić?



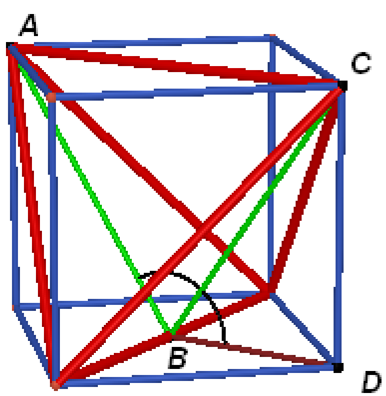


Skoro już umieściłeś czworościan w sześcianie, to zauważ, że kąt dwuścienny między ścianami sąsiednimi czworościanu to kąt ϕ w sześcianie.



Zauważ, że: $\phi = 180° - 2 \cdot \alpha$ **,** gdzie $\alpha = \angle DBC$.

Ale $tg\alpha = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41421356214$ czyli $\alpha \approx 54°73561032$

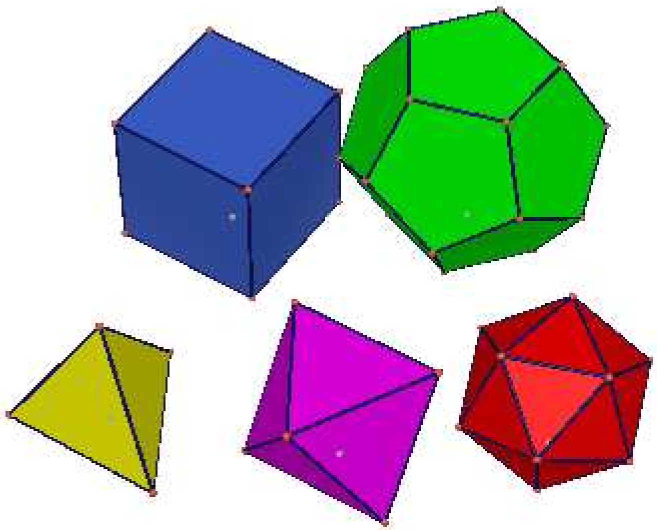


Stąd $\varphi \approx 70,5287793655°$

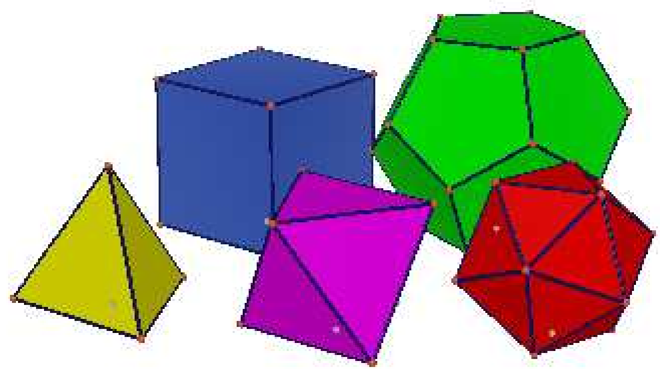
Zatem nie da się skleić ze sobą pięciu czworościanów foremnych tak, by przylegały ściśle jeden do drugiego

POZNAJEMY WIELOŚCIANY

Z całej gamy wielościanów najlepiej znasz ostrosłupy i graniastosłupy. W liceum poznasz dodatkowo bryły platońskie. Ich nazwa wywodzi się od filozofa greckiego, który opisał je dość dokładnie i przypisał każdemu z nich jedną ze znanych wówczas w Starożytności planet oraz pięć żywiołów.

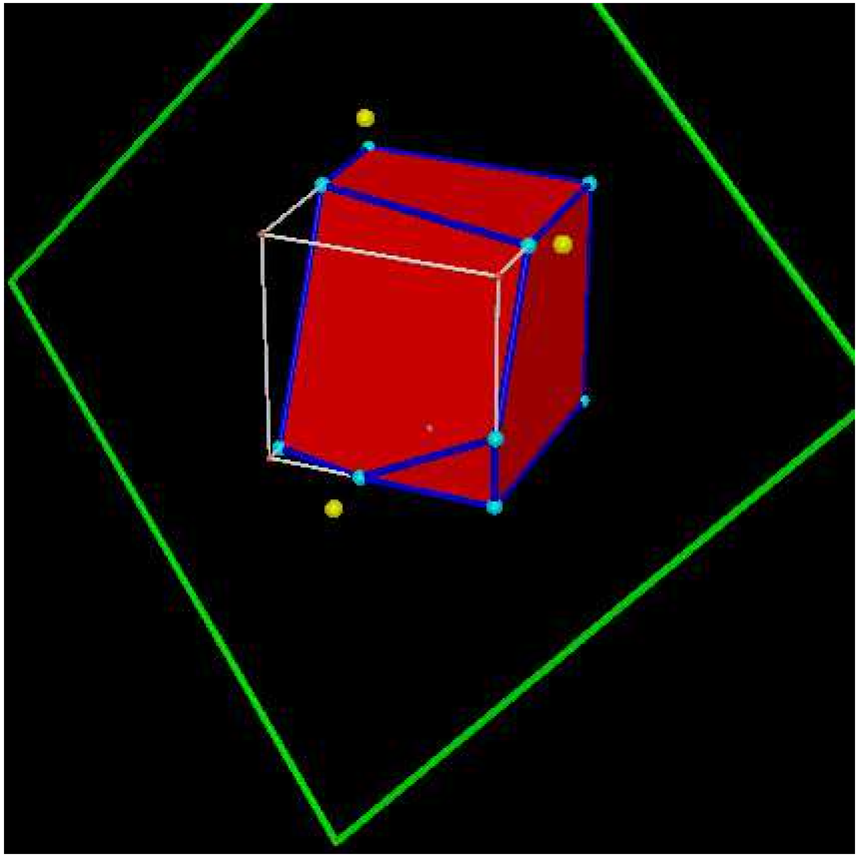


Czworościanowi przypisano ogień, sześcianowi Ziemię, ośmiościanowi powietrze, dwunastościanowi cały Wszechświat a dwudziestościanowi wodę.



Najbardziej popularnym wielościanem Platona jest sześcian. Uczyłeś się o nim już w szkole podstawowej i gimnazjum.

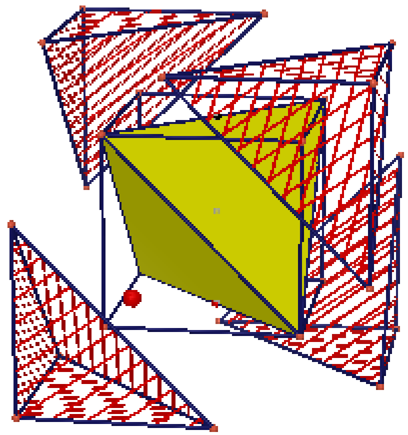
Poniższy aplet przedstawia rozcięcia sześcianu płaszczyzną tak, by przekrój był czworokątem. Poruszaj żółtymi punktami i obserwuj różne przekroje sześcianu.



Kolej na to byś poznał prostszy pod względem budowy czworościan foremny. Czworościan nazywamy simpleksem przestrzeni 3 wymiarowej tak jak trójkąt simpleksem płaszczyzny, gdyż jest to wielościan o najmniejszej ilości ścian zamykający nimi pewien obszar 3D.

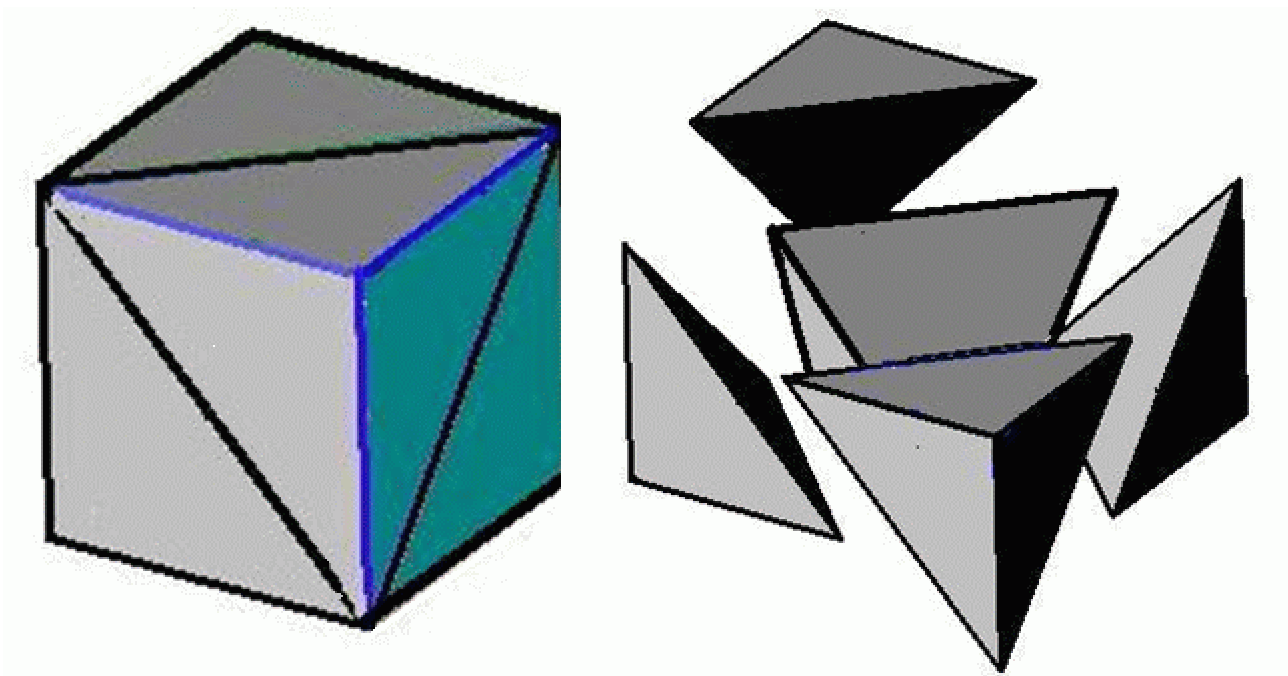
Czworościan foremny ma cztery wierzchołki i sześć krawędzi, wszystkie tej samej długości.

Umieszenie czworościanu w sześcianie pozwala szybko obliczyć stosunek objętości tych brył jak również samą objętość czworościanu foremnego.



.

Przyjmijmy że krawędź sześcianu ma długość ***a***.
Zgodnie z wykonaną konstrukcją czworościanu w sześcianie wynika $a\sqrt{2}$ że
długość krawędzi ***b*** czworościanu wynosi



Zauważ, że oprócz czworościanu foremnego w sześcianie znajdują się jeszcze cztery czworościany, w których trzy ściany są przystającymi trójkątami prostokątnymi – połowami ścian sześcianu.

Objętość tych czterech czworościanów wynosi:

$$V_{4ostr} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot a = \frac{2}{3} \cdot a^3$$

To oznacza, że objętość czworościanu umieszczonego w sześcianie stanowi 1/3 objętości tego sześcianu.

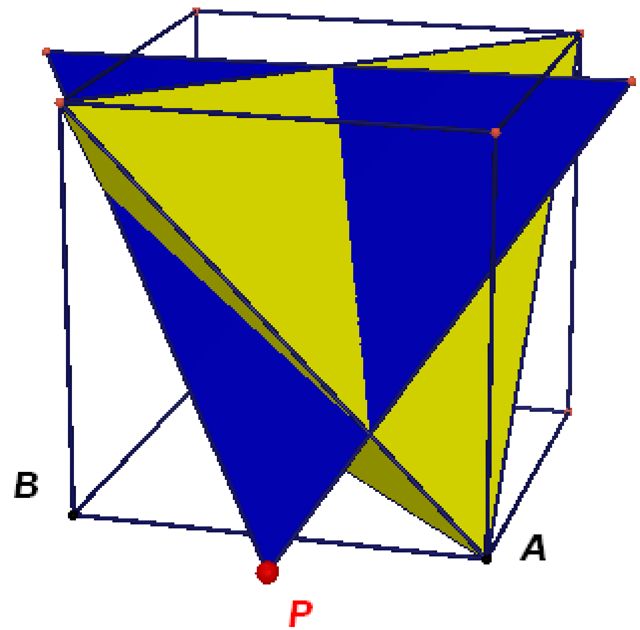
Ponieważ krawędź czworościanu wynosi $b = a\sqrt{2}$

skąd $a = \frac{b}{\sqrt{2}}$

Więc objętość czworościanu o krawędzi „***b***” wynosi:

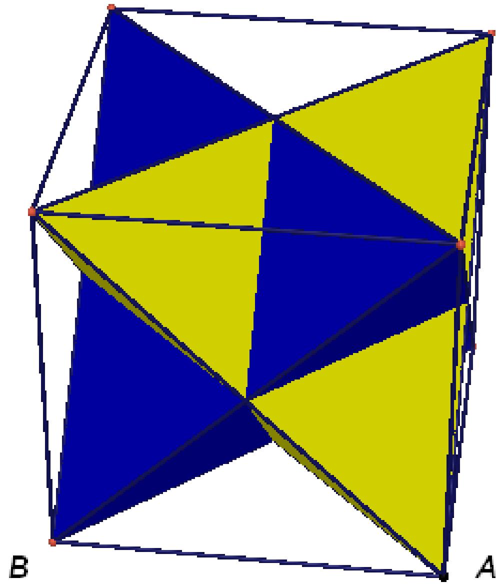
$$V_{czwor} = \frac{1}{3} \cdot a^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{b^3}{3\sqrt{8}}$$

Sześcian ma w każdej ścianie dwie przekątne, co sugeruje, że można w nim umieścić jeszcze jeden czworościan. Poniższy aplet pokazuje, jak go uzyskać z tego, który już umieściliśmy w sześcianie – poruszaj punktem ***P***



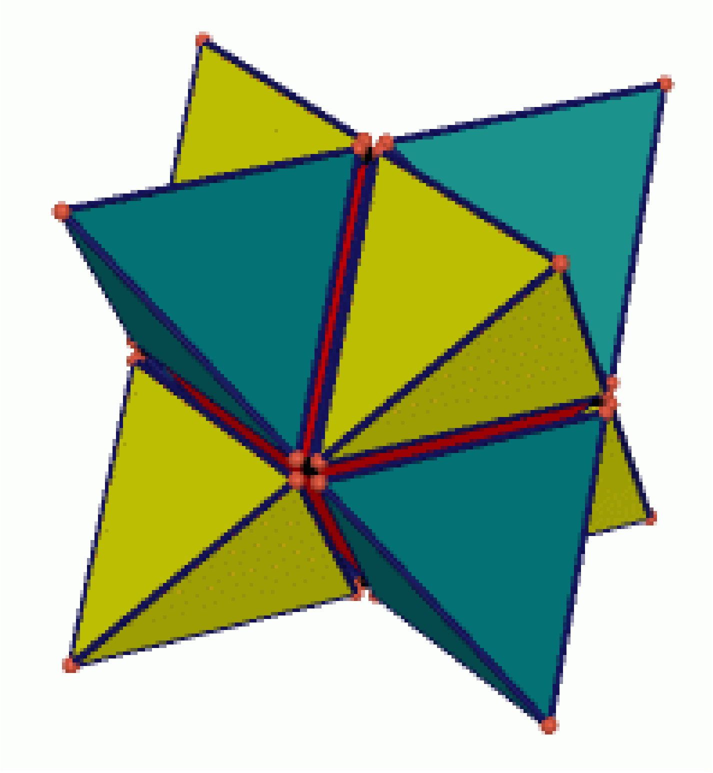
Oba czworościany tworzą wielościan, który odkrył w 1619 roku niemiecki matematyk i wybitny astronom Johannes Kepler (1571-1630) i nazwał go ***stella octangula***

(gwiazda ośmiościenna).

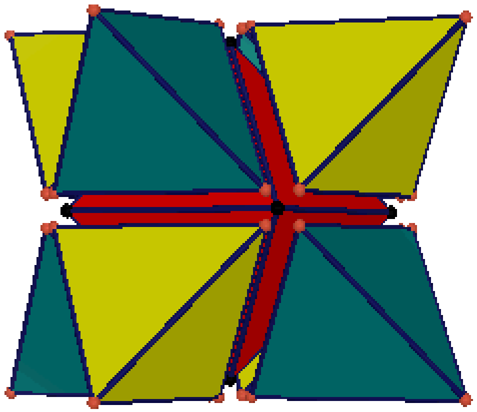


Skąd wzięła się nazwa gwiazda ośmiościenna, skoro nie widać nigdzie ośmiościanu?

W takim razie zastanów się, co jest częścią wspólną obu czworościanów foremnych umieszczonych w sześcianie.



Może poniższy aplet Ci to ułatwi?



Oblicz teraz pole całkowite i objętość stelli octanguli jako funkcję krawędzi *a* sześcianu. **(04)**

Zauważ, że jest to wielościan wklęsły, ale niezwykle symetryczny. Wystarczy obliczyć pole i objętość niewielkiego jego fragmentu, a resztę uzyskasz, mnożąc wynik przez ilość tych fragmentów.

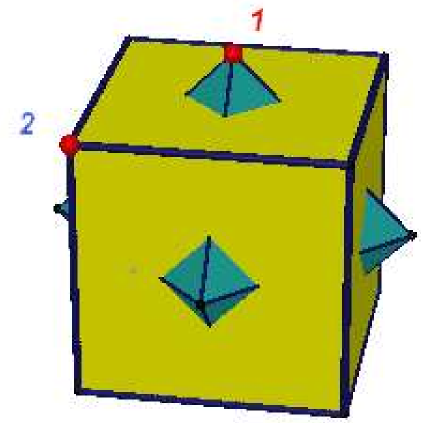
Powinien Ci przy tym pomóc poprzedni film.

Ile razy objętościowo mały czworościanik jest mniejszy od dużego, jeśli długość jego krawędzi stanowi ½ długości krawędzi dużego?

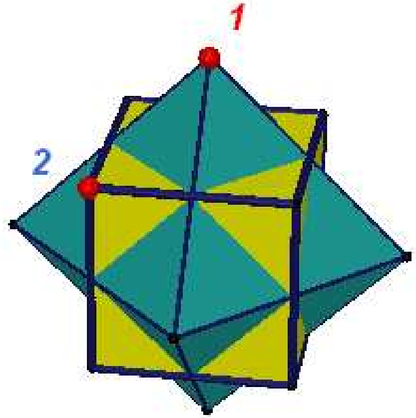
Czy informacja ta stanowi dla Ciebie wskazówkę do wyznaczenia również pola całkowitego stelli octanguli?

W teorii wielościanów wyróżnia się pojęcie zwane ***dualnością wielościanów.***

Dwa wielościany nazywamy dualnymi, jeśli wierzchołki jednego z nich są środkami ścian drugiego. Prześledźmy to na przykładzie sześcianu.
Jaki wielościan jest dualny do sześcianu, czyli co otrzymamy, gdy połączymy środki ścian sześcianu? Aplet obok pomoże Ci odpowiedzieć na pytanie.



Poruszaj najpierw punktem „1” w dół, aż wierzchołki ośmiościanu foremnego znajdą się w środku ścian sześcianu.
Następnie przesuwaj punkt „2” i obserwuj co się dzieje na ekranie.



Uzupełnij poniższe zdania

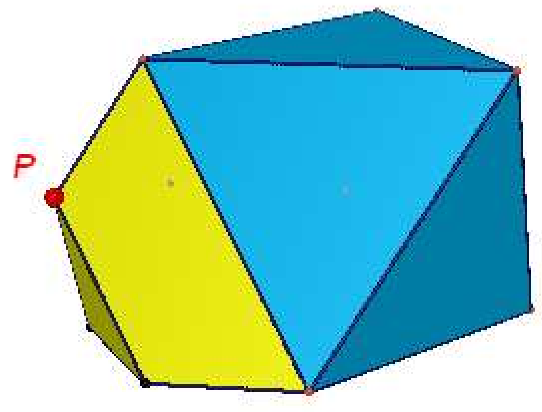
wielościanem dualnym do sześcianu jest .... **(05)**
wielościanem dualnym do ośmiościanu jest .... **(06)**
wielościanem dualnym do czworościanu jest .... **(07)**

Kolejne pojęcie które z danego wielościanu tworzy nowy wielościan to ***stellacja wielościanu***.

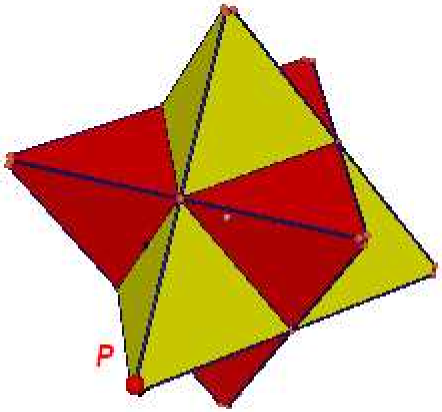
Stellacja wielościanu polega na tym, że przedłużamy wszystkie ściany wielościanu aż do przecięcia się ich w punktach, które są wierzchołkami nowego wielościanu.

Wyjaśnijmy to na konkretnym przykładzie:

Obejrzyj w jaki sposób wydłużamy jedną ze ścian ośmiościanu. Poruszaj punktem ***P***.



A teraz zobacz wydłużanie wszystkich ścian, czyli stellację ośmiościanu – znów poruszaj punktem ***P***.
Jaką bryłę otrzymałeś w ten sposób? **(08)**



Czy każdy wielościan ma stellację?

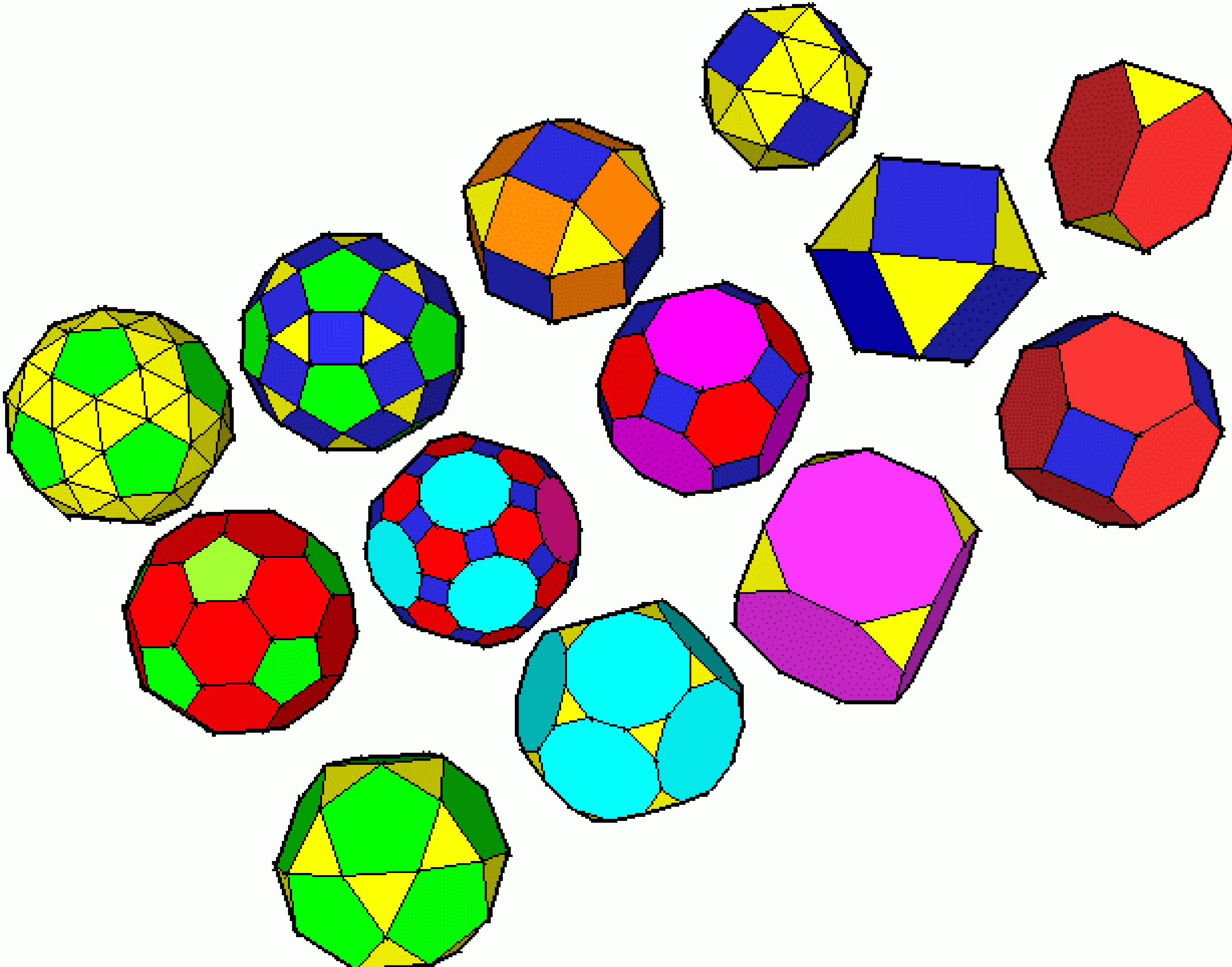
Czy sześcian ma stellację? **(09)**

Czy czworościan ma stellację? **(10)**

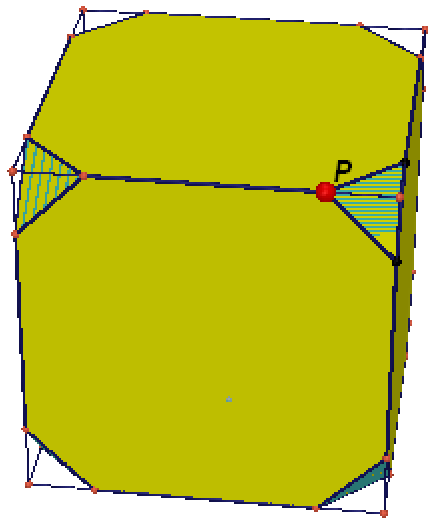
Czy dwunastościan ma stellację? **(11)**

Z pięciu foremnych wielościanów platońskich można tworzyć ***wielościany półforemne***, czyli takie, których ściany są wielokątami foremnymi a naroża są przystające do siebie.
Wielościany te badał już w Starożytności Archimedes.
Jest ich trzynaście – obejrzyj je na kolejnym slajdzie.

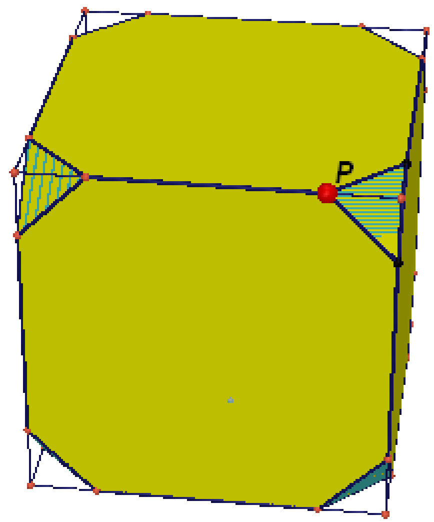
Kilka z nich tworzy się przez ścinanie naroży wielościanów platońskich, ale kolejne już nieco inaczej. Chodzi o to, by zachować ich półforemność i przystawanie naroży.



Na poniższym aplecie będziesz dokonywać ścinania wszystkich naroży sześcianu przez przesuwanie punktu ***P*** po jego krawędzi.
W momencie, gdy uzyskasz na ścianach sześcianu ośmiokąty foremne, uzyskany wielościan nosi nazwę ***sześcianu ściętego***.



Dalsze przesuwanie punktu ***P*** do środków krawędzi sześcianu daje kolejną bryłę archimedesową zwaną ***sześcioośmiościanem***.



Podobnie można dokonać ścięć innych wielościanów platońskich – czworościanu, ośmiościanu, dwunastościanu i dwudziestościanu.
Jeśli dysponujesz programem Cabri 3D, to spróbuj uzyskać kilka wielościanów archimedesowych.

ZADANIE 1

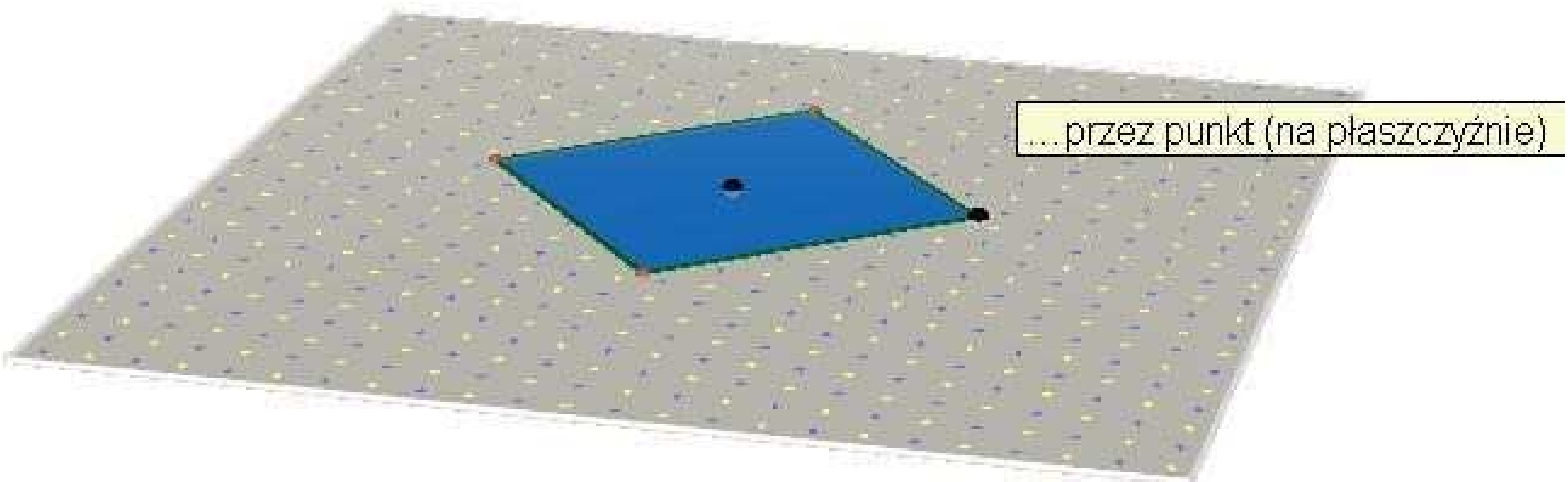
Rozwiąż na kartce poniższe zadanie:

Do ściany bocznej ostrosłupa czworokątnego prawidłowego prostego o wszystkich krawędziach tej samej długości przyklejono czworościan foremny.

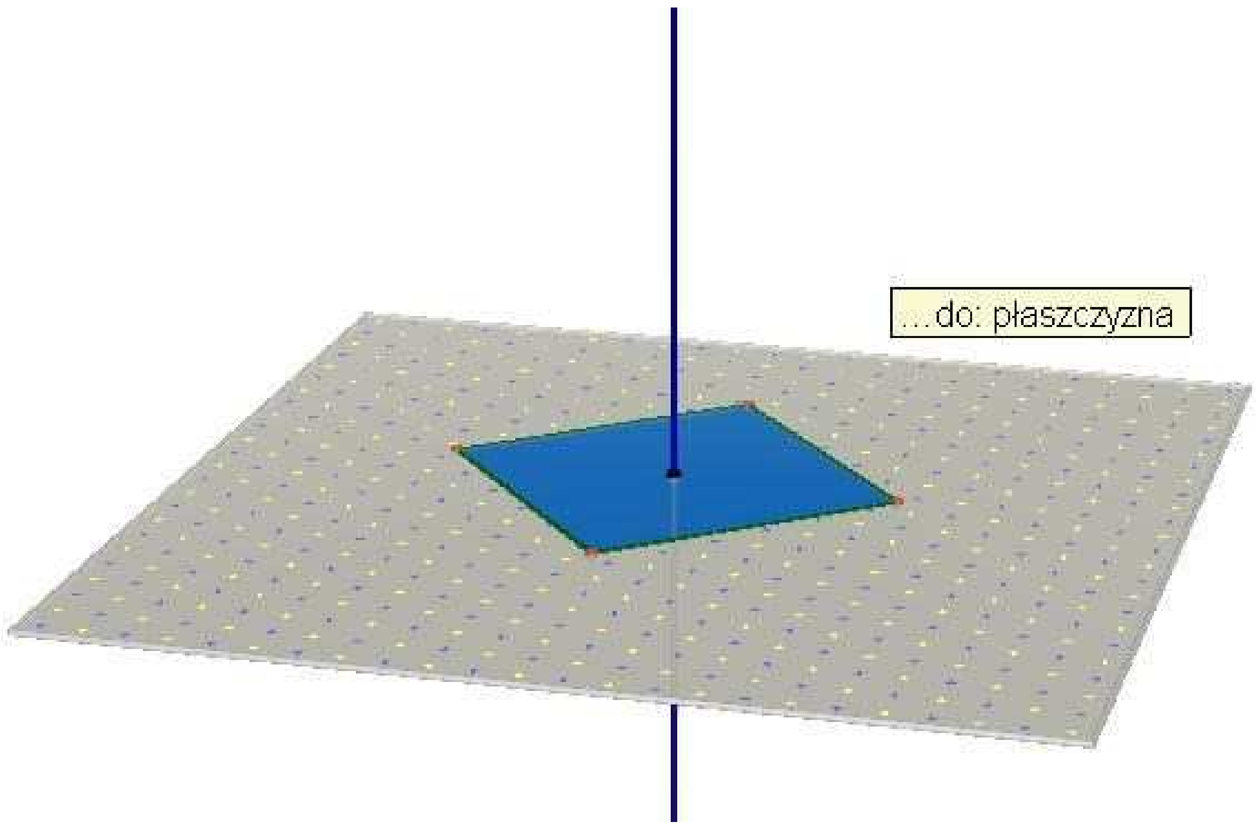
Ile ścian ma tak otrzymany wielościan?

- Uruchom program Cabri3D w wersji demo (pobierz sobie ze strony www.cabri.com)
- Skonstruuj w nim ostrosłup czworokątny prawidłowy, prosty:
- czworokątny – jego podstawą jest czworokąt,
- prawidłowy – czyli w podstawie jest wielokąt foremny (kwadrat),
- prosty – wysokość opuszczona z wierzchołka opada na środek podstawy.

- zacznijmy od podstawy – jest nią kwadrat,
- uruchom narzędzie ***kwadrat*** z ikony 6 i wskazując płaszczyznę bazową, następnie środek kwadratu i jego wierzchołek, utwórz kwadrat

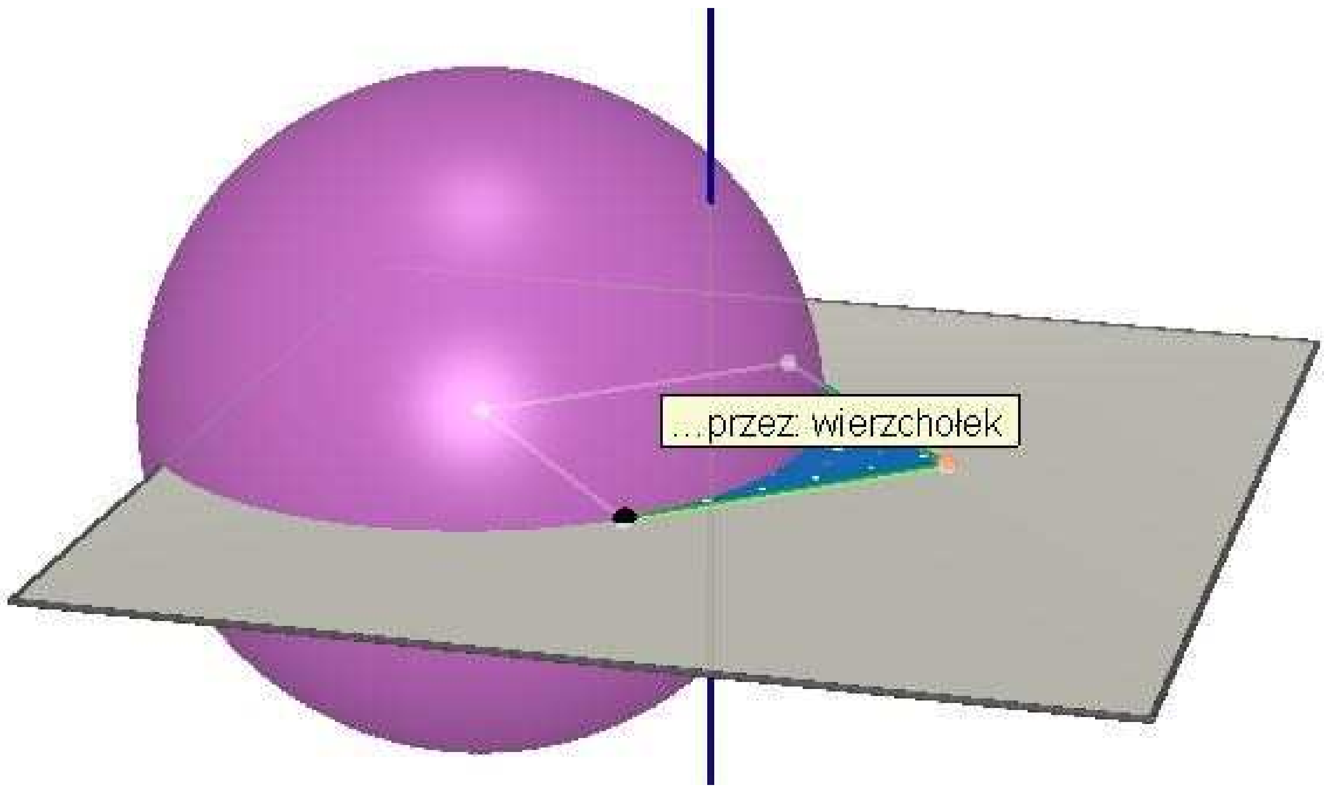


- Wystaw prostopadłą (ikona 4 / prostopadła) do podstawy kwadratu przez jej środek

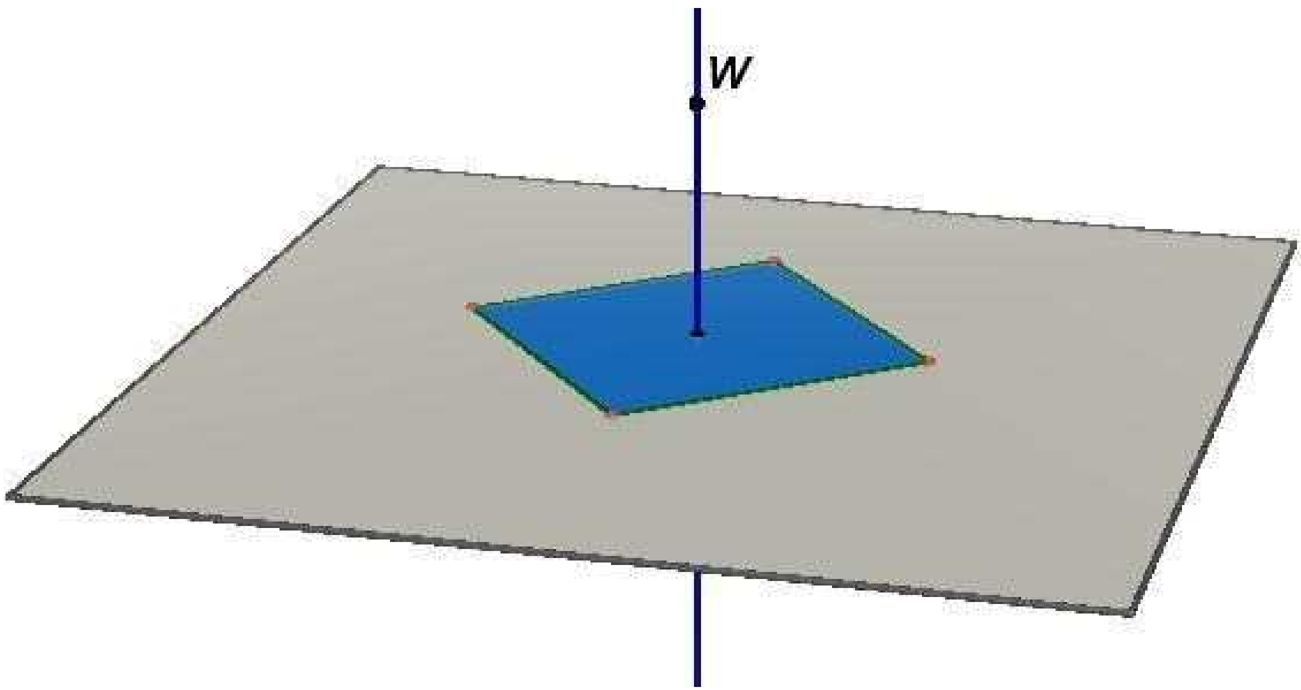


- ponieważ wszystkie krawędzie mają być tej samej długości, więc krawędź boczna ma tę samą długość co krawędź podstawy,
- aby ją odmierzyć, wykreśl sferę o środku w jednym z wierzchołków podstawy ostrosłupa przechodząca przez sąsiedni wierzchołek tej podstawy,

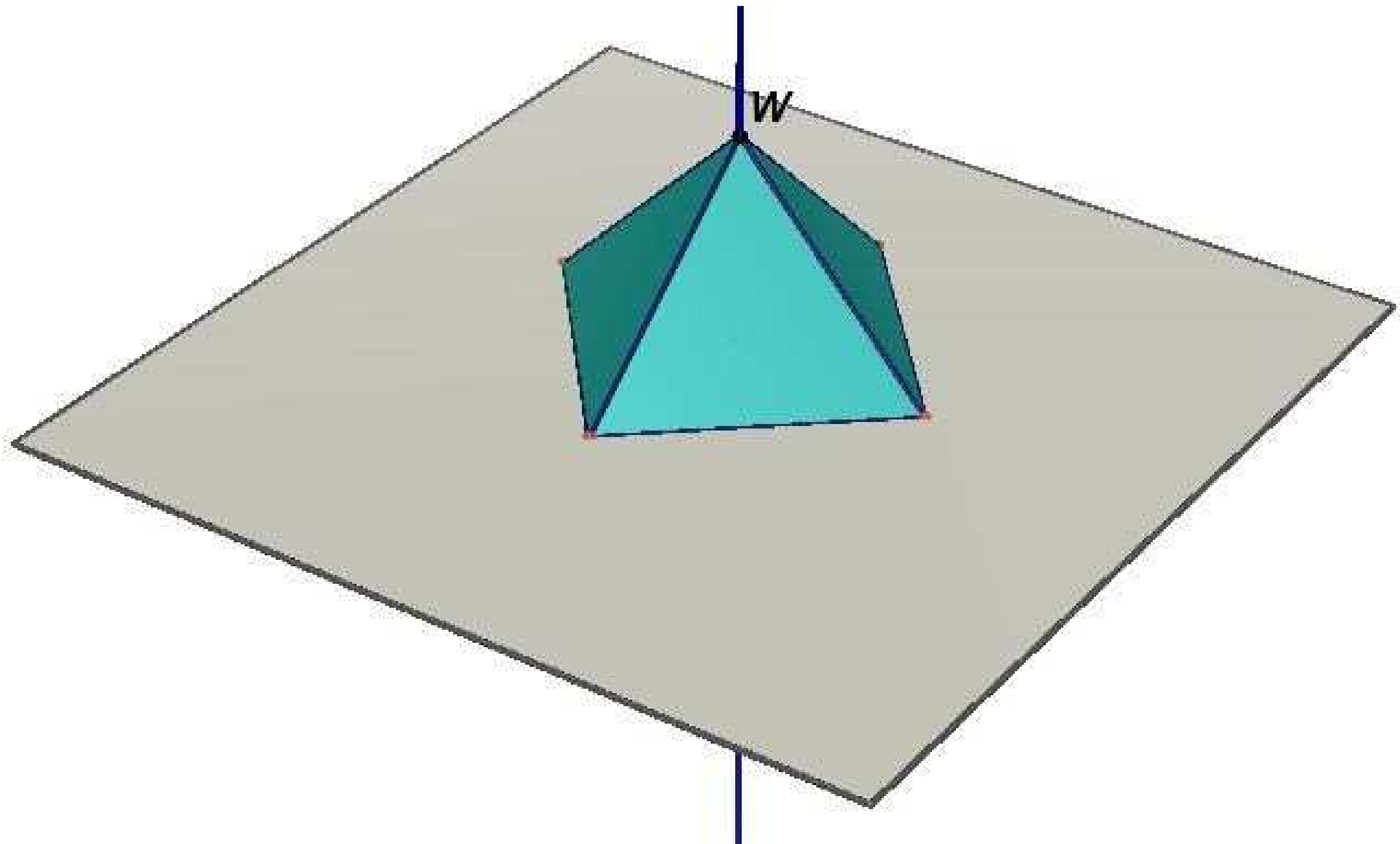
- punkt przecięcia tej sfery z prostopadłą wystawioną ze środka podstawy będzie poszukiwanym wierzchołkiem ostrosłupa,



- wykreśl ten punkt (***1/punkt przecięcia***)
- zasłoń sferę – wciśnij prawy klawisz myszy i wybierz opcje ***Ukryj***

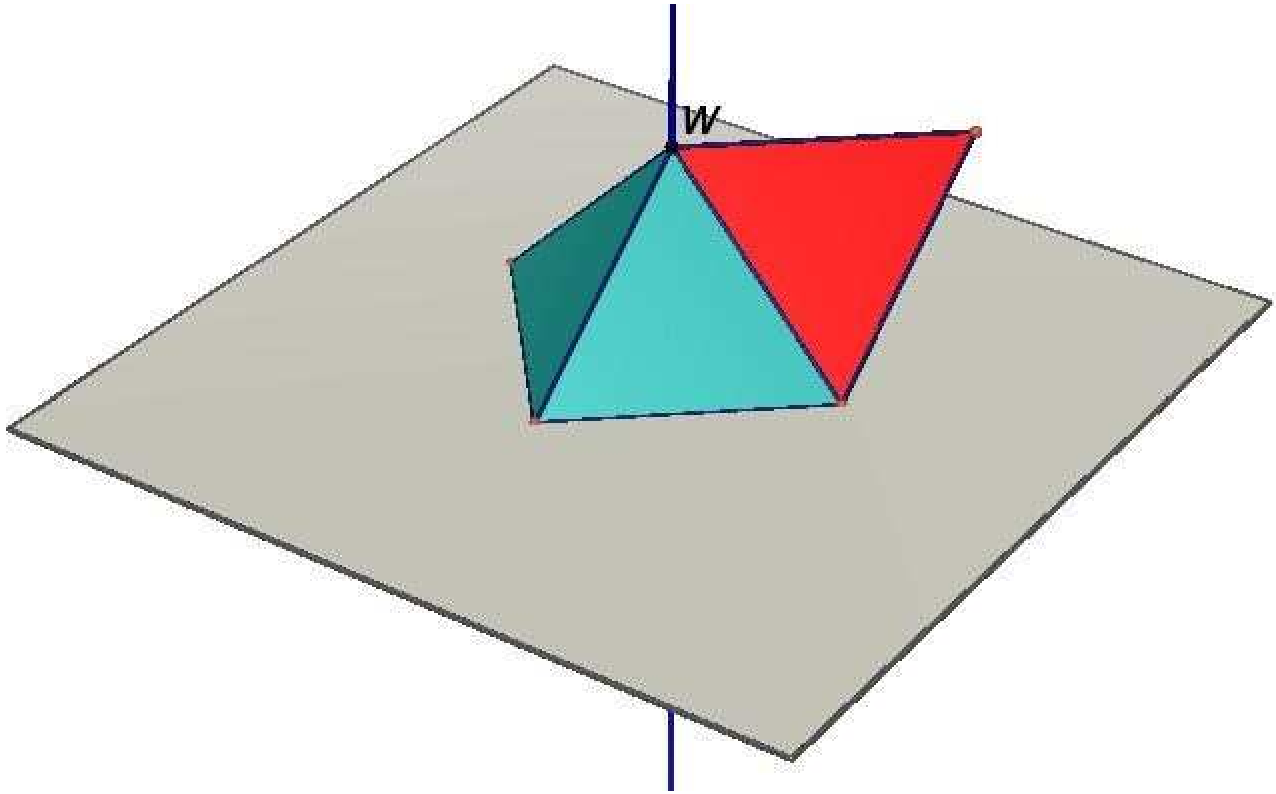


- teraz ostrosłup możesz skonstruować jako ***wielościan wypukły*** (ikona 7), lub ***ostrosłup*** (też ikona 7)

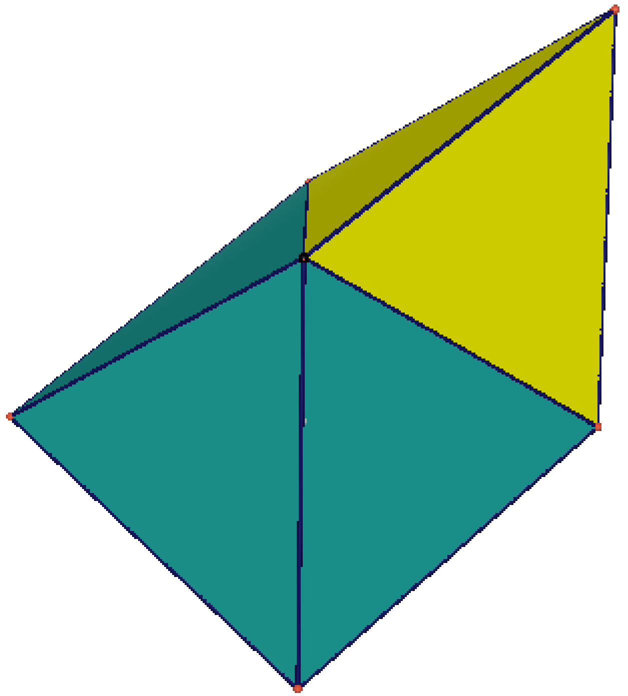


- teraz do ściany bocznej ostrosłupa doklej czworościan foremny,
- ponieważ program wie, że ściana boczna tego czworościanu jest trójkątem równobocznym, więc zaproponuje wykreślenie czworościanu foremnego po wskazaniu tej ściany

- wybierz więc narzędzie ***czworościan foremny*** z ikony 8 i wskaż ścianę boczną ostrosłupa – otrzymasz doklejony do ostrosłupa czworościan foremny

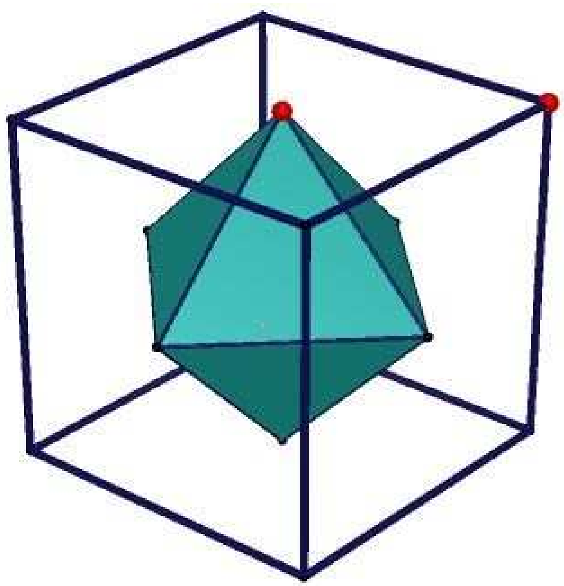


- pomaluj go innym kolorem,
- poruszaj lub obracaj utworzoną konstrukcją – co zauważasz? **(12)**

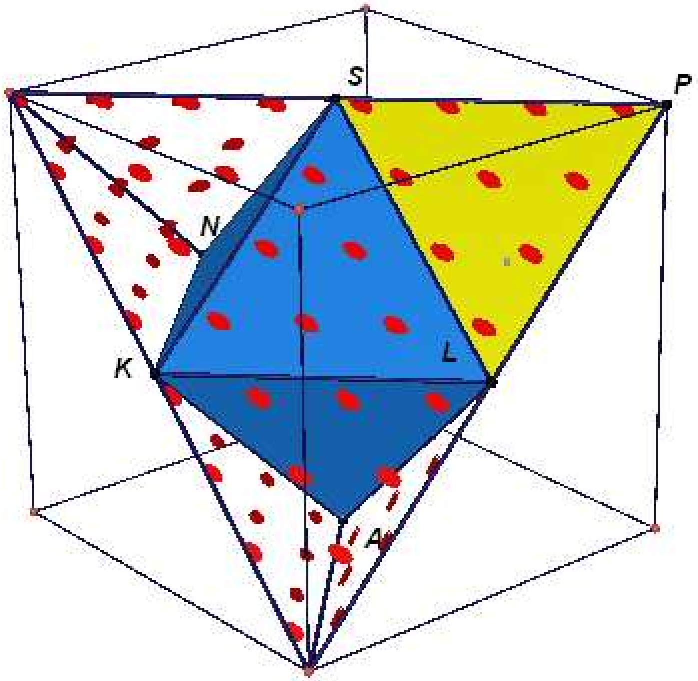


Ile ścian ma tak otrzymany wielościan? **(13)**

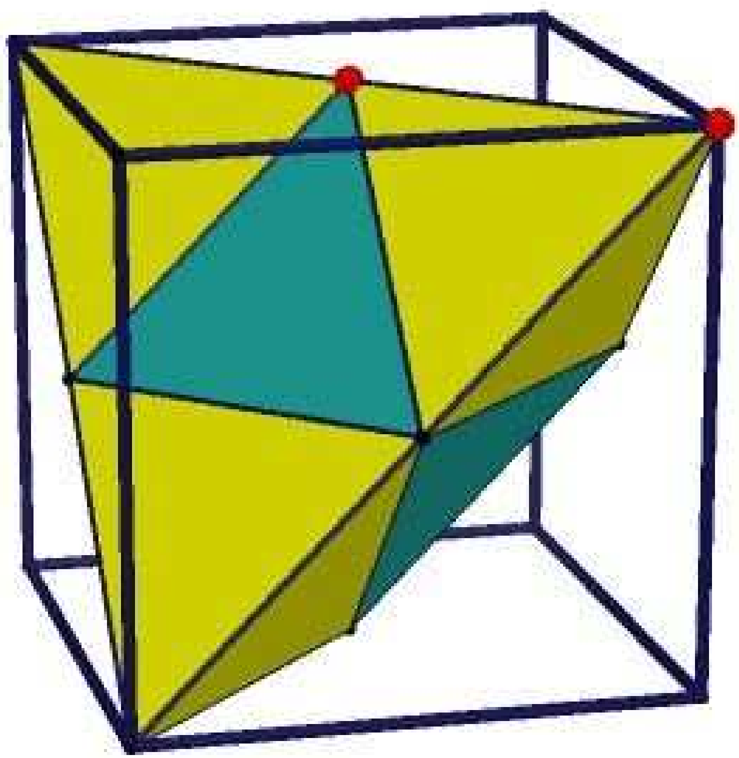
- popatrzmy na zadanie zupełnie od innej strony,
- przypatrz się ostrosłupowi i spróbuj dostrzec bryłę foremną, której ostrosłup zajmuje dokładnie połowę,
- co za figura?
- figura ta, to ………………………………………., a ten możesz zawsze umieścić w …………. (bo jest do niego dualny) – uzupełnij ten zapis **(14)**



- jeśli jeszcze dokleisz czworościan foremny, wówczas jego czwarty wierzchołek staje się wierzchołkiem sześcianu



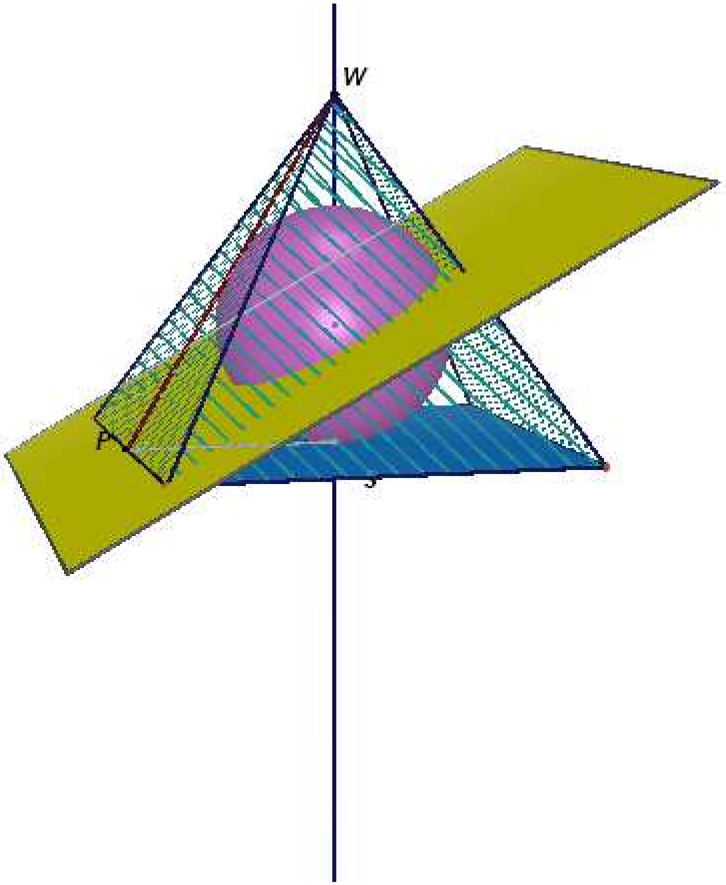
- gdyby do tego ośmiościanu dokleić jeszcze trzy odpowiednie czworościany, to co otrzymasz w ten sposób? **(15)**



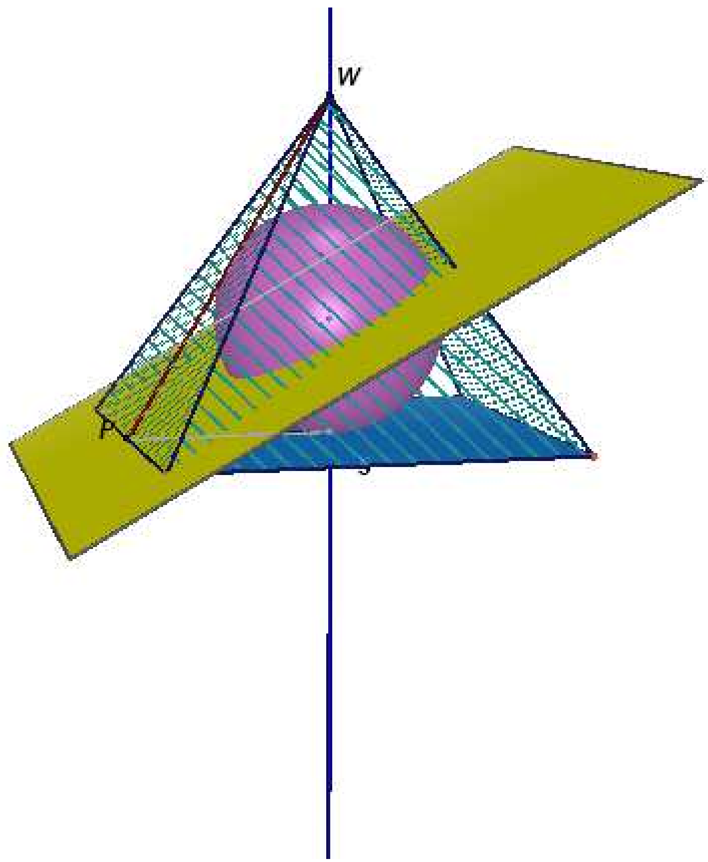
ZADANIE 2

- Wpisz do czworokątnego ostrosłupa prawidłowego kulę i sprawdź, czy jej objętość zmienia się w trakcie zmiany wysokości ostrosłupa – wcześniej wykonaj to zadanie na kartce papieru.
- Obejrzyj kolejne slajdy.

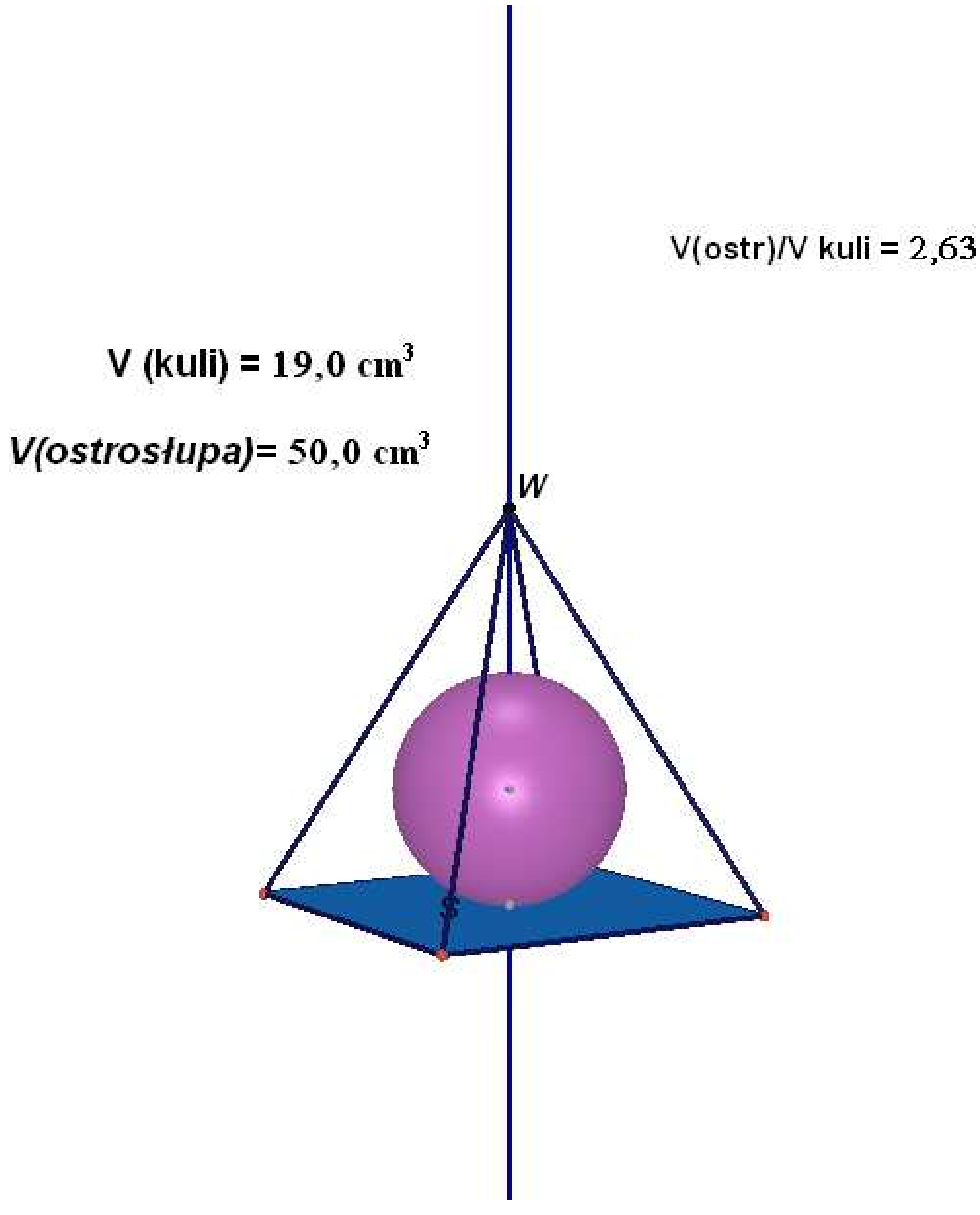
- Jak wpiszesz tę kulę?
- Gdzie jest jej środek? **(16)**
- Jak go skonstruujesz?



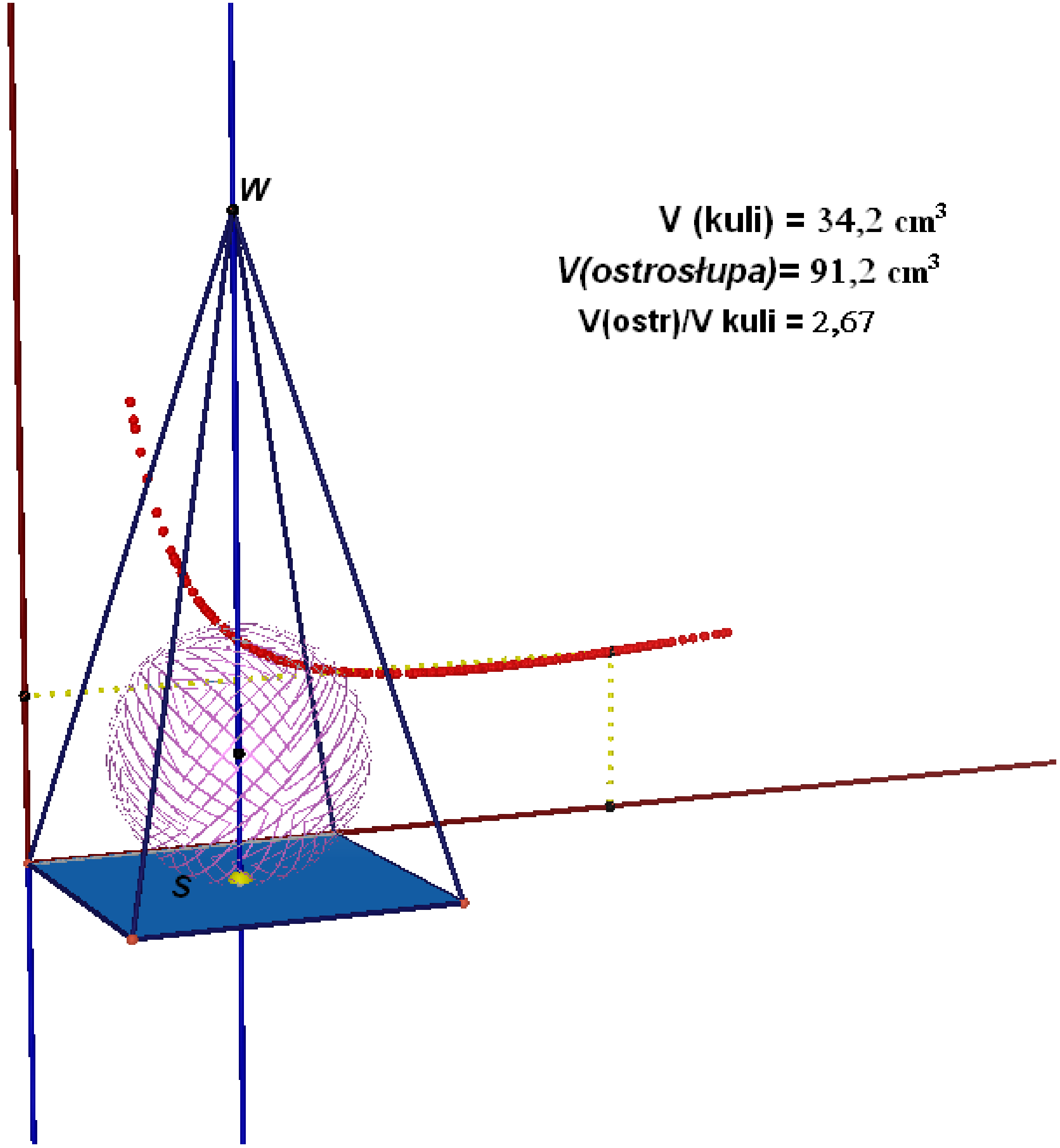
- Środek kuli, jako punkt równo oddalony od ścian musi leżeć w płaszczyźnie dwusiecznej tych ścian i równocześnie na wysokości ostrosłupa.



- wyznacz objętość kuli (ikona 9) a następnie objętość ostrosłupa,
- wprowadź do kalkulatora stosunek tych objętości i obserwuj go w trakcie zmiany wysokości ostrosłupa,
- czy ten stosunek zmienia się? **(17)**
- jeśli tak, to w jaki sposób? **(18)**
- dokładny opis tego co widzisz prześlij swojemu nauczycielowi. **(19)**



Poruszaj wierzchołkiem ostrosłupa – odczytaj samodzielnie co można odczytać z apletu



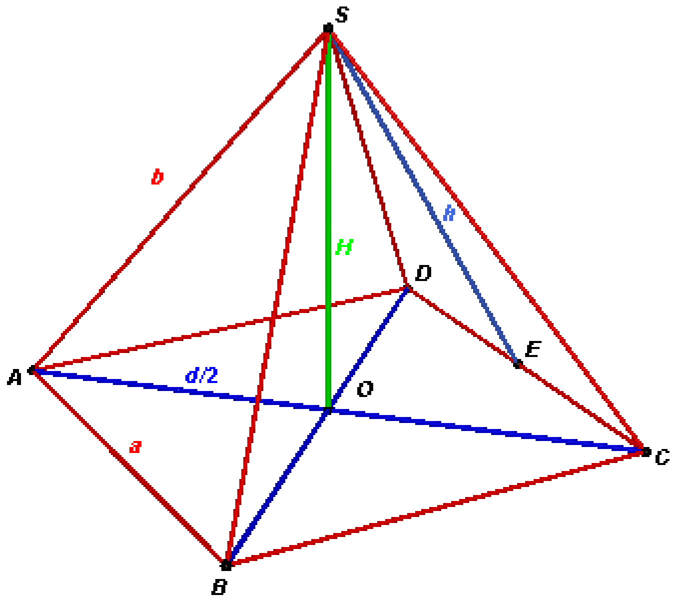
Poruszaj wierzchołkiem ostrosłupa. Co jest na osi OX, a co na osi OY układu współrzędnych?

A teraz kilka zadań przygotowawczych do egzaminu dojrzałości

ZADANIE 3

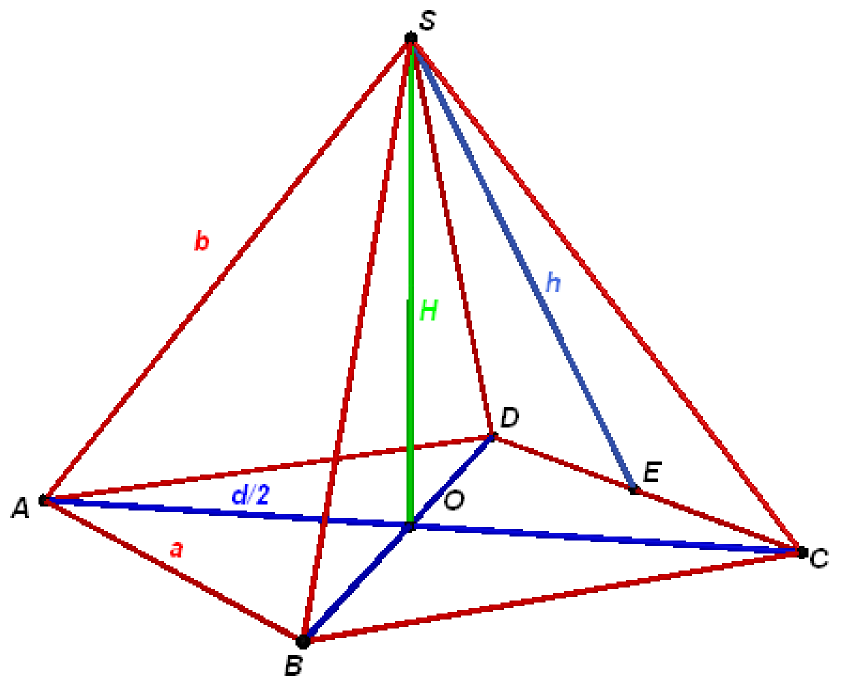
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ***ABCDS*** krawędź podstawy ma długość ***a***, zaś krawędź boczna ma długość ***b***.

Oblicz objętość i pole powierzchni tego ostrosłupa

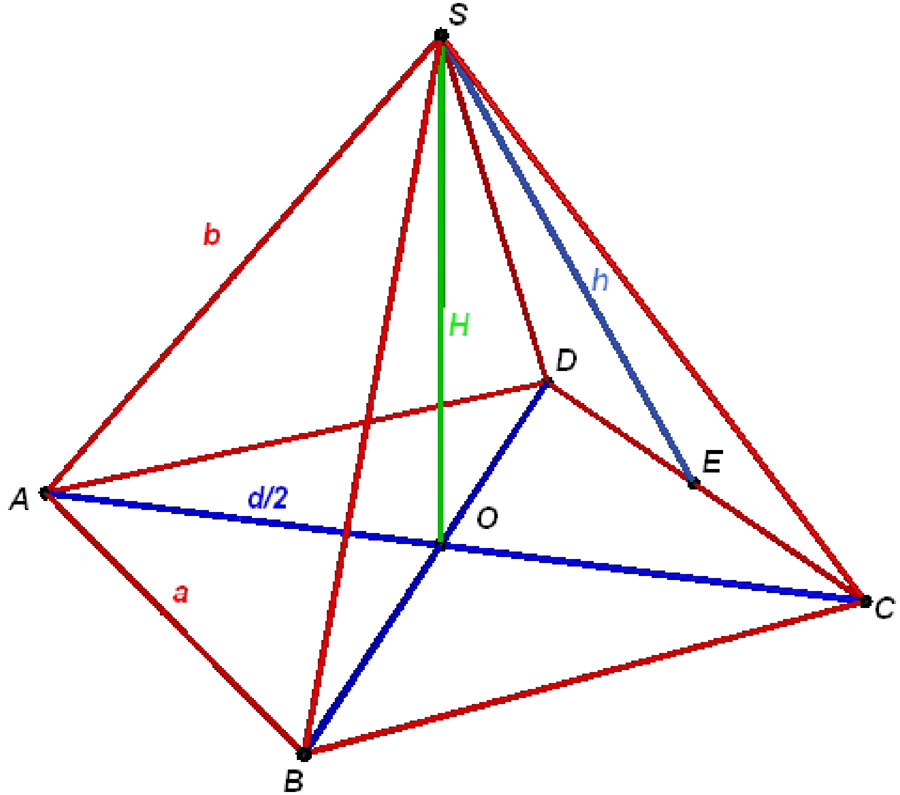

S
b
H
h
D
E
A
d/2
O
a
C
B

Przekątna podstawy, jako przekątna kwadratu ABCD ma długość

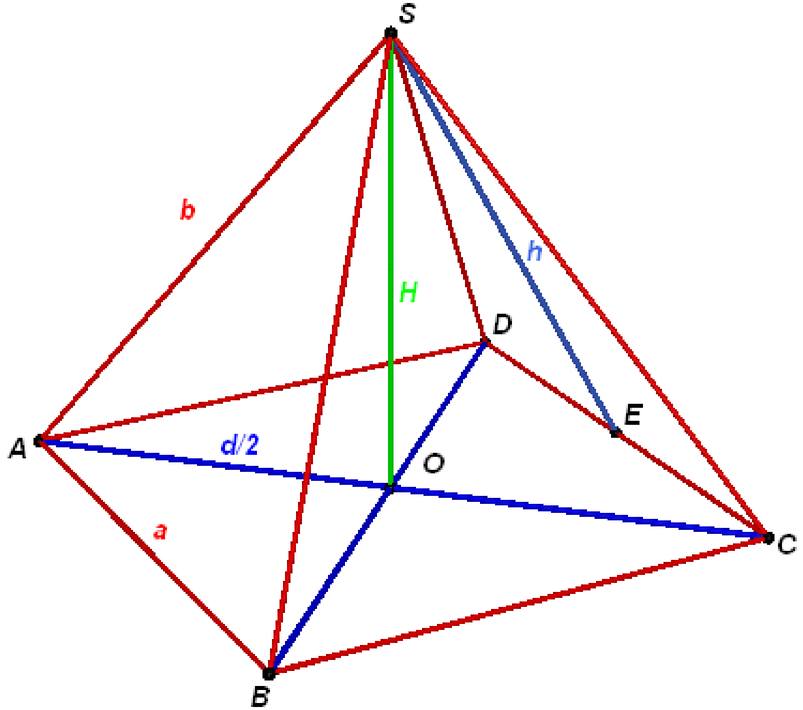
$$d = a\sqrt{2}$$



Stosując twierdzenie Pitagorasa w trójkącie ***AOS*** możemy obliczyć wysokość H tego ostrosłupa:

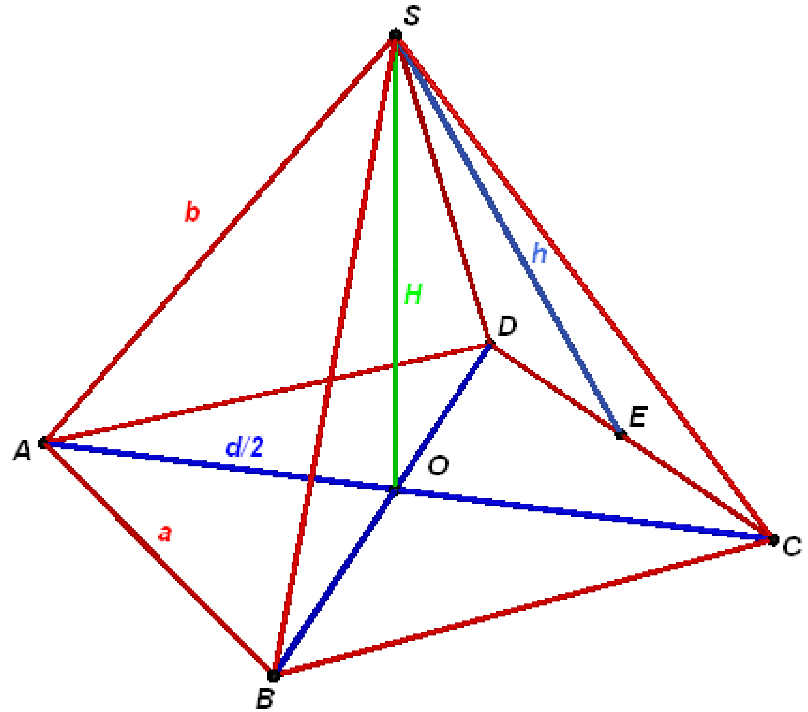


$$H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = b^2$$



$$H^2 + \left(\frac{d}{z}\right)^2 = b^2$$

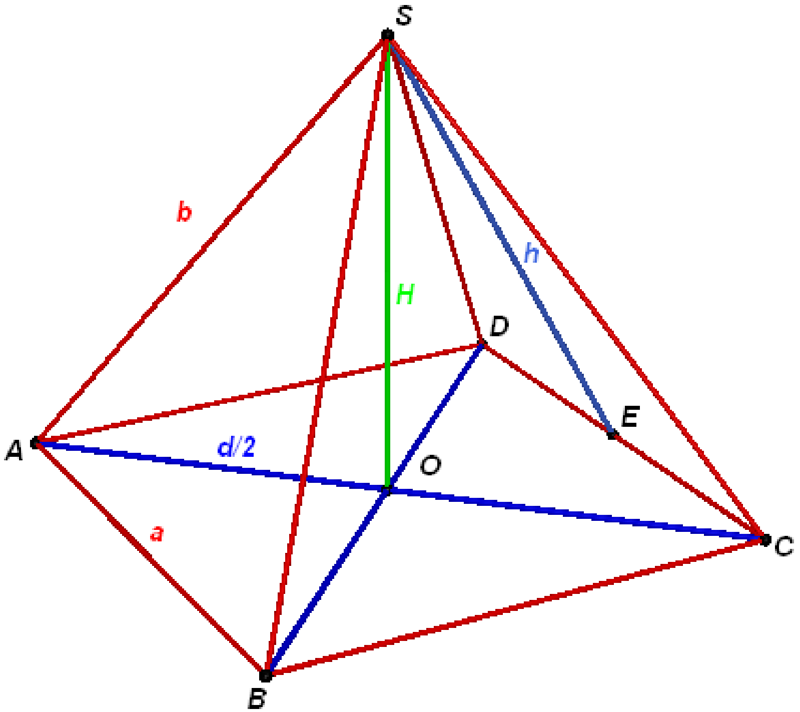
$$H^2 + \frac{1}{2}a^2 = b^2$$



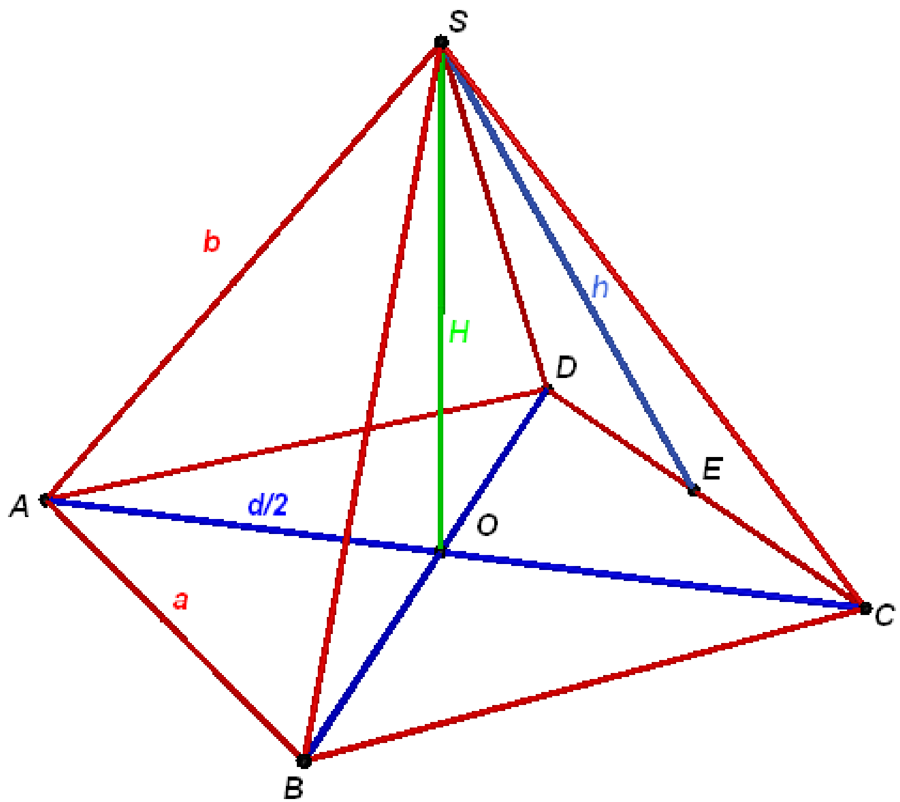
$$H^2 + \left(\frac{d}{z}\right)^2 = b^2$$

$$H^2 + \frac{1}{2}a^2 = b^2$$

$$H = \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}$$

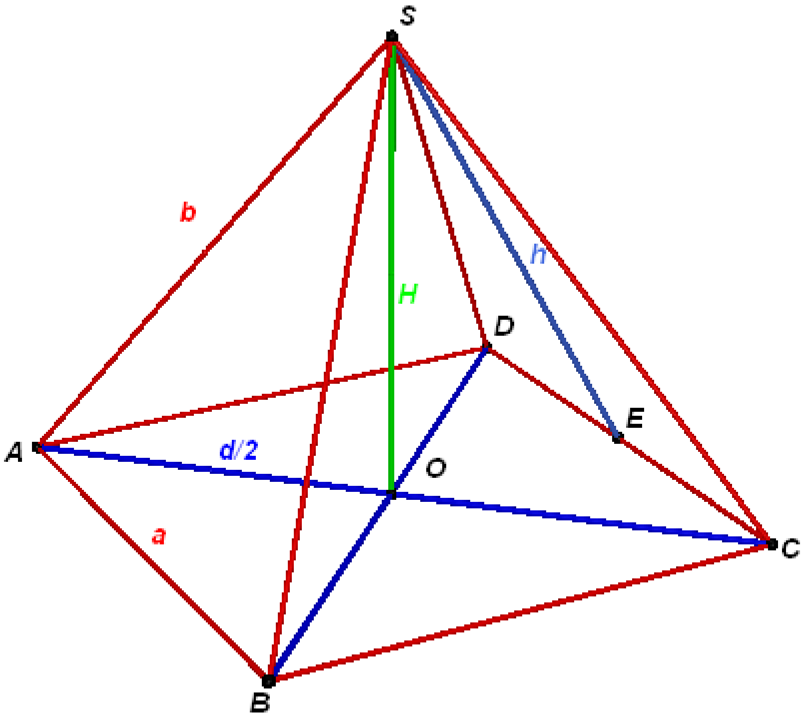


W podobny sposób możemy obliczyć wysokość ściany bocznej ***h*** (zwanej apotemą ostrosłupa):



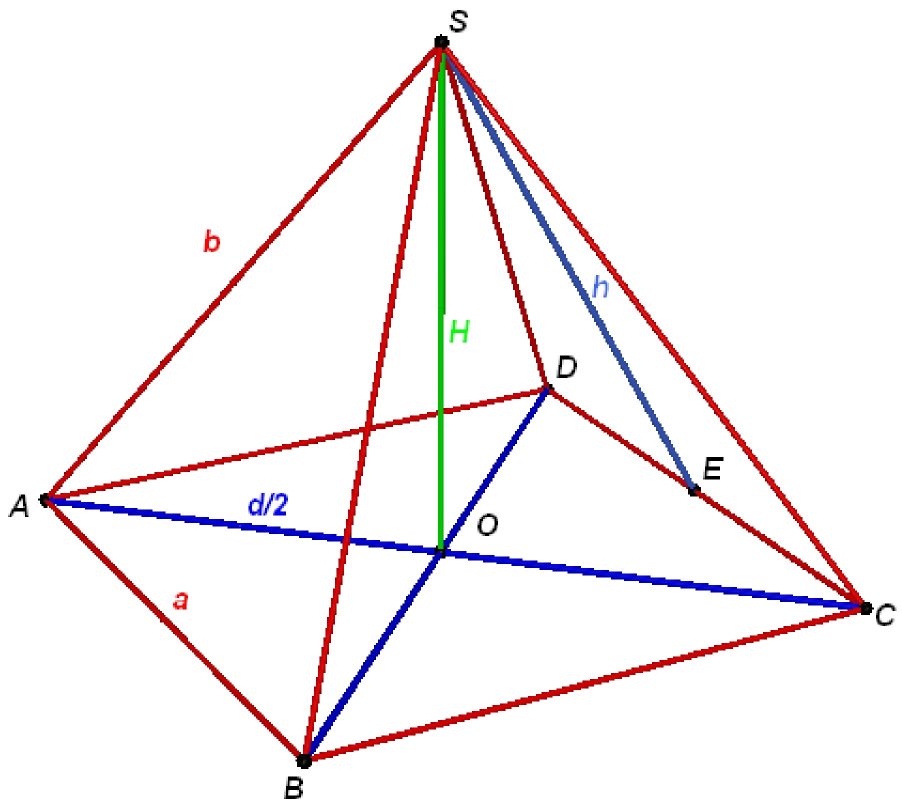
$z\ \Delta DES$

$$h=\sqrt{b^2-\frac{1}{4}a^2}$$



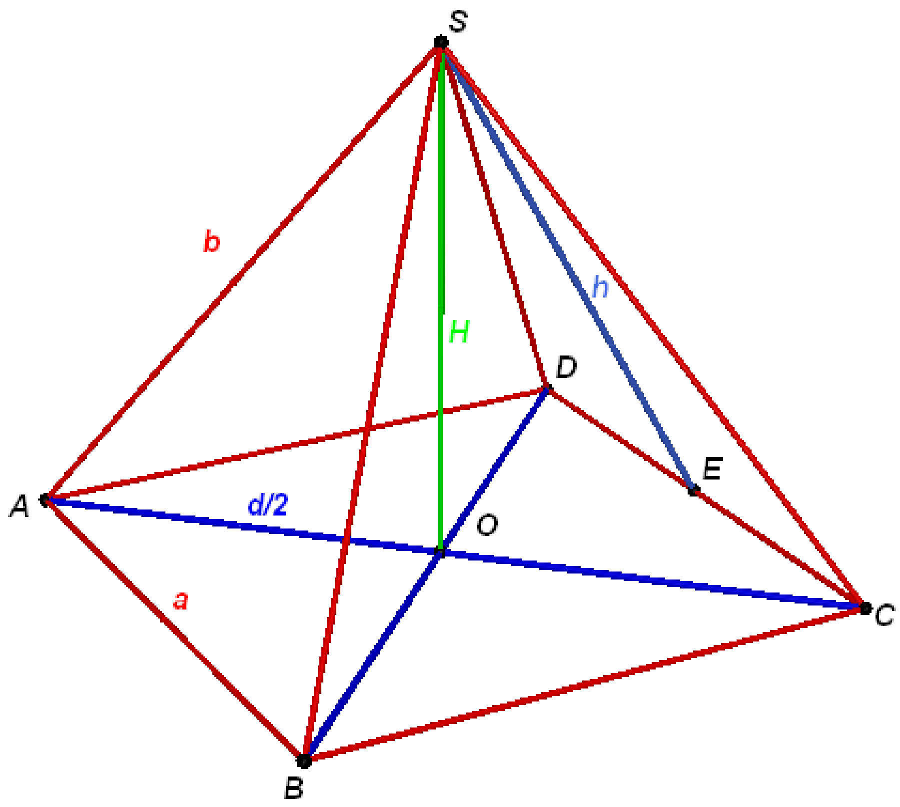
Stąd objętość ostrosłupa wynosi:

$$V = \frac{1}{3}a^2 H = \frac{1}{3}a^2\sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{6}a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}$$



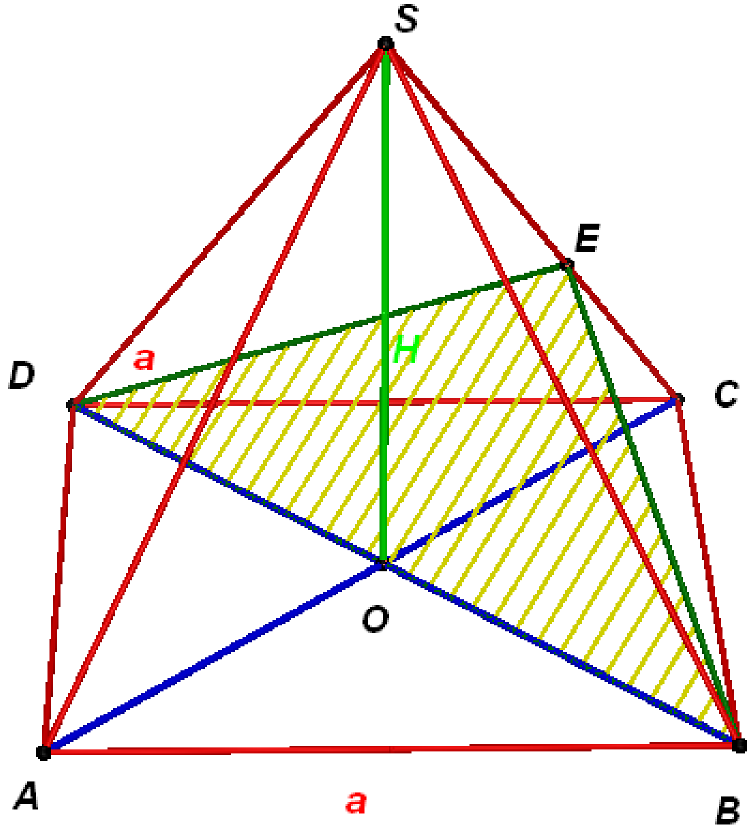
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi:

$$P_c = P_b + P_p = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + a^2 = 2a\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2} + a^2 = a\left(\sqrt{4b^2 - a^2} + a\right)$$



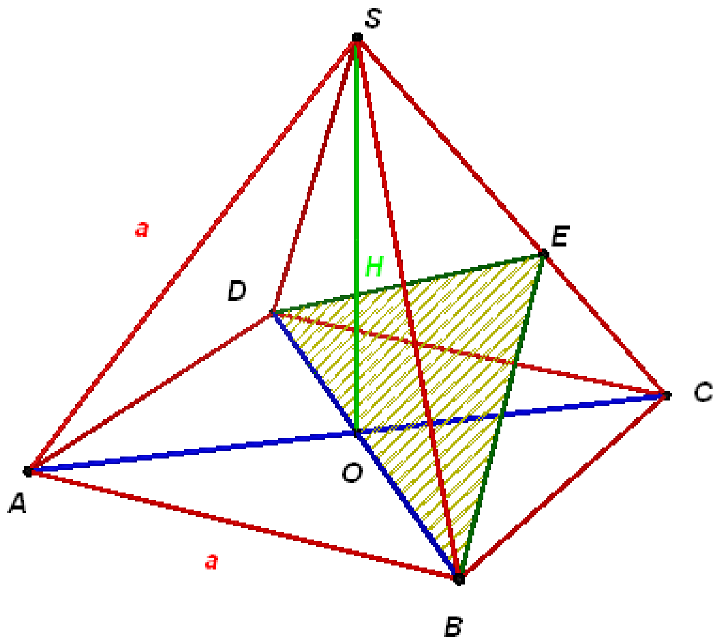
ZADANIE 4

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi
o boku długości ***a*** = 4.
Wyznacz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną nachyloną do podstawy pod kątem $\alpha = 45^0$ i zawierająca jej przekątną.

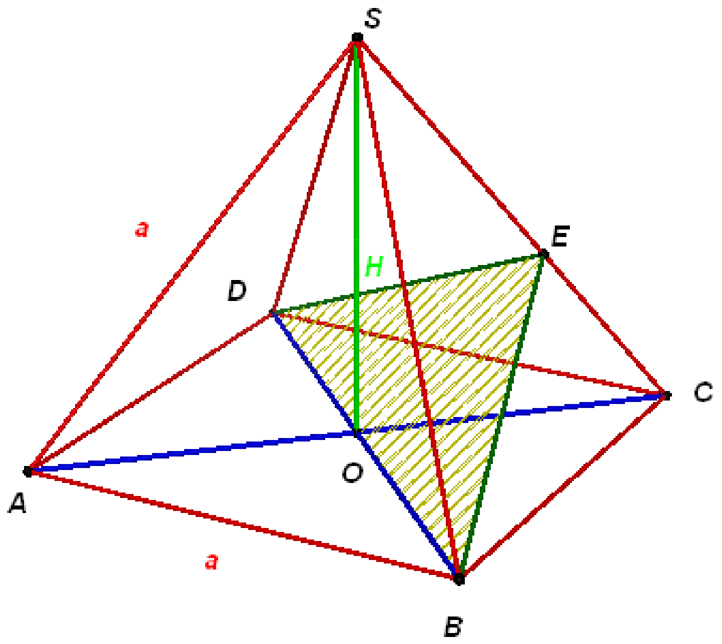

S
E
D
a
H
C
O
A
a
B

Długość przekątnej ***d*** podstawy wynosi

$$d = a\sqrt{2}$$

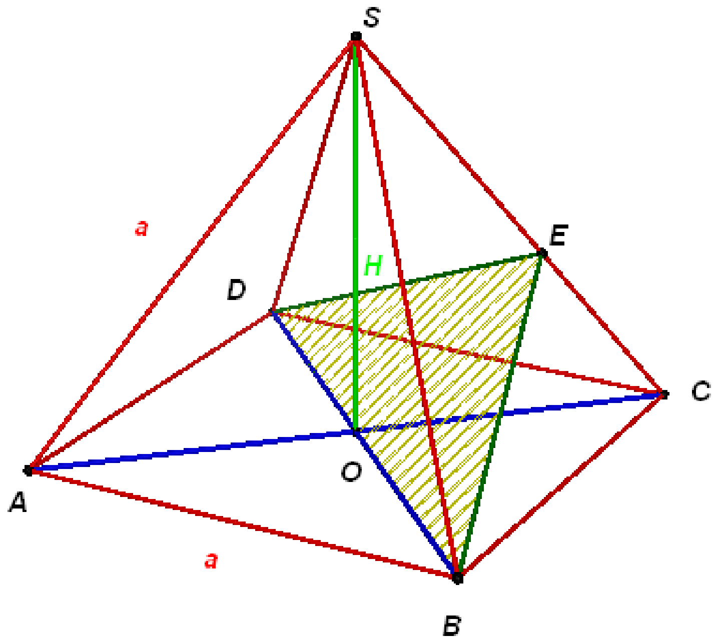


Wysokość ***H*** ostrosłupa obliczymy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ***SDO***

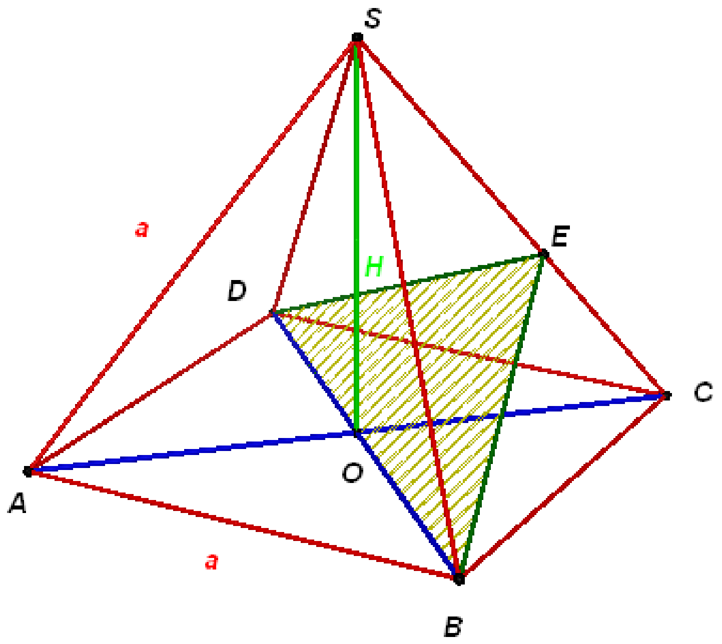


Wysokość ***H*** ostrosłupa obliczymy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ***SDO***

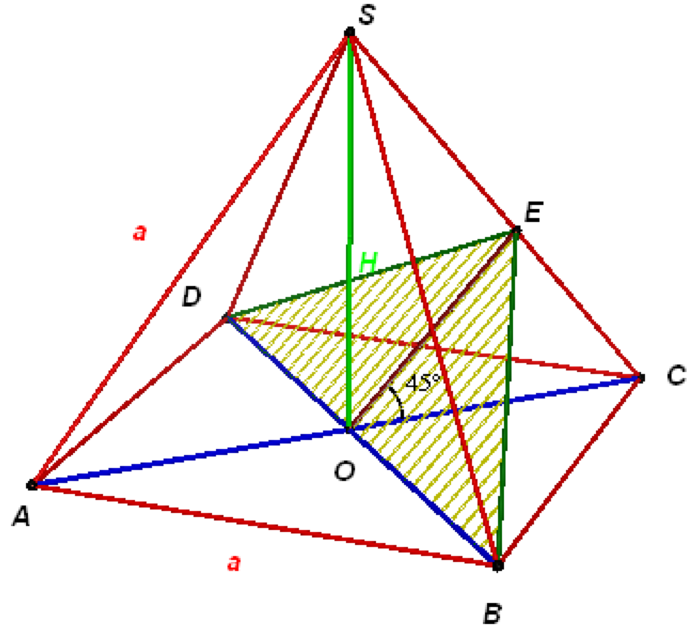
$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$$



To oznacza, że ***OS* = *OC***

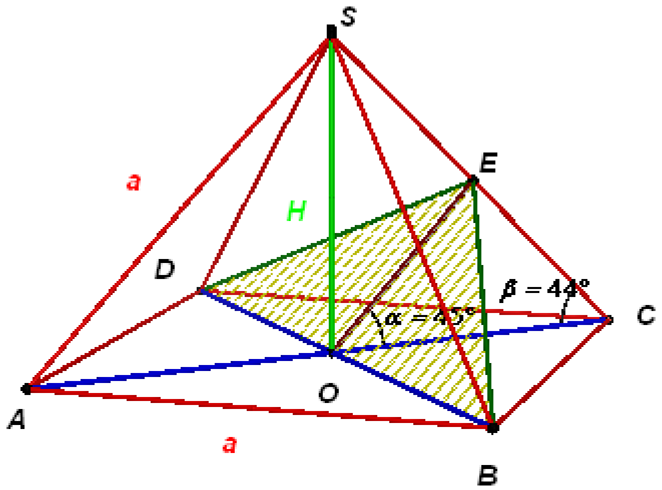


Czyli trójkąt ***COS*** jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.



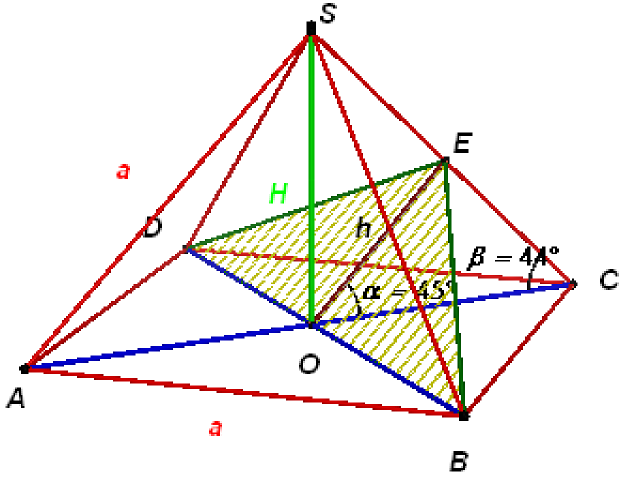
Czyli trójkąt ***COS*** jest trójkątem prostokątnym równoramiennym.

Zatem miara kąta ***SCO*** = $\beta = 45^\circ$

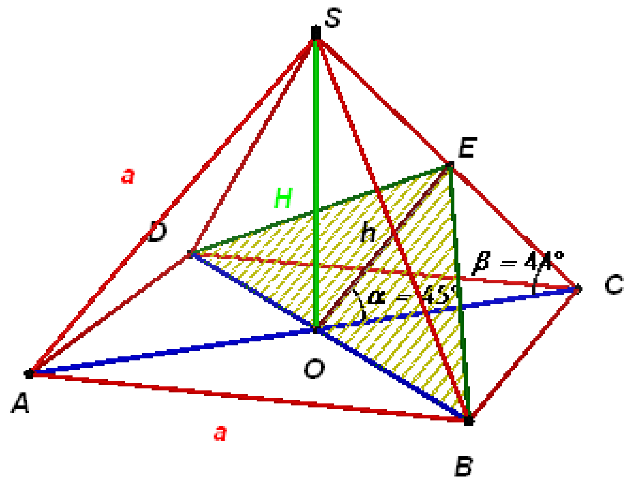


Do wyznaczenie pola przekroju potrzebna jest długość wysokości

h tego przekroju.

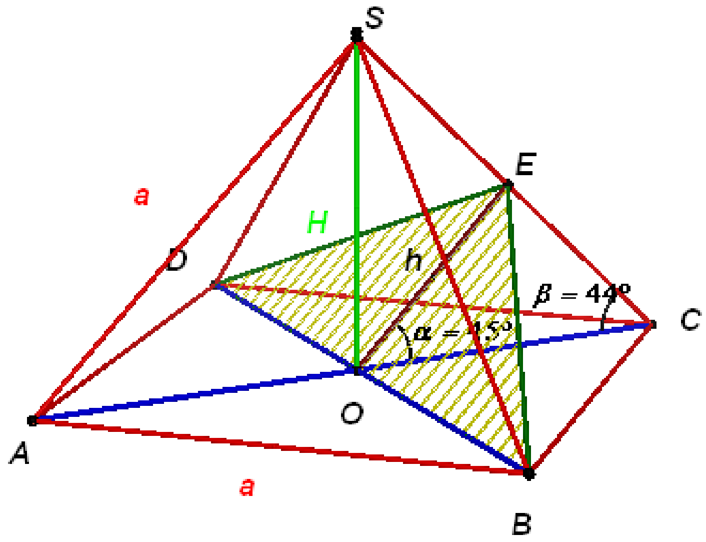


Wynosi ona:

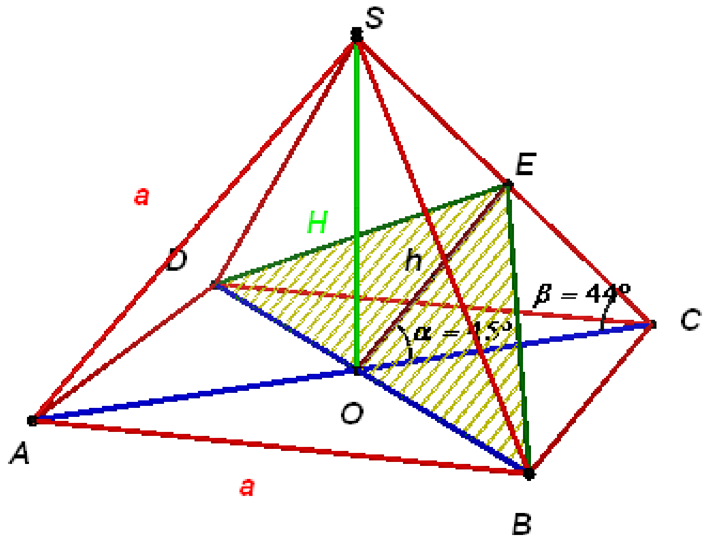


Wynosi ona:

$$h = \frac{H}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

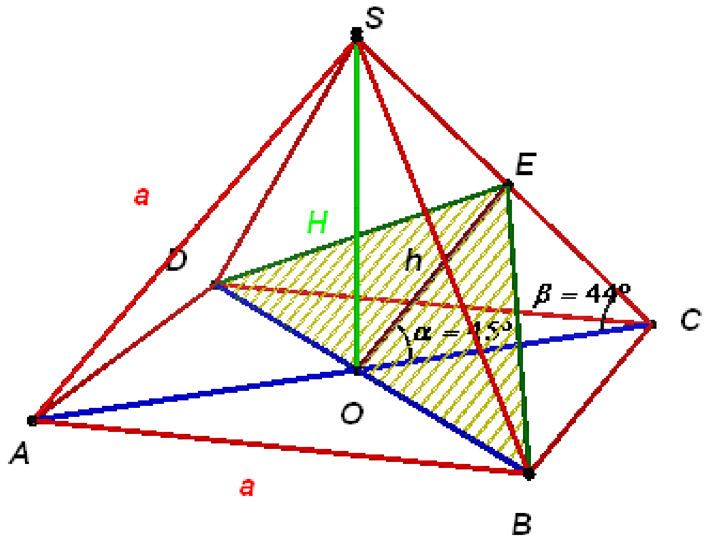


Pole przekroju wynosi:



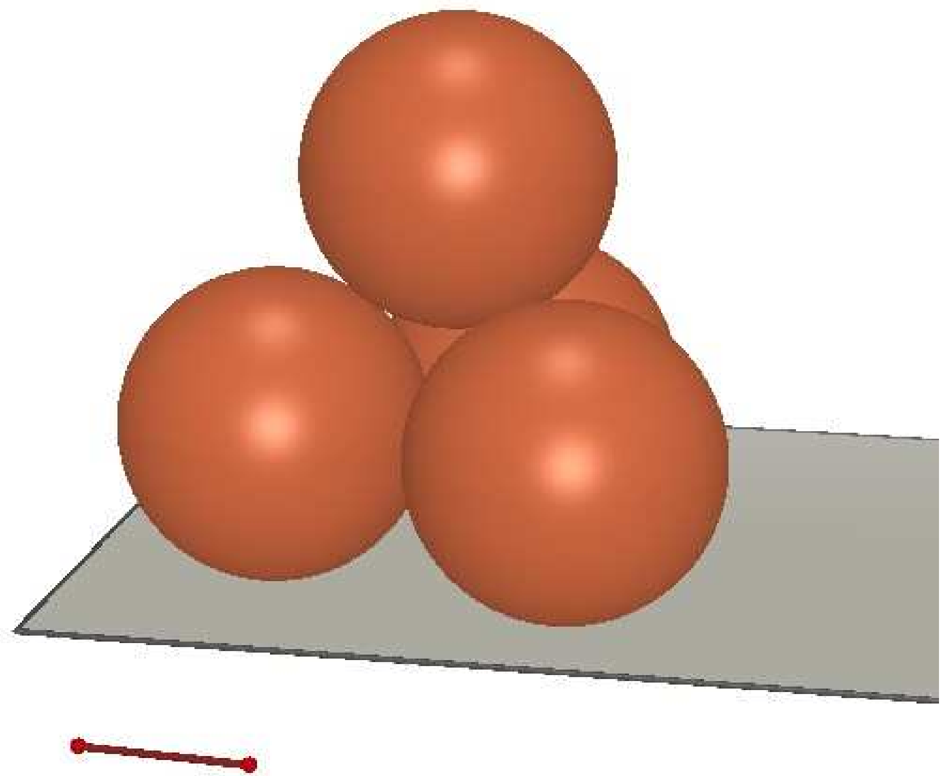
Pole przekroju wynosi:

$$P=\frac{1}{2}\cdot d\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

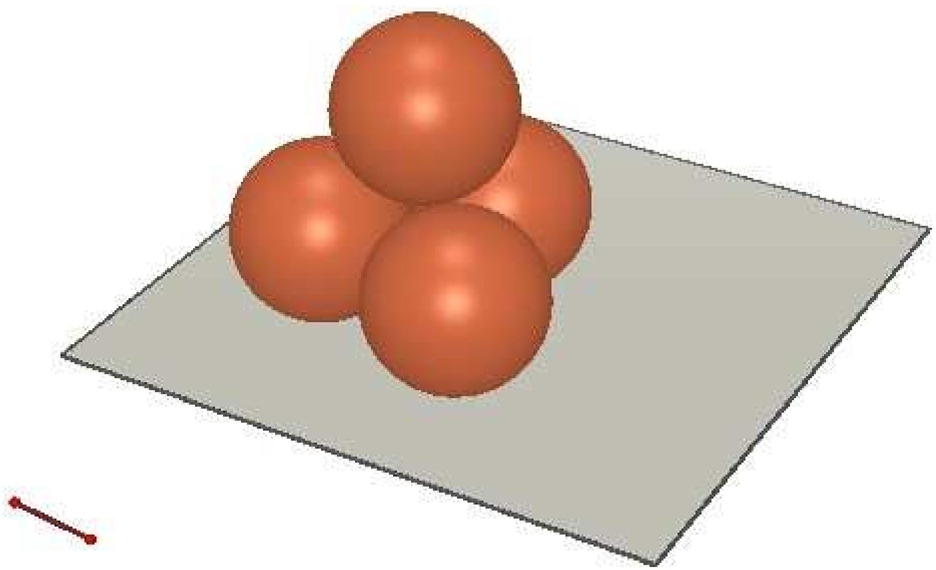


ZADANIE 5

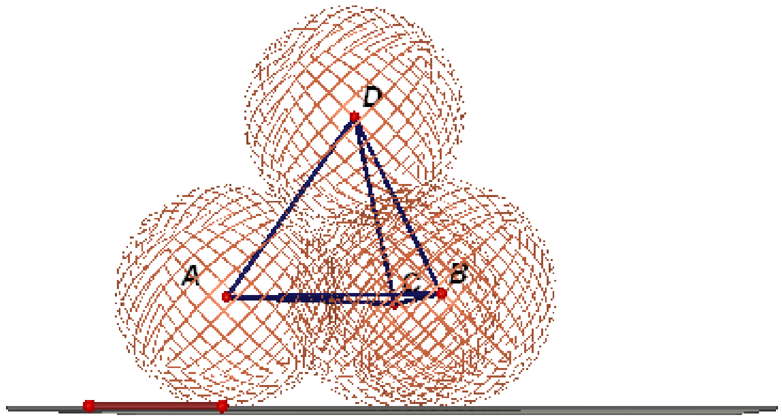
Cztery przystające kule armatnie ułożono parami stycznie do siebie w „stos” w taki sposób, że trzy z nich leżą na podłodze, a czwarta leży na nich .
Niech promienie kuli wynoszą 12 cm.
Oblicz wysokość tak otrzymanego stosu.



Jeśli połączymy odcinkami środki kul, wówczas odcinki te będą krawędziami pewnego wielościanu. Co to za wielościan?



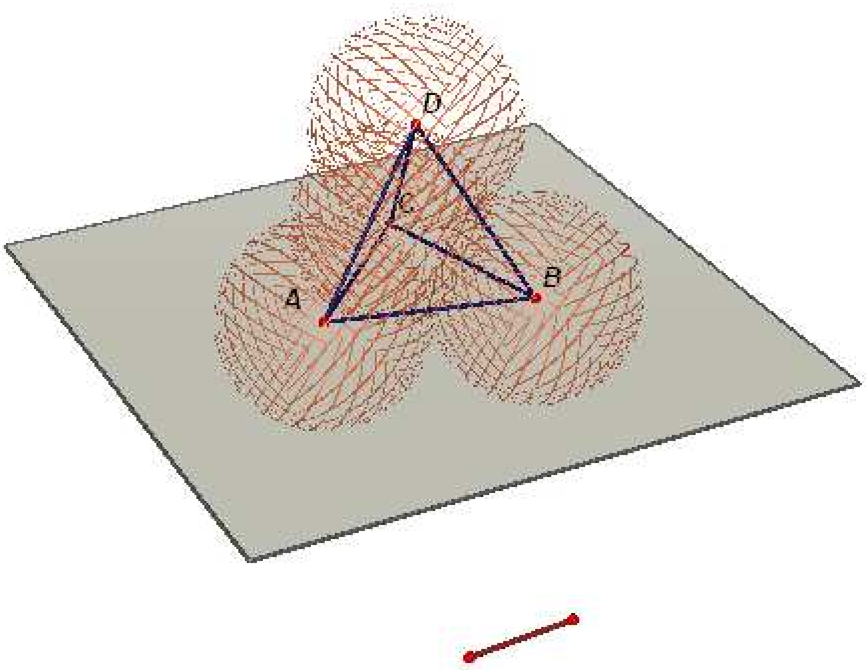
Wielościanem tym jest ……………………………… **(20)**



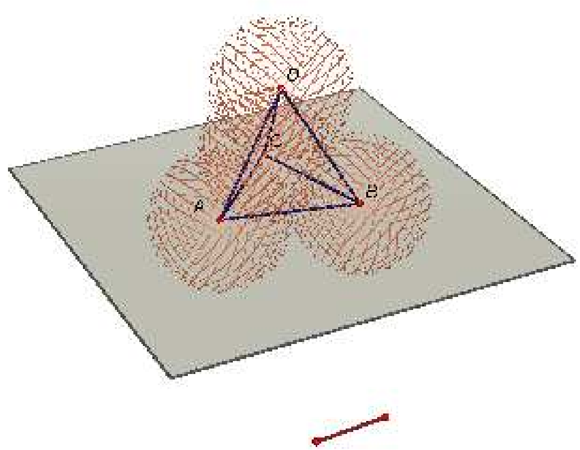
Poszukiwana wysokość tych kul stanowi wysokość tego wielościanu plus ………………………….. **(21)**

Wylicz długość ***a*** krawędzi tego wielościanu.

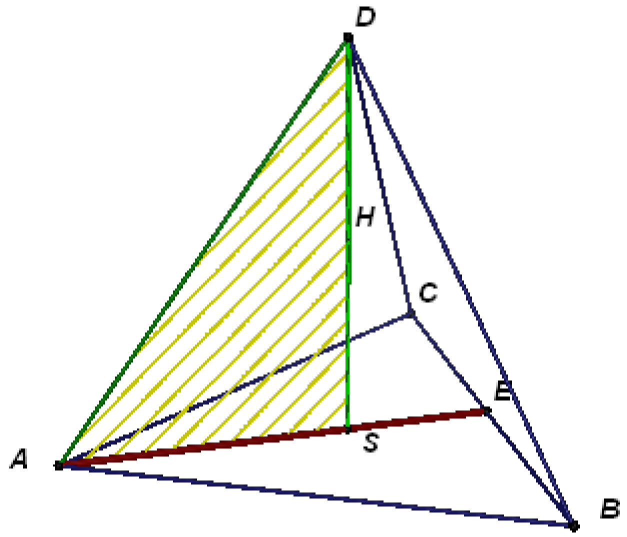
Prześlij obliczenia **(22)**



Środki kul są wierzchołkami czworościanu foremnego. Ponieważ są one parami styczne i ich promienie mają długość12 cm , więc krawędź tego czworościanu ma długość 24 cm.
Do wyznaczenia wysokości „stosu” wystarczy więc wyznaczyć wysokość czworościanu.

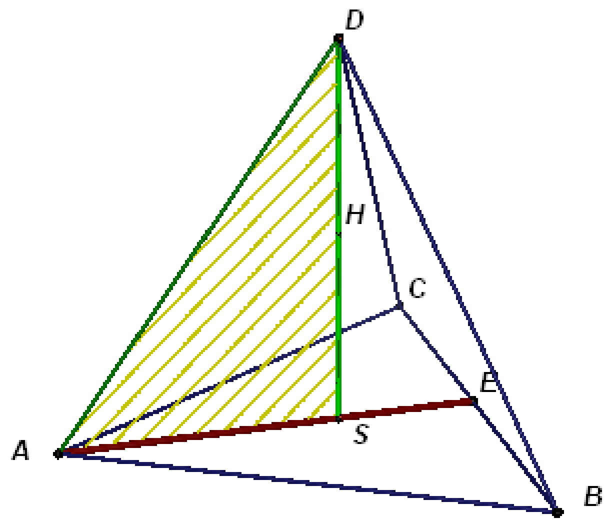


Odcinek ***AS*** ma długość:



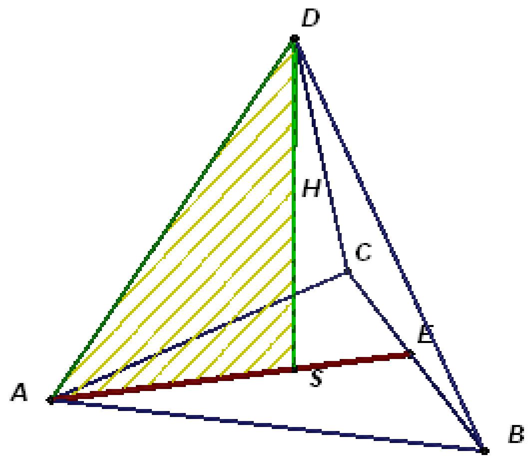
Odcinek ***AS*** ma długość:

$$AS=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$$



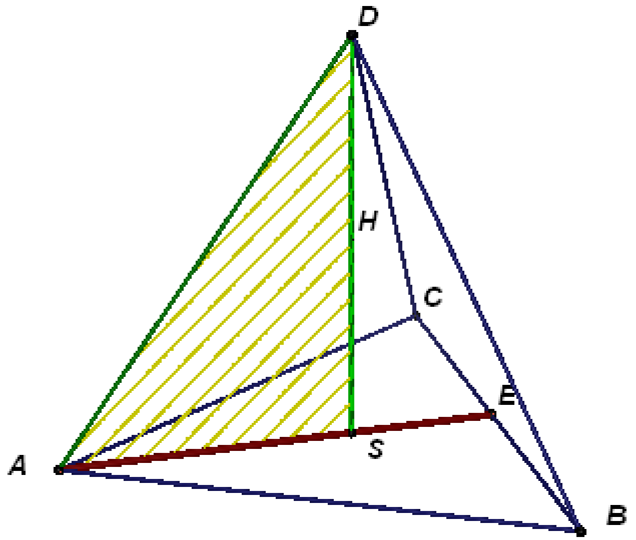
Stosując tezę twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ***ASD*** otrzymamy:

$$H^2 = AD^2 - AS^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6}{9}a^2$$



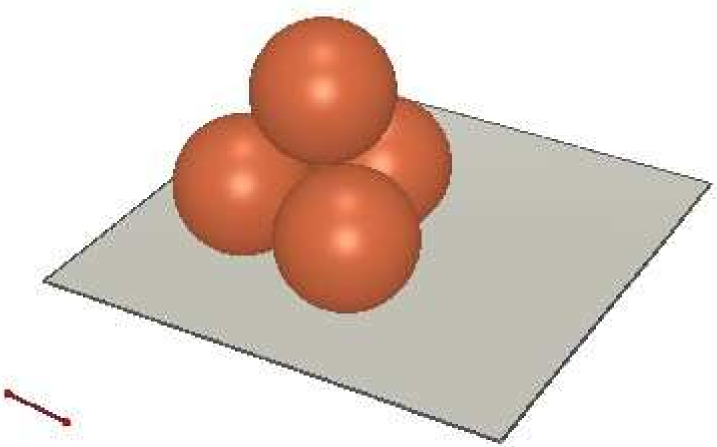
Stąd:

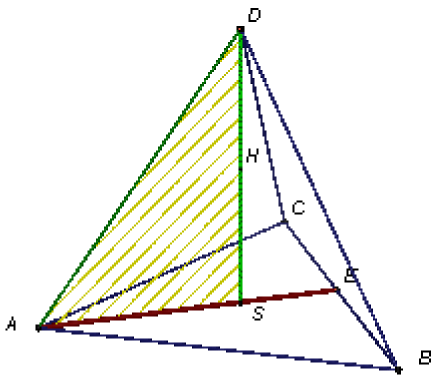
$$H = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$



Podstawiając ***a*** =12 otrzymamy wysokość „stosu”:

$$h = H + 2a = 24 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + 2 \cdot 12 =$$





Dziękuję za uwagę

PYTANIA I ODPOWIEDZI DO „STEREOMETRII”

1. Jakie położenie punktu ***K*** wybrałeś za najkorzystniejsze? Dlaczego?
Prześlij odpowiedź na platformę elearningową. **(01)**

2. Oczywiście najkorzystniej wybrać takie położenie punktu ***K***, w którym proste ***a*** i ***b*** będą przechodzić przez wierzchołki czworościanu.
Gdzie wówczas znajduje się punkt K? **(02)**

3. Skoro więc czworościan ma być umieszczony w sześcianie, i jego wierzchołki równocześnie wierzchołkami sześcianu, to czym muszą być jego krawędzie w sześcianie? **(03)**

4. Oblicz teraz pole całkowite i objętość stelli octanguli jako funkcję krawędzi ***a*** sześcianu. **(04)**

5 - 7.. wielościanem dualnym do sześcianu jest …………….. **(5)**
wielościanem dualnym do ośmiościanu jest ………… **(6)**
wielościanem dualnym do czworościanu jest ………… **(7)**

8. A teraz zobacz wydłużanie wszystkich ścian, czyli stellację ośmiościanu. Jaką bryłę otrzymałeś w ten sposób? **(08)**

9-11. Czy sześcian ma stellację? **(09)**
Czy czworościan ma stellację? **(10)**
Czy dwunastościan ma stellację? **(11)**

12. Poruszaj lub obracaj utworzoną konstrukcją – co zauważasz? **(12)**

13. Ile ścian ma tak otrzymany wielościan? **(13)**

14. Figura ta, to ……………………………………………, a ten możesz zawsze umieścić w ………….. (bo jest do niego dualny) – uzupełnij ten zapisy **(14)**

15. gdyby do tego ośmiościanu dokleić jeszcze trzy odpowiednie czworościany, to co otrzymasz w ten sposób? **(15)**

16. Gdzie jest jej środek? **(16)**

17. Czy ten stosunek zmienia się? **(17)**

18**.** Jeśli tak, to w jaki sposób? **(18)**

19. dokładny opis tego co widzisz prześlij swojemu nauczycielowi. **(19)**

20. Wielościanem tym jest ………………………………. **(20)**

21. Poszukiwana wysokość tych kul stanowi wysokość tego wielościanu plus ………..………………… **(21)**

22**.** Wylicz długość ***a*** krawędzi tego wielościanu? Prześlij obliczenia **(22)**