Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat:

Rachunek prawdopodobieństwa z elementami statystyki

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Spis treści

1 Podstawowe wiadomości i oznaczenia

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$;
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

Symbol:

$\bigwedge_{x \in X}$ - czytamy „dla każdego $x \in X$" - jest to kwantyfikator ogólny,
natomiast
$\bigvee_{x \in X}$ - czytamy „istnieje $x \in X$" - kwantyfikator egzystencjalny.

Dodatkowo przypomnijmy sobie podstawowe pojęcia kombinatoryki (w tym schematy kombinatoryczne).

Twierdzenie 1 (reguła iloczynu)**.** *Jeżeli możemy pewien wybór dokonać etapami (podejmując wielokrotnie decyzje dotyczącą wyboru poszczególnych elementów), przy czym za pierwszym razem (pierwsza decyzja) możemy wybrać elementy na* n_1 *sposobów, za drugim razem - na* n_2 *sposoby itd. a ostatnim razem - na* n_k *sposobów i jeśli te decyzje są podejmowane niezależnie, to całkowita liczba wszystkich możliwych wyborów wynosi*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Definicja 1. n-wyrazową **permutacją** zbioru X (lub mówiąc inaczej; permutacją zbioru n-elementowego X) nazywamy każdą różnowartościową funkcję f odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na zbiór X (czyli funkcja f jest wzajemnie jednoznaczna).

Zgodnie z powyższą definicją przez n-wyrazową permutację możemy rozumieć każdy n-wyrazowy różnowartościowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego X.

Twierdzenie 2. *Liczba różnych permutacji zbioru n-elementowego wynosi*

$$P_n := n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Definicja 2. k-wyrazową **wariacją z powtórzeniami** ze zbioru n-elementowego X nazywamy każdą funkcję f odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór X.

Zgodnie z powyższą definicją przez k-wyrazową wariację z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego możemy rozumieć każdy k-wyrazowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego X.

Twierdzenie 3. *Liczba różnych k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego wynosi*

$$\overline{V}_n^k := n^k.$$

Definicja 3. k-wyrazową **wariacją bez powtórzeń** ze zbioru n-elementowego X, gdzie $k \leqslant n$ nazywamy każdą różnowartościową funkcję f odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \ldots, k\}$ w zbiór X.

Zgodnie z powyższą definicją przez k-wyrazową wariację bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego ($k \leqslant n$) możemy rozumieć każdy k-wyrazowy różnowartościowy ciąg wyrazów ze zbioru n-elementowego X.

Twierdzenie 4. *Liczba różnych k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego wynosi*

$$V_n^k := \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

gdzie $k \leqslant n$.

Definicja 4. k-elementową **kombinacją** zbioru n-elementowego X, gdzie $k \leqslant n$ nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru X.

Twierdzenie 5. *Liczba wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wynosi*

$$C_n^k := \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

2 Rachunek prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa jest teorią zajmującą się zdarzeniami występującymi podczas wykonywania doświadczeń losowych.

Doświadczenie nazywamy **losowym**, jeżeli można go wielokrotnie powtórzyć w tych samych warunkach, ale nie jesteśmy w stanie przewidzieć kiedy się ono pojawi.

Przykładami takich doświadczeń są: rzut kostką do gry, rzut monetą, ciągnięcie losu na loterii, wylosowanie 6 liczb w „toto-lotku".

W każdym doświadczeniu losowym można wyodrębnić pewne najprostsze, nierozkładalne, elementarne wyniki, które wyróżniają się tym, że każde powtórzenie tego doświadczenia kończy się jednym i tylko jednym z nich. Te wyniki zwane są **zdarzeniami elementarnymi**, które są pojęciami pierwotnymi teorii prawdopodobieństwa (czyli takimi elementami teorii, które się nie definiuje). Zdarzenia elementarne będziemy oznaczać przez $\omega_1, \omega_2, \ldots$. Zbiór złożony ze wszystkich zdarzeń elementarnych nazywamy **zbiorem zdarzeń elementarnych**. Będziemy oznaczać go grecką literą Ω.

Przykład 1. Przypuśćmy, że rzucamy raz monetą. Doświadczenie to może zakończyć się jednym z dwóch możliwych wyników: „wypadnie orzeł” (oznaczane przez O), „wypadnie reszka” (oznaczane przez R), które będą zdarzeniami elementarnymi tego doświadczenia. Tak więc zbiór zdarzeń elementarnych (tego doświadczenia) można zapisać w postaci

$$\Omega = \{O, R\}.$$

Przykład 2. Przypuśćmy, że rzucamy trzy razy monetą. Zbiór zdarzeń elementarnych ma postać

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),(O,R,R),\\ &(R,O,O),(R,O,R),(R,R,O),(R,R,R)\}\end{aligned}$$

lub krócej

$$\Omega = \{(a,b,c) :\ a,b,c \in \{O,R\}\}.$$

Przykładowo zdarzenie elementarne (O,R,R) rozumiemy jako zdarzenie, w którym za pierwszym razem „wypadł orzeł”, a za drugim i trzecim razem „wypadły reszki”.

Przykład 3. Załóżmy, że rzucamy dziesięć razy kostką do gry. W jednokrotnym rzucie kostką do gry możemy otrzymać jeden z sześciu wyników: „wypadnie jedno oczko" (oznaczamy 1), „wypadnie dwa oczka" (oznaczamy 2), „wypadnie trzy oczka" (oznaczamy 3), „wypadnie cztery oczka" (oznaczamy 4), „wypadnie pięć oczek" (oznaczamy 5), „wypadnie sześć oczek" (oznaczamy 6). W związku z tym zbiór zdarzeń elementarnych możemy zapisać w postaci

$$\Omega = \{(a_1, \ldots, a_{10}) : \ a_1, \ldots, a_{10} \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

W tym przypadku nie było sensu wypisywać wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych (jak to robiliśmy w Przykładach 1 i 2), bo jest ich dokładnie $6^{10} = 60466176$.

Definicja 5. Każdy podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych Ω nazywamy **zdarzeniem**.

Zwykle zdarzenia będziemy oznaczać dużymi literami $A, B, \ldots$. Wyjątek stanowią dwa zdarzenia: zdarzenie $\emptyset$ zwane **niemożliwym** (zbiór pusty zawiera się w każdym zbiorze) oraz zdarzenie Ω zwane **pewnym** (każdy zbiór jest swoim podzbiorem).

Definicja 6. Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych, a A będzie zdarzeniem, czyli podzbiorem zbioru Ω (co zapisujemy $A \subset \Omega$). Mówimy, że zdarzenie elementarne ω (gdzie $\omega \in \Omega$) **sprzyja** zdarzeniu A, gdy $\omega \in A$.

Ponieważ zdarzenia są podzbiorami pewnego (specjalnego) zbioru Ω, więc na zdarzeniach możemy wykonywać podobne operacje co na zbiorach, choć czasami mają inne nazwy.

$A \cup B$	suma (alternatywa) zdarzeń A i B
$A \cap B$	iloczyn (koniunkcja) zdarzeń A i B
$A \setminus B$	różnica zdarzeń A i B
A'	zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, tzn. $A' = \Omega \setminus A$
$A \subset B$	zdarzenie A pociąga zdarzenie B
$A \cap B = \emptyset$	zdarzenia A i B wykluczają się

Przykład 4. Wróćmy do Przykładu 2. Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na tym, że w trzech rzutach będziemy mieć dokładnie 2 orły;

B - zdarzenie polegające na tym, że za trzecim razem „wypadnie orzeł”;

C - zdarzenie polegające na tym, że za pierwszym i drugim razem ”wypadną reszki” a za trzecim „wypadnie orzeł”.

Tak więc

$A = \{(O, O, R), (O, R, O), (R, O, O)\};$

$B = \{(O, O, O), (O, R, O), (R, O, O), (R, R, O)\};$

$C = \{(R, R, O)\}.$

Stąd mamy

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),\\
&\qquad (R,O,O),(R,R,O)\};\\
A \cap B &= \{(O,R,O),(R,O,O)\};\\
A \setminus B &= \{(O,O,R)\};\\
B \setminus A &= \{(O,O,O),(R,R,O)\};\\
A' &= \{(O,O,O),(O,R,R),(R,O,R),\\
&\qquad (R,R,O),(R,R,R)\}.
\end{aligned}
$$

Ponadto zdarzenia A i C wykluczają się wzajemnie, bo $A \cap C = \emptyset$, natomiast zdarzenie C pociąga zdarzenie B, tzn. $C \subset B$.

Przykład 5. Cztery osoby A, B, C i D rzucają jednocześnie pięcioma kostkami do gry. Rozważmy zdarzenia:
A_i -osoba A wyrzuciła co najmniej i „szóstek”;
B_i -osoba B wyrzuciła co najwyżej i „piątek”;
C_i -osoba C wyrzuciła dokładnie i „czwórek”;
D_i -osoba D wyrzuciła co najmniej i „dwójek” lub co najmniej i „trójek”,
gdzie $i = 0, 1, \ldots, 5$.
Co oznaczają zdarzenia: A'_2; B'_3; C'_1; D'_2; $A_2 \cup A'_3$; $A_1 \cap A'_3$; $B_1 \setminus B_3$; $B'_3 \setminus B_1$.

Rozwiązanie.
A'_2 - osoba A wyrzuciła co najwyżej jedną „szóstkę" (czyli 0 lub 1 „szóstkę");
B'_3 - osoba B wyrzuciła co najmniej 4 „piątki" (czyli 4 lub 5 „piątek");
C'_1 - osoba C wyrzuciła 2, 3, 4 lub 5 „czwórek" lub nie wyrzuciła żadnej „czwórki";
D'_2 - osoba D wyrzuciła co najwyżej jedną „dwójkę" i co najwyżej jedną „trójkę" (czyli 0 lub 1 „dwójkę" i 0 lub 1 „trójkę");

$A_2 \cup A'_3$ - osoba A wyrzuciła co najmniej 2 „szóstek" lub co najwyżej 2 „szóstki" (czyli 0, 1, 2, 3, 4 lub 5 „szóstek" - jest to zdarzenie pewne);
$A_1 \cap A'_3$ - osoba A wyrzuciła co najmniej jedna „szóstka" i co najwyżej 2 „szóstki" (czyli 1 lub 2 „szóstki");
$B_1 \backslash B_3$ - jest to zdarzenie niemożliwe, ponieważ $B_1 \subset B_3$;
$B'_3 \backslash B_1 = B'_3$ - osoba B wyrzuciła co najmniej 4 „piątki".

Zadanie 1. Przy danych z Przykładu 5 określ co oznaczają zdarzenia: $C_2 \setminus C_3'$; $D_1 \cap D_3'$; $(A_1 \setminus A_3') \setminus A_2$; $(B_1 \cup B_3') \cap B_2'$. Wymyśl jeszcze kilka takich zdarzeń i spróbuj określić co one oznaczają.

Przykład 6. Niech A, B i C będą trzema dowolnymi zdarzeniami. Napisać zdarzenia polegające na tym, że:

a) zachodzi tylko A;
b) zachodzi tylko A i B;
c) zachodzą wszystkie zdarzenia;
d) zachodzi przynajmniej jedno z tych zdarzeń;
e) zachodzą przynajmniej dwa zdarzenia;
f) zachodzi dokładnie jedno zdarzenie;
g) zachodzą dokładnie dwa zdarzenia;
h) nie zachodzi ani jedno zdarzenie;
i) zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia.

Rozwiązanie.

Przed przystąpieniem do podania rozwiązań warto uzmysłowić sobie, że jeżeli zdarzenie D nie zachodzi oznacza to, że zachodzi zdarzenie przeciwne, czyli D'.

Ad. a) $A \cap B' \cap C'$;

Ad. b) $A \cap B \cap C'$;

Ad. c) $A \cap B \cap C$

Ad. d) $A \cup B \cup C$;

Ad. e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$;

Ad. f) $(A \cap B' \cap C') \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B' \cap C)$;

Ad. g) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$;

Ad. h) $A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$ (jakie prawo algebry zbiorów lub zdarzeń zostało tutaj wykorzystane?);

Ad. i) oznaczmy przez D - zdarzenie „zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia". Na początek zapiszmy zdarzenie przeciwne, czyli D' - „zachodzą trzy zdarzenia": $D' = A \cap B \cap C$. Korzystając z faktu, że dla każdego zdarzenia (zbioru) D zachodzi równość $D'' = D$ otrzymujemy następujący zapis zdarzenia

$$D = D'' = (A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'.$$

3 Prawdopodobieństwo i jego własności

Matematyczny model doświadczenia losowego to trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zwana **przestrzenią probabilistyczną**, w której

Ω - zbiór zdarzeń elementarnych (o którym mówiliśmy już wcześniej);

$\mathcal{F}$ - zbiór zdarzeń, dla których będzie określona funkcja prawdopodobieństwa. Ponieważ będziemy rozważać tylko skończone zbiory zdarzeń elementarnych, to zawsze będziemy przyjmować, że $\mathcal{F} = 2^\Omega$, czyli $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru Ω. W takim przypadku często pomija się zbiór $\mathcal{F}$ w zapisie przestrzeni probabilistycznej, gdyż jest on jednoznacznie wyznaczony przez Ω;

P - funkcja określona na wszystkich zdarzeniach (z $\mathcal{F}$) o wartościach w $\langle 0, 1\rangle$, którą nazywamy **prawdopodobieństwem**.

Definicja 7. Funkcję $P : 2^{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ (czyli odwzorowanie, które każdemu zdarzeniu A przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą) nazywamy **prawdopodobieństwem**, gdy spełnione są warunki (zwane aksjomatami prawdopodobieństwa):

1. $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \subset \Omega$;
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ dla każdej pary $A, B \subset \Omega$ wykluczających się wzajemnie;
3. $P(\Omega) = 1$.

Liczbę $P(A)$ nazywamy **prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia** A.

Własność 1.

a) $P(\emptyset) = 0$;

b) *dla każdych* $A, B \subset \Omega$ *takich, że* $A \subset B$ *mamy* $P(A) \leqslant P(B)$;

c) *dla każdych* $A, B \subset \Omega$ *takich, że* $A \subset B$ *mamy* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

d) *dla każdego* $A \subset \Omega$ *mamy* $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

e) *dla każdego* $A \subset \Omega$ *mamy* $P(A') = 1 - P(A)$;

f) *dla każdych* $A, B \subset \Omega$ *mamy* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Uwaga! Z Własności 1 d) rzeczywiście wynika, że zbiór wartości funkcji P jest w $\langle 0, 1 \rangle$.

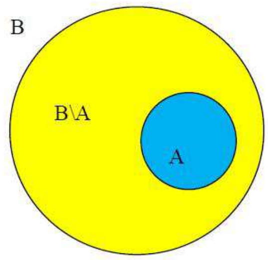
Dowód.
Ad. a) Z własności działań na zdarzeniach (zbiorach) zachodzi równość $A \cup \emptyset = A$ oraz zdarzenia A i $\emptyset$ wykluczają się ($A \cap \emptyset = \emptyset$). Korzystając z warunku 2 z Definicji 7 możemy napisać

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset),$$

co implikuje, że $P(\emptyset) = 0$.

Ad b) i c) Ponieważ $A \subset B$, to zgodnie z własnościami działań na zdarzeniach możemy napisać

$$B = (B \setminus A) \cup A.$$



Ponadto jak łatwo widać, zdarzenia $B \setminus A$ oraz A wykluczają się wzajemnie. Stosując ponownie warunek 2 z Definicji 7 otrzymujemy

$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A). \tag{1}$$

Stąd możemy już napisać

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Z warunku 1 z Definicji 7 mamy

$$P(B \setminus A) \geqslant 0,$$

co w połączeniu z (1) implikuje, że

$$P(B) \geqslant P(A).$$

Ad d) Niech $A \subset \Omega$. Z warunku 1 z Definicji 7 mamy $P(A) \geqslant 0$. Korzystając z udowodnionego wyżej warunku b) oraz warunku 3 z Definicji 7 otrzymujemy

$$P(A) \leqslant P(\Omega) = 1.$$

Ad e) Zauważmy, że $A \cup A' = \Omega$ oraz $A \cap A' = \emptyset$ (czyli zdarzenia A i A' wykluczają się). Stąd i z warunku 2 Definicji 7 mamy

$$P(\Omega) = P(A) + P(A').$$

Korzystając z warunku 3 z Definicji 7 otrzymujemy

$$P(A) + P(A') = 1,$$

czyli

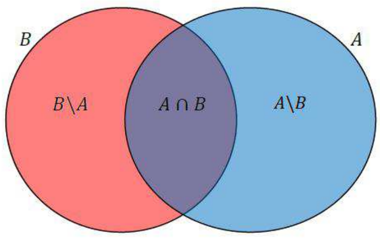
$$P(A') = 1 - P(A).$$

Ad f) Zauważmy, że

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) \quad \text{i} \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset \tag{2}$$

oraz

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \quad \text{i} \quad A \cap B \subset B. \tag{3}$$



Rysunek 1

Z (2) oraz z uwagi na warunek 2 z Definicji 7 mamy

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A). \tag{4}$$

Stosując własność c) do (3) otrzymujemy

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B). \tag{5}$$

Podstawiając (5) do (4) dostajemy ostatecznie

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

□

Przykład 7. Niech $P(A) = \frac{3}{25}$, $P(B') = \frac{7}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{10}$. Obliczyć: $P(A \cap B)$, $P(A \setminus B)$, $P(A' \cap B)$.

Rozwiązanie. Z Własności 1 e) mamy

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

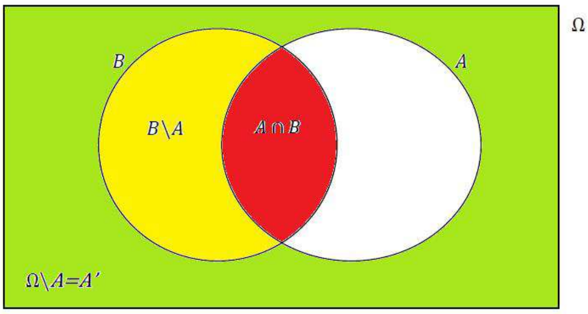
Z Własności 1 f)

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{3}{25} + \frac{3}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6 + 15 - 20}{50} = \frac{1}{50}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ oraz $A \cap B \subset A$ (zob. Rysunek 1). Stąd oraz z Własności 1 c)

$$\begin{aligned} P(A \setminus B) &= P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{25} - \frac{1}{50} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Z uwagi na $A' \cap B = B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ i $A \cap B \subset B$



oraz Własność 1 c) otrzymujemy

$$P(A' \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}.$$

Zadanie 2. Wiadomo, że $P(A') = 0,8$, $P(B') = 0,9$, $P(A \cap B) = 0,05$. Oblicz: $P(A \cup B)$, $P((A \cup B) \setminus A)$, $P(A \cap B')$.

Odp. $P(A \cup B) = 0,25$, $P((A \cup B) \setminus A) = 0,05$, $P(A \cap B') = 0,15$.

4 Prawdopodobieństwo klasyczne

Definicja 8. **Mocą zdarzenia** A nazywamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A. Moc zdarzenia A będziemy oznaczać przez $\overline{\overline{A}}$.

Twierdzenie 6 (o prawdopodobieństwie klasycznym)**.** *Niech Ω będzie zbiorem zdarzeń elementarnych takim, że wszystkie zdarzenia elementarne będą jednakowo prawdopodobne (tzn. prawdopodobieństwo zajścia każdego z tych zdarzeń jest takie samo). Wówczas prawdopodobieństwo zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem*

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}. \tag{6}$$

Wzór (6) nazywany jest **wzorem Laplace'a**.

Przykład 8. Rzucamy jednocześnie dwiema kostkami do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania różnej liczby oczek.

Rozwiązanie.
Ω - zbiór wyników doświadczenia polegającego na jednoczesnym rzucie dwiema kostkami.

Wydaje się naturalnym przyjąć za zbiór zdarzeń elementarnych wszystkie możliwe wyniki jednoczesnego rzutu dwiema nierozróżnialnymi kostkami, czyli

$$\Omega = \{\{a, b\}: \ a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ a \leqslant b\}.$$

Jednakże przy takim doborze zdarzeń elementarnych niektóre z nich są bardziej prawdopodobne niż inne. Tak jest w przypadku zdarzenia elementarnego $\{1, 2\}$, które jest bardziej prawdopodobne niż $\{1, 1\}$. Niestety w tym przypadku założenia Twierdzenia 6 nie są spełnione i nie możemy korzystać ze wzoru (6).

Nic nie stoi na przeszkodzie, abyśmy założyli, że kostki są rozróżnialne. Wówczas zbiór zdarzeń elementarnych możemy zapisać

$$\Omega = \{(a, b) : \; a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Przy założeniu, że doświadczenie jest losowe wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle co wszystkich 2-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, tak więc

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{V}_6^2 = 6^2 = 36.$$

A - zdarzenie polegające na otrzymaniu różnej liczby oczek

$$A = \{(a, b) : \ a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \ a \neq b\}$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest tyle co wszystkich 2-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 6-elementowego, tj.

$$\overline{\overline{A}} = V_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Korzystając ze wzoru (6) mamy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

Odp. Szukane prawdopodobieństwo (otrzymania różnej liczby oczek przy jednoczesnym rzucie dwiema kostkami do gry) wynosi $\frac{5}{6}$.

Przykład 9. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania szóstki w „toto-lotku"?

Uwaga! Losujemy „6 z 49".

Rozwiązanie.

Ω - zbiór wyników doświadczenia polegającego na wylosowaniu sześciu liczb z 49.

W zależności od tego jaką wybierzemy przestrzeń zdarzeń elementarnych (więc i przestrzeń probabilistyczną) możemy nasze zadanie rozwiązać wielorako. Niezależnie jednak od wyboru sposobu rozwiązania wynik powinien być identyczny.

Na potrzeby naszego przykładu przyjmijmy, że liczbami wygrywającymi są: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dlaczego większość grających w „toto-lotka" nigdy nie skreśliłoby takich liczb, choć są one tak samo możliwe jak inna szóstka liczb?

Sposób 1.

Wydaje się naturalnym, aby zbiór zdarzeń elementarnych wyglądał następująco (przyjmujemy, że kolejność losowania nie ma wpływu na wygraną)

$$\Omega = \Big\{ \{a_1, \ldots, a_6\} : \ a_1, \ldots, a_6 \in \{1, \ldots, 49\}, \\ a_1 < a_2 < \ldots < a_6 \Big\}.$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle co wszystkich 6-elementowych kombinacji ze zbioru 49-elementowego, tak więc

$$\overline{\overline{\Omega}} = C_{49}^{6} = \binom{49}{6}.$$

A - wylosowanie liczb wygrywających (w naszym przypadku $1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$A = \Big\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\Big\} \subset \Omega$$

Oczywiście jest tylko jedno zdarzenie elementarne (właśnie $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) sprzyjające zdarzeniu A. Tak więc $\overline{\overline{A}} = 1$.

Zakładając, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), mamy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816}.$$

Sposób 2.

Większość z nas widziała jak wygląda losowanie liczb w „toto-lotku” i wie, że liczby (a w zasadzie kule z liczbami) są losowane po kolei, więc możemy ustawić je w ciąg. W tym przypadku

$$\Omega = \Big\{ (a_1, \dots, a_6) : \ a_1, \dots, a_6 \in \{1, \dots, 49\}, \\ a_1, \dots, a_6 \text{ - różne między sobą} \Big\}.$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle co wszystkich 6-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru 49-elementowego, tak więc

$$\overline{\overline{\Omega}} = V_{49}^{6} = \frac{49!}{(49-6)!} = \frac{49!}{43!}.$$

A - wylosowanie liczb wygrywających (w naszym przypadku $1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$A = \Big\{ (a_1, \dots, a_6) : \ a_1, \dots, a_6 \in \{1, \dots, 6\}, \\ a_1, \dots, a_6 \text{ - różne między sobą} \Big\} \subset \Omega.$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest tyle co wszystkich 6-wyrazowych permutacji, tak więc $\overline{\overline{A}} = P_6 = 6!$.

Zakładając, że wszystkie zdarzenia są jednakowo prawdopodobne, ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6!}{\frac{49!}{43!}} = \frac{1}{\frac{49!}{43! \cdot 6!}} = \frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Zadanie 3. Sześcienną kostkę o krawędzi 4 cm pomalowano na czerwono. Następnie rozcięto ją na 64 sześcienne kostki o krawędzi długości 1 cm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana losowo kostka:

a) będzie miała 3 ściany czerwone;

b) będzie miała 2 ściany czerwone;

c) będzie miała 1 ścianę czerwoną;

d) nie będzie miała ani jednej ściany czerwonej?

Odp.

Ad. a) $\frac{1}{8}$

Ad. b) $\frac{3}{8}$

Ad. c) $\frac{3}{8}$

Ad. d) $\frac{1}{8}$

Przykład 10. Rzucamy pięć razy symetryczną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania:

a) co najmniej raz „szóstki”;

b) dokładnie dwóch „szóstek” lub za każdym razem parzystej liczby oczek.

Rozwiązanie. W obu podpunktach będziemy rozważać taką samą przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Ω - zbiór wyników doświadczenia polegającego na pięciokrotnym rzucie kostką do gry

Wówczas

$\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \ a_1, \ldots, a_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle co wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 6-elementowego, tak więc

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{V}_6^5 = 6^5.$$

Ad. a)

A - zdarzenie polegające na otrzymaniu co najmniej raz „szóstki”

$$\begin{aligned} A = \{ &(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \text{ istnieje } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ &\text{takie, że } a_i = 6, \quad a_1, \ldots, a_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} \end{aligned}$$

Bezpośrednie wyznaczenie mocy zdarzenia A jest czasochłonne, dlatego też policzymy moc zdarzenia przeciwnego do A.

A' - zdarzenie polegające na tym, że nie otrzymamy (ani jednej) „szóstki”

$$A' = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \ a_1, \ldots, a_5 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$$

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A' jest tyle co wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 5-elementowego, tj.

$$\overline{\overline{A'}} = \overline{V}_5^5 = 5^5.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{5^5}{6^5}.$$

Z uwagi na Własność 1 e) możemy napisać

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,598.$$

Ad. b)

B - zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch „szóstek” lub za każdym razem parzystej liczby oczek

„Podzielmy” to zdarzenie na dwa:

C - zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch „szóstek”;
D - zdarzenie polegające na wyrzuceniu za każdym razem parzystej liczby oczek,

a dokładniej $B = C \cup D$.
Ponadto

$$C = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \bigvee_{i_1 \in \{1,\ldots,5\}} \bigvee_{\substack{i_2 \in \{1,\ldots,5\} \\ i_2 \neq i_1}} a_{i_1} = a_{i_2} = 6, \bigwedge_{\substack{j \in \{1,\ldots,5\} \\ j \neq i_1,\ j \neq i_2}} a_j \in \{1,2,3,4,5\} \}$$

(jak widać formalne zapisanie zdarzenia może być bardzo skomplikowane, ale warto próbować) oraz

$$D = \{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \ a_1, \ldots, a_5 \in \{2,4,6\} \}.$$

Aby policzyć ilość wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu C będziemy postępować etapami, tj.:

- wybieramy (dla dwóch „szóstek”) dwa miejsca (w 5-wyrazowym ciągu) z pięciu - co można uzyskać na $C_5^2 = \binom{5}{2}$ sposobów (przy tym wyborze kolejność nie ma znaczenia);
- na pozostałych trzech miejscach musimy wybrać liczby ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ - co można zrobić na $\overline{V}_5^3 = 5^3$ sposobów.

Stosując regułę iloczynu mamy

$$\overline{\overline{C}} = \binom{5}{2} \cdot 5^3 = 10 \cdot 5^3.$$

Natomiast łatwo widać, że

$$\overline{\overline{D}} = \overline{V}_3^5 = 3^5$$

(tyle co wszystkich 5-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 3-elementowego).

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(C) = \frac{\overline{\overline{C}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10 \cdot 5^3}{6^5} \approx 0,16$$

oraz

$$P(D) = \frac{\overline{\overline{D}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{3^5}{6^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0,031.$$

Do wyliczenia $P(B)$ użyjemy Własność 1 f). Jednakże skorzystanie z tej własności wymaga od nas znajomości $P(C \cap D)$, gdzie

$C \cap D$ - zdarzenie polegające na wyrzuceniu dwóch „szóstek" i za każdym razem parzystej liczby oczek

$$C \cap D = \{(a_1, \ldots, a_5) : \bigvee_{i_1 \in \{1,\ldots,5\}} \bigvee_{\substack{i_2 \in \{1,\ldots,5\} \\ i_2 \neq i_1}} a_{i_1} = a_{i_2} = 6, \bigwedge_{\substack{j \in \{1,\ldots,5\} \\ j \neq i_1,\ j \neq i_2}} a_j \in \{2, 4\}\}.$$

Postępując podobnie (dwuetapowo) jak w przypadku obliczania mocy zdarzenia C mamy

$$\overline{\overline{C \cap D}} = \binom{5}{2} \cdot \overline{V}_{2}^{3} = \binom{5}{2} \cdot 2^3 = 10 \cdot 2^3.$$

Stąd

$$P(C \cap D) = \frac{\overline{\overline{C \cap D}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{10 \cdot 2^3}{6^5} \approx 0,01.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} P(B) &= P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \\ &= \frac{10 \cdot 5^3 + 3^5 - 10 \cdot 2^3}{6^5} = \frac{157}{864} \approx 0,182. \end{aligned}$$

Przykład 11. W urnie jest dwa razy więcej kul czarnych niż białych i trzy razy więcej kul zielonych niż białych. Losujemy jednocześnie trzy kule. Wyznaczyć liczbę kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania trzech kul różnych kolorów wynosi $\frac{12}{55}$.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez

x - liczbę kul białych.

Z warunków zadania wynika, że $x \in \mathbb{N}$.
Ponadto mamy:

$2x$ - liczba kul czarnych;
$3x$ - liczba kul zielonych;
$6x$ - liczba wszystkich kul w urnie.

Przyjmijmy, że przez: B, C, Z i U będziemy oznaczać odpowiednio zbiory: wszystkich kul białych, wszystkich kul czarnych, wszystkich kul zielonych i zbiór wszystkich kul w urnie.

Ω - zbiór wszystkich możliwych wyników losowania trzech kul z urny

$$\Omega = \Big\{\{a,b,c\} : \; a,b,c \in U, \; a,b,c \text{ różne między sobą}\Big\}.$$

Jak łatwo widać

$$\overline{\overline{\Omega}} = C_{6x}^{3} = \binom{6x}{3} = \frac{(6x)!}{3! \cdot (6x-3)!} = (6x-2)(6x-1)x$$

(tyle co wszystkich 3-elementowych kombinacji ze zbioru $6x$-elementowego).

A - zdarzenie polegające na wybraniu trzech kul różnych kolorów

$$A = \Big\{\{a, b, c\} : \ a \in B, b \in C, c \in Z\Big\}$$

Korzystając z Twierdzenia 1 mamy

$$\overline{\overline{A}} = x \cdot 2x \cdot 3x = 6x^3$$

(dokonując wyboru etapami: białą kulę możemy wybrać na x sposobów, czarną kulę - na $2x$ sposobów i zieloną kulę - na $3x$ sposobów).

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając z Twierdzenia 6, otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{6x^3}{(6x-2)(6x-1)x} = \frac{6x^2}{(6x-2)(6x-1)}.$$

Z treści zadania mamy dodatkowo, że $P(A) = \frac{12}{55}$, co z uwagi na powyższy warunek implikuje równość

$$\frac{6x^2}{(6x-2)(6x-1)} = \frac{12}{55}$$

lub równoważnie

$$55x^2 = 2(6x-2)(6x-1).$$

Stąd otrzymujemy dwa rozwiązania $x = 2$ lub $x = \frac{2}{17}$ tego równania kwadratowego. Oczywiście rozwiązanie $x = \frac{2}{17}$ nie spełnia warunków zadania, więc ostatecznie możemy powiedzieć, iż mamy 2 kule białe (4 kule czarne i 6 zielonych).

Zadanie 4. Ze zbioru:

a) $\{1, 2, \ldots, 1000\}$;

b) $\{1, 2, \ldots, 1111\}$

wybieramy losowo jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana liczba będzie parzysta lub podzielna przez 5?

Odp.

Ad. a) $\frac{3}{5}$

Ad. b) $\frac{666}{1111}$.

Zadanie 5. Na egzaminie uczeń losuje 5 pytań z zestawu 60 pytań. Jeżeli odpowie na wszystkie 5 pytań otrzyma ocenę bardzo dobrą, jeśli na 4 pytania - dobrą, na 3 pytania - dostateczną, na 2 pytania - dopuszczającą. Obliczyć prawdopodobieństwo, że uczeń otrzyma ocenę:

a) bardzo dobrą;

b) co najmniej dopuszczającą,

jeśli uczeń zna odpowiedź na 40 pytań z zestawu.

Odp.

Ad. a) $\frac{\binom{40}{5}}{\binom{60}{5}}$

Ad. b) $1 - \frac{\binom{20}{5}+40\cdot\binom{20}{4}}{\binom{60}{5}}$.

Przykład 12. Dwanaście osób wsiada „na parterze” do windy, która porusza się między dwunastoma piętrami i parterem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze?

Rozwiązanie. Zauważmy, że przyporządkowując poszczególnym osobom - numer piętra, na którym wysiadają, określamy funkcję (ponieważ osoba może wysiąść tylko na jednym piętrze). Przyporządkowanie piętrom - osoby nie jest jednoznaczne (bo na każdym piętrze może wysiąść dowolna osoba), więc nie jest to funkcja. Przyjmijmy, że osoby oznaczymy liczbami arabskimi $1, 2, \ldots, 12$, a piętra rzymskimi I, II, ..., XII. W związku z przyjętymi oznaczeniami przyporządkowanie osobom - pięter jest funkcją określoną na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 12\}$ o wartościach w {I, II,..., XII}, którą możemy rozumieć jako 12-wyrazowy ciąg o wartościach z {I, II,..., XII}.

Ω - zbiór wszystkich przyporządkowań 12 osobom - 12 pięter

$$\Omega = \Big\{(a_1, \ldots, a_{12}) : a_1, \ldots, a_{12} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, \mathrm{XII}\}\Big\},$$

gdzie a_1 oznacza piętro, na którym wysiądzie pierwsza osoba, a_2 - piętro, na którym wysiądzie druga osoba itd. Łatwo widać

$$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{V}_{12}^{12} = 12^{12}$$

(tyle co wszystkich 12-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru 12-elementowego).

A - zdarzenie polegające na tym, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze

$$A = \{\ (a_1, \ldots, a_{12}) : a_1, \ldots, a_{12} \in \{\text{I, II}, \ldots, \text{XII}\},$$
$$a_1, \ldots, a_{12} \text{ - różne między sobą}\}.$$

Wówczas

$$\overline{\overline{A}} = P_{12} = 12!$$

(tyle co wszystkich 12-wyrazowych permutacji).

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne i korzystając ze wzoru (6) otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,000054.$$

Zadanie 6. Rozwiąż zadanie z Przykładu 12, gdy założymy, że do windy wsiądzie tylko osiem osób.

Odp. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{12!}{4! \cdot 12^8}$.

Przykład 13. Klasa licząca 29 uczniów udała się do kina. Ponieważ dzieci nie miały biletów ustawiły się w pojedynczej kolejce do kasy, przy czym ustawienie miało charakter losowy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A - między dwojgiem ustalonych dzieci stanęło w kolejce dziesięcioro innych.

Rozwiązanie.
Ω - zbiór ustawień uczniów w kolejce (przyjmujemy, że uczniów będziemy oznaczać liczbami od 1 do 29)

$$\Omega = \{ (a_1, \ldots, a_{29}) : \ a_1, \ldots, a_{29} \in \{1, \ldots, 29\}, \\ a_1, \ldots, a_{29} \text{ - różne między sobą}\}.$$

Jak łatwo widać

$$\overline{\overline{\Omega}} = P_{29} = 29!$$

(tyle co wszystkich 29-wyrazowych permutacji).

Przejdźmy teraz do zdarzenia A i przyjmijmy, że dwoje ustalonych uczniów to uczniowie 1 i 2. Na początek musimy ustawić uczniów 1 i 2; mamy następujące możliwości:

$$\underline{1}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{10\text{ uczniów}}\ \ \underline{2}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{17\text{ uczniów}} \quad \text{albo} \quad \underline{2}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{10\text{ uczniów}}\ \ \underline{1}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{17\text{ uczniów}}$$

$$\_\ \underline{1}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{10\text{ uczniów}}\ \ \underline{2}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{16\text{ uczniów}} \quad \text{albo} \quad \_\ \underline{2}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{10\text{ uczniów}}\ \ \underline{1}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{16\text{ uczniów}}$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\_\ldots\_}_{17\text{ uczniów}}\ \ \underline{1}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{10\text{ uczniów}}\ \ \underline{2} \quad \text{albo} \quad \underbrace{\_\ldots\_}_{17\text{ uczniów}}\ \ \underline{2}\ \ \underbrace{\_\ldots\_}_{10\text{ uczniów}}\ \ \underline{1}$$

Jak widać z przedstawionego wyżej modelu uczniów 1 i 2 możemy ustawić na $18 \cdot 2 = 36$ sposobów.

Gdy ustaliliśmy miejsca dla uczniów 1 i 2, to musimy jeszcze (na pozostałych 27 miejscach) ustawić pozostałych 27 uczniów. Takich ustawień można dokonać na $P_{27} = 27!$ sposobów.

Korzystając z reguły iloczynu mamy

$$\overline{\overline{A}} = 36 \cdot 27!.$$

Zakładając, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, korzystając ze wzoru (6), otrzymujemy

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{36 \cdot 27!}{29!} = \frac{36}{28 \cdot 29} = \frac{9}{203} \approx 0,044.$$

Teraz spróbuj samemu rozwiązać zadanie.

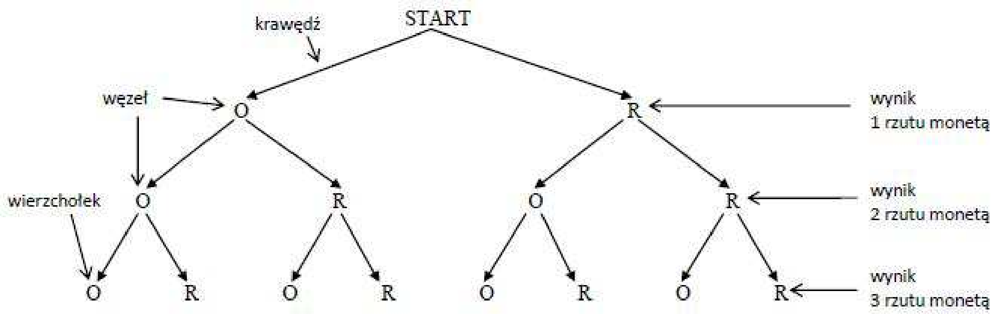
Zadanie 7. Przy okrągłym stole posadzono 17 osób, wśród których są Ania i Darek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Ania i Darek będą siedzieć obok siebie (przyjmij, że wśród 17 osób jest tylko jedna Ania i jeden Darek)?

Odp. Szukane pradopodobieństwo wynosi $\frac{1}{8}$.

5 Doświadczenia wieloetapowe

Wśród doświadczeń losowych często spotykamy się z tzw. **doświadczeniami wieloetapowymi**. To znaczy, podobnie jak w przypadku kombinatorycznej reguły iloczynu (zob. Twierdzenie 1), można dane doświadczenie podzielić na kilka etapów. Doświadczenia z Przykładów 2 i 3 są właśnie doświadczeniami wieloetapowymi. Innymi przykładami takich doświadczeń są: ciągnięcie kart z talii, wielokrotne losowanie kul z urny itd. Do graficznego przedstawienia takiego typu doświadczeń używamy **„drzewka”**.

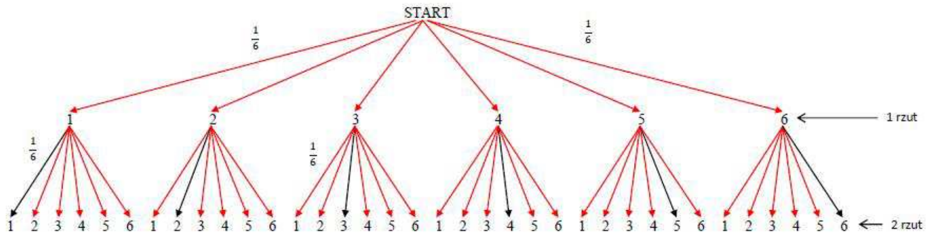
Przykład 14. Rozważmy doświadczenie z Przykładu 2 i spróbujemy na tym przykładzie pokazać jak narysować „drzewko".



Każde drzewko zaczynamy od punktu „START". Wyniki kolejnych etapów doświadczenia umieszczane są w **węzłach** drzewka. Strzałki łączące dwa kolejne węzły, to **krawędzie**. Ostatni końcowy węzeł, to **wierzchołek**. Każda krawędź drzewa odpowiada innemu wynikowi jednoetapowego doświadczenia. Dowolny ciąg krawędzi łączący początek drzewka („START") z wierzchołkiem nazywamy **gałęzią** drzewka. Biorąc pod uwagę wszystkie gałęzie otrzymamy zbiór zdarzeń elementarnych.

Przy wyznaczaniu prawdopodobieństw zdarzeń w doświadczeniach wieloetapowych często korzysta się z **metody drzewka**.

Przykład 15. Rozwiązać Przykład 8 z wykorzystaniem „metody drzewka”.

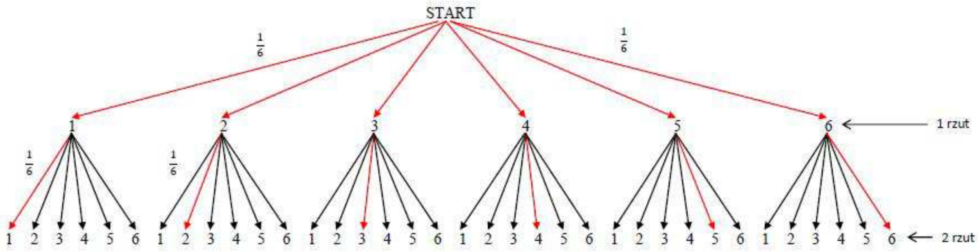


Każdej krawędzi przypisujemy prawdopodobieństwo wyniku (jednoetapowego doświadczenia). W naszym przypadku każde z tych prawdopodobieństw wynosi $\frac{1}{6}$ (jest to wynik uzyskania konkretnej liczby oczek, np. 3, w rzucie kostką). Zauważ, że suma prawdopodobieństw „na krawędziach” wychodzących z jednego węzła wynosi 1 (powinno tak być zawsze).

Pamiętając, że gałęzie odzwierciedlają nam zdarzenia elementarne, na czerwono zaznaczone zostały te gałęzie, które odpowiadają zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A (w naszym przypadku jest ich aż 30). Aby wyliczyć $P(A)$ musimy policzyć prawdopodobieństwa odpowiadające każdej gałęzi poprzez pomnożenie prawdopodobieństw z jej krawędzi (w tym przypadku na każdej krawędzi mamy to samo prawdopodobieństwo $\frac{1}{6}$), czyli $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, a następnie dodać prawdopodobieństwa z tych gałęzi, które odpowiadają zdarzeniom sprzyjającym A (w naszym przykładzie 30 razy dodajemy $\frac{1}{36}$). W ten sposób otrzymujemy $P(A) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$ (a wynik wyszedł ten sam co wcześniej).

Ten sam wynik otrzymamy, gdy wykorzystamy wzór na prawdopodobieństwo przeciwne.

A' - zdarzenie polegające na otrzymaniu tej samej liczby oczek



$$P(A') = \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}_{6 \text{ razy}} = \frac{1}{6}.$$

Stąd

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Przykład 16. W pewnej szkole są trzy klasy trzecie (III a, III b i III c). W klasie III a jest 15 dziewczynek i 15 chłopców, w III b - 13 dziewczynek i 12 chłopców, w III c - 12 dziewczynek i 14 chłopców. Firma „ABC" postanowiła ufundować stypendium jednemu z uczniów trzeciej klasy tej szkoły. Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) stypendium otrzyma dziewczynka z klasy III b;

b) stypendium otrzyma chłopiec (z dowolnej klasy);

c) stypendium otrzyma chłopiec z III a lub dziewczynka z III c,

jeżeli wybór ucznia dokonujemy w dwóch etapach: na początku losowo wybieramy klasę, a następnie ucznia z tej klasy.

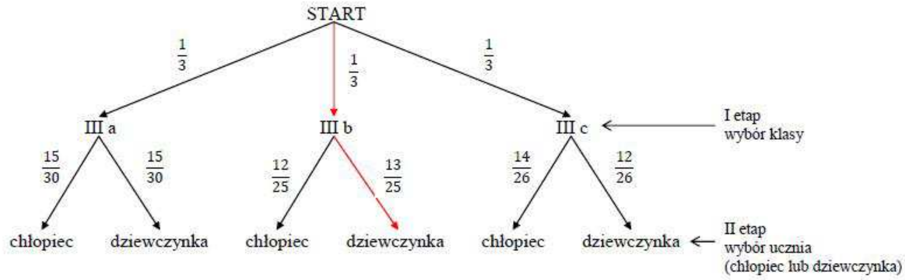
Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy „metodą drzewka”.

Oznaczmy przez:

A - zdarzenie polegające na tym, że stypendium otrzyma dziewczynka z klasy III b;
B - zdarzenie polegające na tym, że stypendium otrzyma chłopiec;
C - zdarzenie polegające na tym, że stypendium otrzyma chłopiec z III a lub dziewczynka z III c.

Z uwagi na losowość wyboru klasy, prawdopodobieństwo wybrania każdej z klas jest takie samo i wynosi $\frac{1}{3}$.

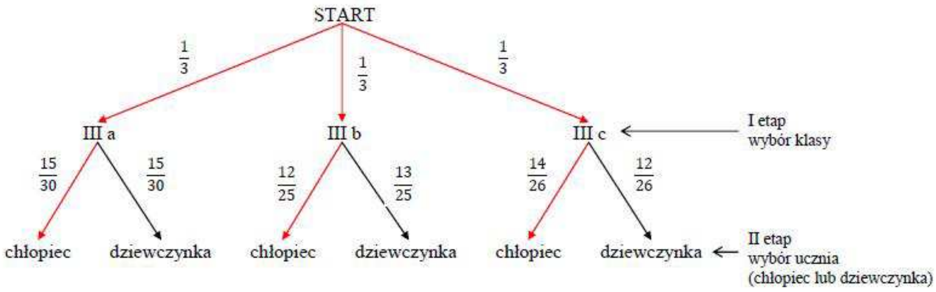
Ad. a)



Tak więc

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{25} = \frac{13}{75}.$$

Ad. b)



Tak więc

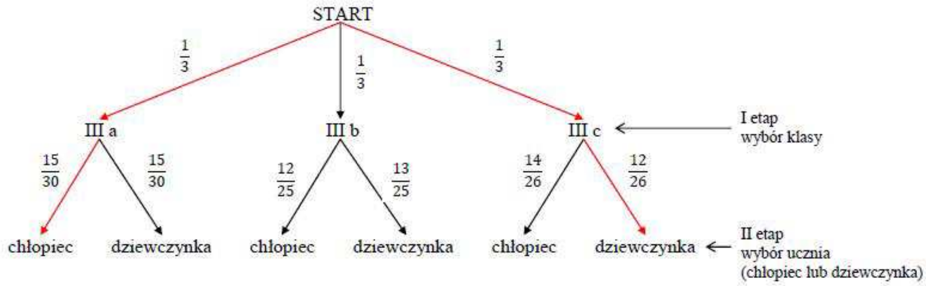
$$P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{30} + \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{25} + \frac{1}{3}\cdot\frac{14}{26}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{12}{25} + \frac{7}{13}\right) = \frac{329}{650} \approx 0,50615.$$

Jeżeli zdecydowalibyśmy się na bezpośredni (w jednym etapie) wybór ucznia spośród wszystkich 81 uczniów klas trzecich (bez wybierania klasy), to prawdopodobieństwo zdarzenia „stypendium otrzyma chłopiec”, wynosiłoby $\frac{41}{81} \approx 0,50617$ (bo wszystkich chłopców jest 41). Jak widać w tym przypadku prawdopodobieństwo otrzymania stypendium przez chłopca jest większe (choć różnica jest niewielka) niż w przypadku dwuetapowego wyboru ucznia.

Zauważ, że podobne zjawisko występuje w przypadku podpunktów a) i c).

Ad. c)



Tak więc

$$P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{26} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{6}{13}\right) = \frac{25}{78}.$$

Zadanie 8. Na wybiegu w ogrodzie zoologicznym znajduje się: 7 antylop, 5 żyraf, 9 flamingów i 4 łabędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:

a) wśród dwóch wybranych zwierząt będą oba jednego gatunku;

b) dwa losowo wybrane zwierzęta są z tej samej gromady (czyli albo z gromady ssaków albo z gromady ptaków).

Odp.

Ad. a) $\frac{73}{300}$

Ad. b) $\frac{12}{25}$.

6 Statystyka

Statystyka jest nauką, której głównym celem jest określenie w jaki sposób należy zbierać dane, jak później je opracować, aby w konsekwencji uzyskać z nich wiarygodne i miarodajne wnioski. Zwykle tak bywa w statystyce, że zbieramy informacje (dane) dotyczące tylko reprezentantów pewnej większej grupy (populacji), a wnioski chcemy otrzymać dla całej populacji.

Jak zwykle na początku podamy trochę teorii.

Definicja 9.

- **Populacją** lub **zbiorowością statystyczną** nazywamy zbiór elementów (osób, przedmiotów, zjawisk itp.) mających jedną (lub więcej) wspólną własność zwaną **cechą statystyczną**.
- Elementy populacji nazywamy **jednostkami statystycznymi**.
- **Próbą statystyczną** nazywamy każdy podzbiór populacji.

Przykład 17. Zobaczmy przykłady powyższych pojęć.

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna w próbie	Cecha
Osoby mieszkające w Polsce	Osoby mieszkające w Rzeszowie	Mieszkaniec Rzeszowa	- wzrost - waga - zarobki

Może się tak zdarzyć, że próba w jednym badaniu w innym jest populacją.

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna w próbie	Cecha
Osoby mieszkające w Rzeszowie	Mieszkańcy Rzeszowa w wieku 30-50 lat	Mieszkaniec Rzeszowa w wieku 30-50 lat	- płeć - przebyta choroba nowotworowa

Jak widać w powyższym przykładzie cecha nie musi mieć charakter ilościowy (czyli, jej wynik nie musi być wyrażony liczbowo).

Inny przykład.

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna w próbie	Cecha
Słonie	Słonie w ZOO w Polsce	Słoń z ZOO w Polsce	- stan uzębienia - ilość wychowanego potomstwa

Próby statystyczne możemy podzielić na: **próby losowe** (gdy jednostki statystyczne są dobierane zupełnie losowo - przypadkowo) lub **próby nielosowe** (gdy wybór elementów próby jest celowy - nieprzypadkowy).

Do przeprowadzenia badań statystycznych potrzebujemy **danych statystycznych**, czyli wyników (ilościowych lub nie) odzwierciedlających badaną cechę w populacji lub próbie.

Przykład 18. W pewnym zakładzie produkowane są śruby. Z partii wyprodukowanych śrub wybrano losowo 50 w celu zbadania zgodności ich długości z normą. Otrzymano wyniki w cm: 3,6; 5,0; 4,0; 4,7; 5,2; 5,9; 4,5; 5,3; 5,5; 3,9; 5,6; 3,5; 5,4; 5,2; 4,1; 5,0; 3,1; 5,8; 4,8; 4,4; 4,6; 5,1; 4,7; 3,0; 5,5; 6,1; 3,8; 4,9; 5,6; 6,1; 5,9; 4,2; 6,4; 5,3; 4,5; 4,9; 4,0; 5,2; 3,3; 5,4; 4,7; 6,4; 5,1; 3,4; 5,2; 6,2; 4,4; 4,3; 5,8; 3,7.

W tym przypadku mamy

Populacja	Próba	Jednostka statystyczna	Cecha
Śruby z danej partii	50 śrub z tej partii	Pojedyncza śruba	Długość śruby

Niestety zapis danych przedstawiony w treści przykładu jest mało czytelny. Dlatego ustawmy wyniki od najmniejszego do największego

3,0; 3,1; 3,3; 3,4; 3,5; 3,6; 3,7; 3,8; 3,9; 4,0; 4,0; 4,1; 4,2; 4,3; 4,4; 4,4; 4,5; 4,5; 4,6; 4,7; 4,7; 4,7; 4,8; 4,9; 4,9; 5,0; 5,0; 5,1; 5,1; 5,2; 5,2; 5,2; 5,2; 5,3; 5,3; 5,4; 5,4; 5,5; 5,5; 5,6; 5,6; 5,8; 5,8; 5,9; 5,9; 6,1; 6,1; 6,2; 6,4; 6,4.

Nawet uporządkowane dane mogą być mało czytelne (zwłaszcza jak jest ich bardzo dużo). Dla uproszczenia możemy przedstawić wyniki za pomocą **szeregu rozdzielczego**, który składa się z dwóch wierszy: pierwszy podaje wariant badanej cechy, a drugi - **liczebność** lub inaczej **częstość** (czyli ilość wyników mających podany wariant cechy).

W tym przypadku szereg rozdzielczy może wyglądać następująco

Wariant badanej cechy	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2
Liczebność	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1

4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1	5,2
1	2	2	1	3	1	2	2	2	4

5,3	5,4	5,5	5,6	5,8	5,9	6,1	6,2	6,4
2	2	2	2	2	2	2	1	2

Graficznie przedstawiamy szereg rozdzielczy za pomocą **diagramów**.

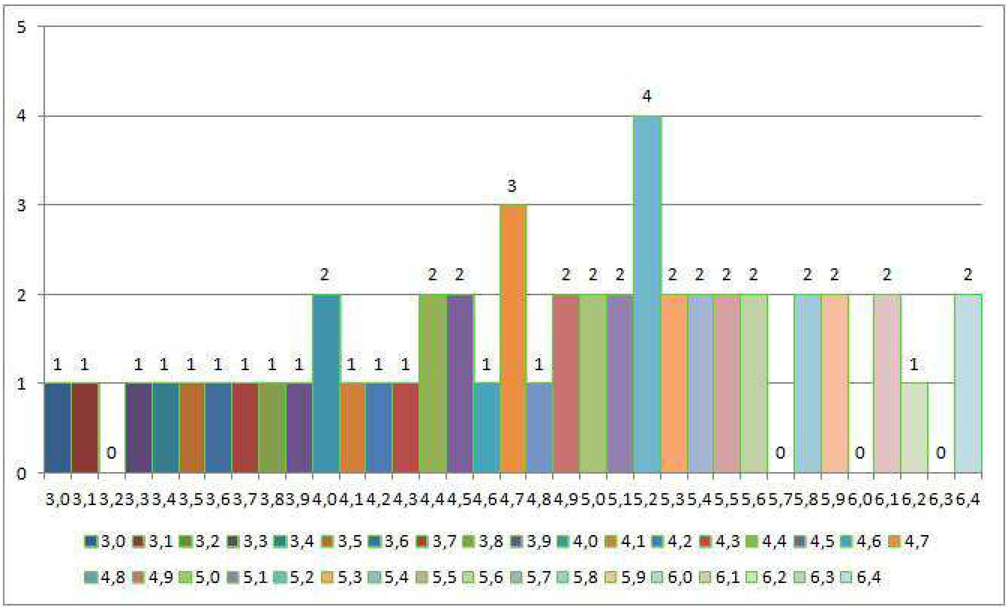
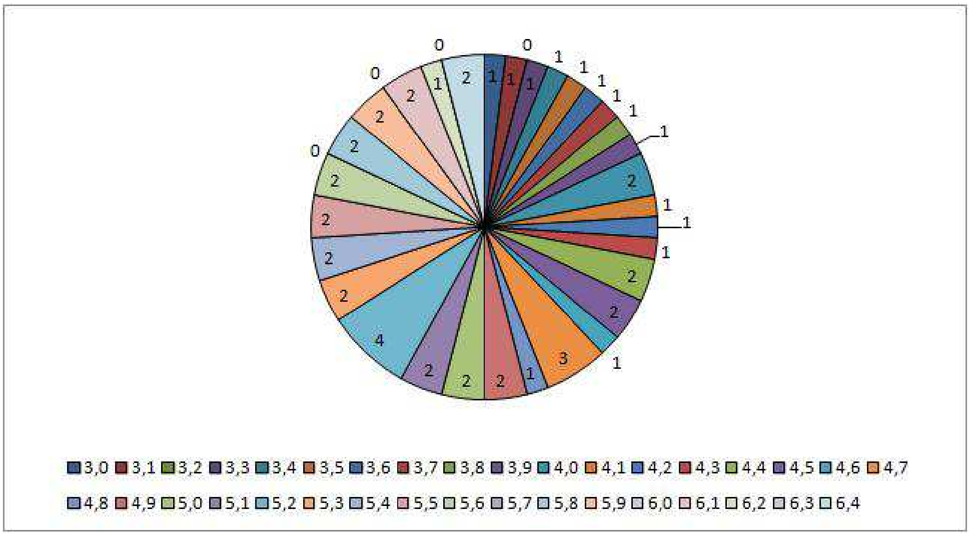
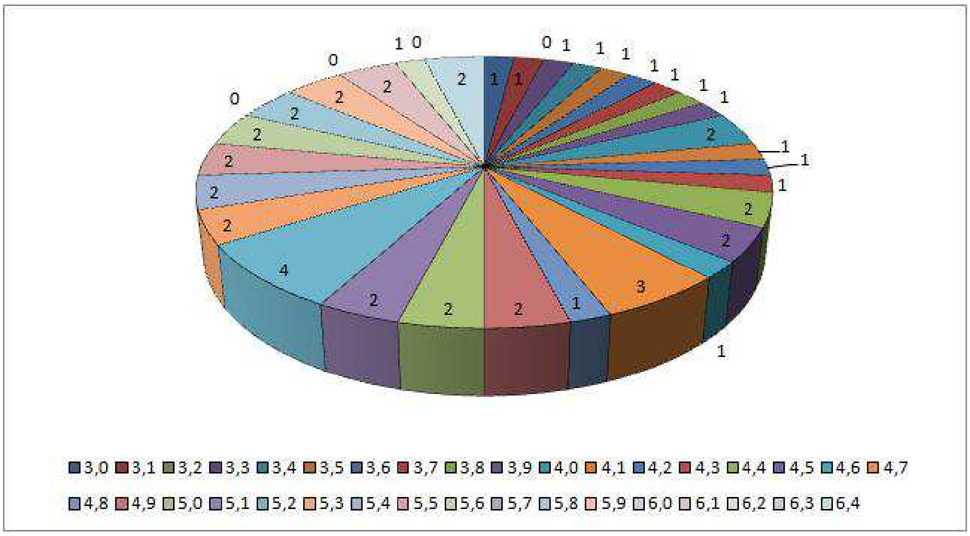


Diagram słupkowy - histogram





Diagramy kołowe

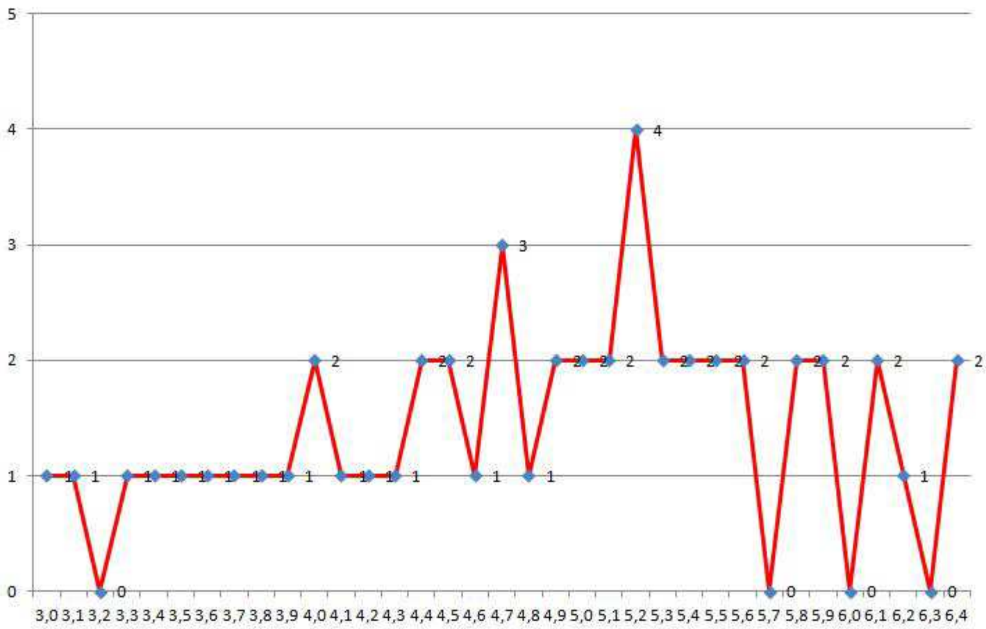


Diagram liniowy

W przypadku szeregów rozdzielczych można określić **częstość względną**, czyli iloraz występowania danej wartości cechy przez liczbę wszystkich wyników. Częstość względna jest statystycznym odpowiednikiem prawdopodobieństwa w rachunku prawdopodobieństwa.

Wariant badanej cechy	3,0	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
Częstość względna	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$

4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$

5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,8	5,9	6,1	6,2	6,4
$\frac{4}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{2}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{2}{50}$

Do porównywania elementów populacji lub całych populacji służą parametry.

Do pierwszej grupy parametrów, które mówią nam o podobieństwie jednostek populacji, zaliczamy m.in.: średnią arytmetyczną, medianę, dominantę i średnią ważoną.

Definicja 10. Przez **średnią arytmetyczną** liczb $x_1, \ldots, x_n$ rozumiemy wartość liczbową wyrażenia

$$\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}.$$

Przykład 19. Zapytano pięć kobiet o ich wiek i uzyskano wyniki: 30, 44, 66, 22, 83. Obliczyć średni wiek tych pań.

Rozwiązanie. Badaną cechą jest wiek kobiet. Wartości cechy (wieku) wynoszą odpowiednio

$$x_1 = 30,\ x_2 = 44,\ x_3 = 66,\ x_4 = 22,\ x_5 = 83 \text{ lat.}$$

Średni wiek tych pań wynosi

$$\overline{x} = \frac{30 + 44 + 66 + 22 + 83}{5} = 49 \text{ lat.}$$

Definicja 11. **Medianą** (**wartością środkową**) nazywamy liczbę dzielącą populację (lub elementy próby) na dwie części takie, że połowa jednostek statystycznych ma wartość cechy nie większą od mediany, a połowa ma wartość nie mniejszą od mediany.

Aby wyliczyć medianę musimy dane uporządkować od wartości najmniejszej do największej. Przypuśćmy, że już mamy takie uporządkowanie

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Wówczas medianę wyznaczamy ze wzoru

$$M = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste;} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right), & \text{gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Przykład 20. Rozpatrzmy dane z Przykładu 19. Ustawiamy dane od najmniejszej do największej wartości

$$x_1 = 22,\ x_2 = 30,\ x_3 = 44,\ x_4 = 66,\ x_5 = 83 \text{ lat.}$$

W tym przypadku $n = 5$, więc mediana jest równa $x_3 = 44$ lata.

Jeżeli zapytamy dodatkowo jeszcze jedną panią o wiek (uzyskana dana to 36 lat), to ciąg rosnący danych wygląda następująco

$x_1 = 22,\ x_2 = 30,\ x_3 = 36,\ x_4 = 44,\ x_5 = 66,\ x_6 = 83.$

W tym przypadku $n = 6$, a mediana jest równa

$$\frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{36 + 44}{2} = 40 \text{ lat.}$$

Definicja 12. **Dominantą** (**wartością modalną**, **modą**) nazywamy wartość, która występuje wśród danych najczęściej.

Jeżeli w zbiorze danych kilka liczb występuje z tą samą najwyższą częstością, to każda z tych liczb jest dominantą.

Jeżeli jednak wszystkie liczby występują tak samo często, to nie mamy dominanty wśród tych danych.

Przykład 21.

- w przypadku danych z Przykładów 19 i 20 nie mamy dominanty;
- dla danych: $1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4$ dominanta $D = 4$;
- dla danych: $1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5$ dominanta $D \in \{2, 4, 5\}$, czyli mamy trzy mody: 2, 4 i 5.

Średnią arytmetyczną używamy do scharakteryzowania pewnej cechy populacji (lub próby) w przypadku, gdy wszystkie wyniki (jakie posiadamy) cechy są tak samo ważne. Zdarza się jednak, że pewne wyniki mogą mieć większą wagę (ważność) od innych wyników. „Przewagę" jednych wyników nad innymi zaznacza się za pomocą przypisanej im „wagi" (zob. Przykład 22). W takich przypadkach zamiast średniej arytmetycznej określa się średnią ważoną.

Definicja 13. **Średnią ważoną** liczb $x_1, \ldots, x_n$ z dodatnimi wagami $a_1, \ldots, a_n$ określamy wzorem

$$\hat{x} = \frac{x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n}{a_1 + \ldots + a_n}.$$

Przykład 22. Regulamin rekrutacji na studia matematyczne na Uniwersytecie X przewiduje, że o przyjęciu na nie decyduje ranking sporządzony na podstawie średniej ważonej ocen na świadectwie maturalnym z pięciu przedmiotów:

- matematyki - z wagą 4;
- fizyki i informatyki - z wagą 3;
- języka angielskiego - z wagą 2;
- języka polskiego - z wagą 1.

Ustal, która spośród osób (Adam, Bartek, Kinga, Ola) zajmie najwyższe, a która najniższe miejsce na liście rankingowej, jeżeli ich oceny są takie jak w tabelce

Przedmiot	Ocena			
	Adam	Bartek	Kinga	Ola
matematyka	6	3	6	3
fizyka	3	4	5	3
informatyka	6	4	5	4
język angielski	3	6	3	6
język polski	4	5	3	6

Rozwiązanie. Zauważmy, że każdy z uczniów ma tą samą średnią arytmetyczną ocen $4,4$. Natomiast średnie ważone kształtują się następująco

- Adam: $\frac{6\cdot4+3\cdot3+6\cdot3+3\cdot2+4\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{61}{13} \approx 4,69$;
- Bartek: $\frac{3\cdot4+4\cdot3+4\cdot3+6\cdot2+5\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{53}{13} \approx 4,08$;
- Kinga: $\frac{6\cdot4+5\cdot3+5\cdot3+3\cdot2+3\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{63}{13} \approx 4,85$;
- Ola: $\frac{3\cdot4+3\cdot3+4\cdot3+6\cdot2+6\cdot1}{4+3+3+2+1} = \frac{51}{13} \approx 3,92$.

Przykład 23. Oblicz średnią arytmetyczną liczb

$$1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8.$$

Powinno wyjść $\overline{x} = 5,3$.

Następnie tworzymy (z podanych wyników) szereg rozdzielczy

Liczba	1	3	5	6	7	8
Liczebność	2	4	4	1	6	3

Traktując liczebność (częstość występowania) liczb jako wagi policzmy średnia ważoną tych danych

$$\hat{x} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 3}{20} = 5,3.$$

Jak widać obie średnie są równe, dlatego też w niektórych podręcznikach średnia ważona nazywana jest **średnią arytmetyczną ważoną**.

My pojęcie średniej arytmetycznej ważonej będziemy używać tylko w stosunku do szeregów rozdzielczych.

Znajomość „parametrów podobieństw” nie wystarcza do otrzymania pełnego obrazu badanej próby lub populacji. Przykładowo znajomość średniej arytmetycznej nie mówi nam nic o tym, czy wyniki skupiają się wokół niej, czy są bardziej rozproszone. Standardowym przykładem jest wysokość średniego wynagrodzenia w Polsce, które (jak dobrze wiemy) zdecydowana większość osób nie jest w stanie osiągnąć. W tym przypadku na wysokość średnich zarobków wpływają bardzo wysokie pensje, nielicznej grupy, osób „dobrze zarabiających”.

Drugą grupą parametrów, którą będziemy rozważać są tzw. **miary rozproszenia**, które (poprawnie interpretowane) podają nam informacje o rozrzucie wyników od średniej.

Do tej grupy parametrów zaliczamy m.in.: rozstęp, wariancję i odchylenie standardowe.

Definicja 14. Przez **rozstęp** liczb $x_1, \dots, x_n$ rozumiemy wartość liczbową wyrażenia

$$R = x_{\text{max}} - x_{\text{min}},$$

gdzie x_{max} i x_{min} są odpowiednio największą i najmniejszą liczbą spośród $x_1, \dots, x_n$.

Definicja 15. **Wariancję** liczb $x_1, \ldots, x_n$ określamy wzorem

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n},$$

gdzie $\overline{x}$ jest średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

Wariancja jest miarą rozproszenia podawaną w kwadratach jednostek badanej cechy. W wielu przypadkach wygodniej jest podawać miarę rozproszenia w jednostkach, w których wyrażone są wyniki badanej cechy. Takim parametrem jest odchylenie standardowe.

Definicja 16. Przez **odchylenie standardowe** liczb $x_1, \ldots, x_n$ rozumiemy wartość liczbową wyrażenia

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}}.$$

Przykład 24. Dla danych z Przykładu 19 obliczyć podane wyżej miary rozproszenia.

Rozwiązanie. Łatwo widać, że $x_{\text{min}} = 22$, $x_{\text{max}} = 83$. Wówczas:

• rozstęp: $R = 83 - 22 = 61$;

• wariancja:

$$S^2 = \frac{L}{5} = \frac{2560}{5} = 512,$$

gdzie $L = (30-49)^2 + (44-49)^2 + (66-49)^2 + (22-49)^2 + (83-49)^2$;

• odchylenie standardowe: $S = \sqrt{512} \approx 22,63$.

Warto pamiętać, że im niższe wartości miar rozproszenia tym skupienie wyników wokół średniej jest większe.

Wszystkie rozważane wyżej miary rozproszenia zawsze przyjmują wartości nieujemne i tylko w przypadku, gdy wszystkie dane (liczby) są sobie równe; rozstęp, wariancja i odchylenie standardowe wynosi 0.

Przykład 25. Rozważmy dane z Przykładu 23, czyli liczby

$$1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8.$$

Wówczas: $R = 7$, $S^2 = 4,91$ oraz $S = \sqrt{4,91} \approx 2,22$ (sprawdź!).

Z powyższych danych możemy utworzyć szereg rozdzielczy

Liczba	1	3	5	6	7	8
Liczebność	2	4	4	1	6	3

Jak policzyć z takiego szeregu, rozważane wyżej, miary rozproszenia?

Rozstęp wyznaczamy podobnie jak wcześniej

$$R = 8 - 1 = 7.$$

Aby obliczyć wariancję wystarczy, że znamy średnią arytmetyczną ważoną $\hat{x} = \overline{x} = 5,3$. Wówczas

$$S^2 = \frac{L}{2+4+4+1+6+3} = 4,91,$$

gdzie $L = (1-5,3)^2 \cdot 2 + (3-5,3)^2 \cdot 4 + (5-5,3)^2 \cdot 4 + (6-5,3)^2 \cdot 1 + (7-5,3)^2 \cdot 6 + (8-5,3)^2 \cdot 3$.

Oczywiście $S = \sqrt{S^2} \approx 2,22$.

Otrzymane wyniki dla powyższego szeregu rozdzielczego są identyczne z tymi dla danych podanych w treści przykładu.

Zadanie 9. Dokonano 10 pomiarów długości życia pewnych bakterii w organizmie człowieka i otrzymano następujące wyniki w *godz.*: 1,56; 1,55; 1,50; 1,46; 1,56; 1,51; 1,49; 1,49; 1,40; 1,49.
Oblicz:

a) średnią długość życia tych bakterii;
b) modę, medianę i rozstęp otrzymanych wyników;
c) wariancję i odchylenie standardowe czasu życia badanych bakterii.

Zbuduj szereg rozdzielczy dla podanych danych. Dla tak wyznaczonego szeregu oblicz częstość względną oraz narysuj diagram słupkowy, kołowy i liniowy.

Odp.

Ad. a) $\overline{x} = 1,501$;

Ad. b) $D = 1,49$; $M = 1,495$; $R = 0,16$;

Ad. c) $S^2 = 0,002169$; $S = \sqrt{S^2} \approx 0,047$.

Szereg rozdzielczy

Czas życia	1,40	1,46	1,49	1,50	1,51	1,55	1,56
Liczebność	1	1	3	1	1	1	2

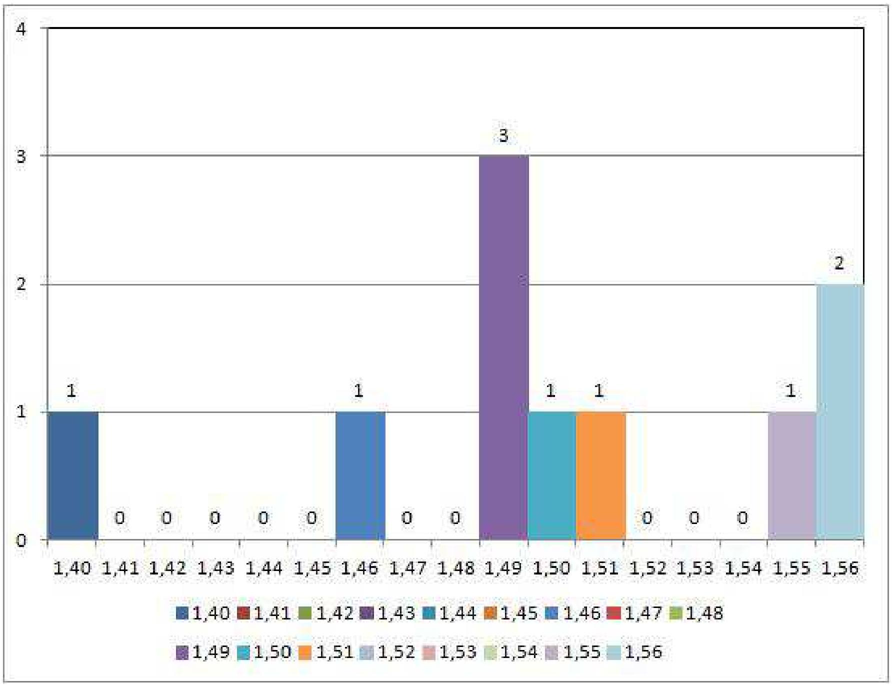


Diagram słupkowy - histogram

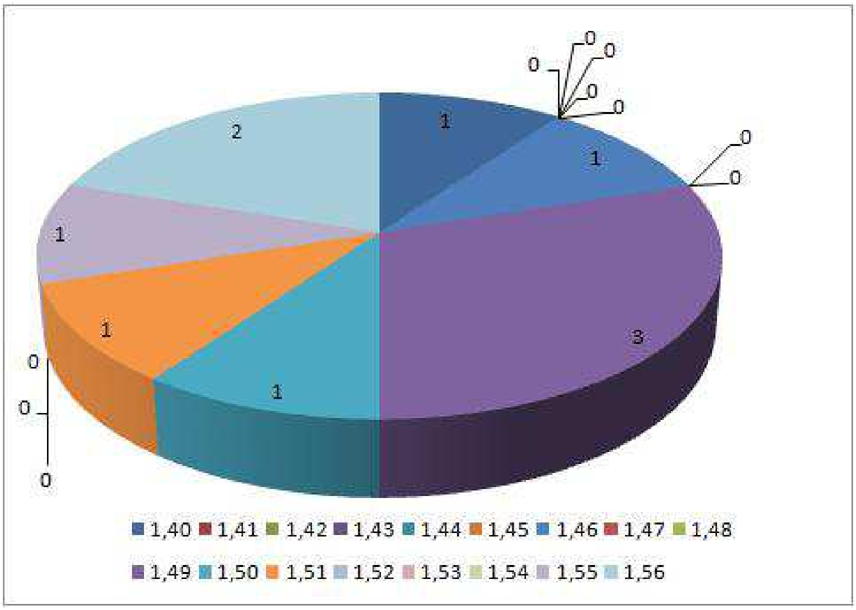


Diagram kołowy

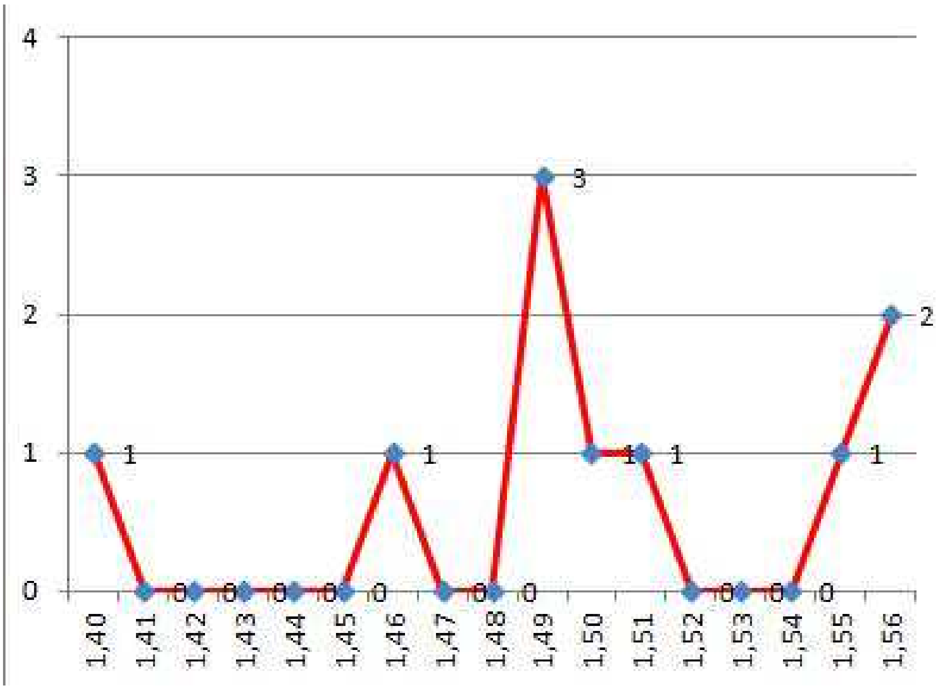


Diagram liniowy

Zadanie 10. Dla danych z Przykładu 18 wyznaczyć poznane wcześniej parametry.

Dla porównania zamieszczamy poniżej fragment arkusza programu EXCEL, w którym znajdziesz wyniki szukanych parametrów. Odnajdź, w tym arkuszu, formuły ułatwiające wyliczenie (za pomocą EXCEL-a) rozważanych parametrów i spróbuj je wykorzystać do innego przykładu.

	A	B	C	D
1	Dane			
2	3,6			
3	5		Średnia arytmetyczna	4,844
4	4		Mediana	4,95
5	4,7		Dominanta	5,2
6	5,2		Minimum	3
7	5,9		Maksimum	6,4
8	4,5		Rozstęp	3,4
9	5,3		Wariancja	0,772464
10	5,5		Odchylenie standardowe	0,878899
11	3,9			
12	5,6			
13	3,5			

D3: =ŚREDNIA(A2:A51)
D4: =MEDIANA(A2:A51)
D5: =WYST.NAJCZĘŚCIEJ(A2:A51)
D6: =MIN(A2:A51)
D7: =MAX(A2:A51)
D8: =D7-D6
D9: =WARIANCJA.POPUL(A2:A51)
D10: =ODCH.STANDARD.POPUL(A2:A51)

Literatura

[1] W. Babiański, L. Chańko, J. Czarnowska, J. Wesołowska, *Matematyka 3. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2006.

[2] R. Kalina, T. Szymański, F. Linke, M. Woźniak, *Matematyka dla klasy III liceum i technikum. Zakres podstawowy i rozszerzony*, Wydawnictwo Sens, Warszawa 2006.

[3] K. Kłaczkow, M. Kurczab, E. Świda, *Matematyka dla licealistów. Zbiór zadań do III i IV klasy*, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2001.

[4] E. Kowalik, *Kombinatoryka*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

[5] H. Pawłowski, *Matematyka 3. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Zakres podstawowy*, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, *Matematyka 3. Zbiór zadań. Zakres podstawowy i rozszerzony*, OPERON, Gdynia 2004.