Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat: Przegląd metod rozwiązywania równań i nierówności

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

1 Równania liniowe (I stopnia z jedną niewiadomą)

Równanie liniowe z jedną niewiadomą ma postać

$$ax + b = 0.$$

Jeśli $a \neq 0$, rozwiązaniem jest:

$$x = -\frac{b}{a}$$

W przypadku gdy: $a = 0$ i $b = 0$ otrzymujemy równość $0 = 0$ i wtedy równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.
Gdy $a = 0$ i $b \neq 0$ otrzymujemy sprzeczność i wtedy równanie nie ma rozwiązań.

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

$$3x + 4(3 - x) - (3x + 2) = 2.$$

Rozwiązanie. Najpierw porządkujemy równanie, w tym celu wykonujemy wskazane działania zgodnie z kolejnością ich wykonywania i z zasadami działań na wyrażeniach algebraicznych:

$$3x + 12 - 4x - 3x - 2 = 2$$

$$-4x + 10 = 2$$

$$-4x = -8$$

teraz dzielimy obie strony otrzymanej równości przez współczynnik znajdujący się przy niewiadomej czyli przez -4:

$$x = 2$$

Rozwiązaniem tego równania jest liczba 2. Sprawdźmy teraz, czy rozwiązaliśmy równanie poprawnie. Musimy więc w równaniu wyjściowym w miejsce niewiadomej podstawić obliczoną wartość:

$$L = 3 \cdot 2 + 4(3 - 2) - (3 \cdot 2 + 2) = 6 + 4 \cdot 1 - 8 = 2 = P$$

Skoro lewa strona równania jest równa prawej to rozwiązanie jest prawidłowe.

Przykład 2. Rozwiąż równanie

$$4(x + 7) - 3(2x + 3) = 2(2 - x).$$

Rozwiązanie. Porządkujemy równanie:

$$4x + 28 - 6x - 9 = 4 - 2x$$

$$-2x + 19 = 4 - 2x$$

$$0x = -15$$

$$0 = -15$$

Otrzymaliśmy równość sprzeczną, gdyż $0 \neq -15$, zatem nasze równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Przykład 3. Rozwiąż równanie

$$x(2-x)-7x=x(x-(5+2x)).$$

Rozwiązanie. Porządkujemy równanie:

$$2x - x^2 - 7x = x(-5 - x)$$

$$-5x - x^2 = -5x - x^2$$

$$0 = 0$$

Otrzymaliśmy równość prawdziwą, więc to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.

2 Nierówności liniowe (I stopnia z jedną niewiadomą)

Nierówności liniowe są to nierówności postaci:

$$ax + b < 0, ax + b \leqslant 0, ax + b > 0, ax + b \geqslant 0$$

Symbole $\leqslant$, $\geqslant$ oznaczają nierówność słabą, a symbole $<$, $>$ nierówność mocną. Tok rozwiązywania nierówności jest analogiczny jak tok rozwiązywania równania , tylko jest ono zakończone ilustracją rozwiązania na osi liczbowej.

Przykład 4. Rozwiąż nierówność

$$6(2x+1)-(14+x)>5(x-2).$$

Na początek porządkujemy obie strony nierówności i doprowadzamy do odpowiedniej postaci:

$$12x + 6 - 14 - x > 5x - 10$$

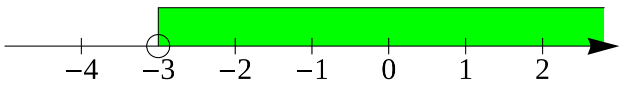
$$11x - 5x > -10 - 8$$

$$6x > -18$$

Obie strony nierówności dzielimy przez współczynnik przy niewiadomej czyli 6:

$$x > -3$$

Otrzymany zbiór rozwiązań zaznaczamy na osi liczbowej:



Rysunek 1: Rozwiązanie

$$x \in (-3; +\infty)$$

Rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste większe od -3. Nierówność jest mocna więc liczby -3 nie zaliczamy do zbioru rozwiązań.

Przykład 5. Rozwiąż nierówność

$$(x-1)^2 - 4 \geqslant (x+4)^2$$

Rozwiązanie

$$x^2 - 2x + 1 - 4 \geqslant x^2 + 8x + 16$$

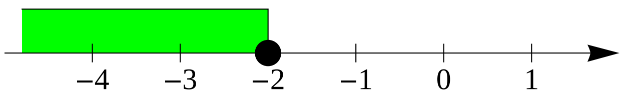
$$x^2 - 2x - x^2 - 8x \geqslant 16 + 4$$

$$-10x \geqslant 20$$

Obie strony tej nierówności dzielimy przez liczbę ujemną -10, należy więc pamiętać o zmianie znaku nierówności na przeciwny:

$$x \leqslant -2$$

Otrzymane rozwiązanie zaznaczamy na osi liczbowej:



Rysunek 2: Rozwiązanie

$$x \in (-\infty; -2]$$

Rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby rzeczywiste nie większe od -2. Tym razem nierówność jest słaba, więc do zbioru rozwiązań zaliczamy również liczbę -2.

Przykład 6. Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x+4}{2} \geqslant \frac{x+2}{5}.$$

Upraszczamy nierówność mnożąc obie jej strony przez liczbę 10, będącą wspólnym mianownikiem obydwu ułamków.

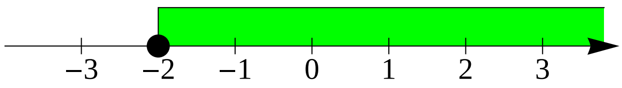
$$\frac{10(2x+4)}{2} \geqslant \frac{10(x+2)}{5}$$

$$5(2x+4) \geqslant 2(x+2)$$

$$10x+20 \geqslant 2x+4$$

$$8x \geqslant -16$$

$$x \geqslant -2$$



Rysunek 3: Rozwiązanie

$$x \in [-2; +\infty)$$

Rozwiązaniem tej nierówności są wszystkie liczby nie mniejsze od -2.

Przykład 7. Rozwiąż nierówność

$$(x-2)^2 + 6 < x^2 - 4x + 8$$

$$(x-2)^2+6<x^2-4x+8$$
$$x^2-4x+4+6<x^2-4x+8$$
$$x^2-4x-x^2+4x<8-10$$
$$0<-2$$

Powyższa nierówności jest sprzeczna, nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

3 Układy równań liniowych

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań zapisanych w następujący sposób:

$$\begin{cases} ax + bx = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań liniowych jest każda para liczb spełniająca obydwa równania. Wyróżniamy następujące metody rozwiązywania układów równań:

- metoda graficzna
- metody algebraiczne:
- podstawiania,
- przeciwnych współczynników,
- mieszana,
- wyznaczników.

Metoda graficzna rozwiązywania układów równań z dwiema niewiadomymi.

Metoda ta polega na graficznym zilustrowaniu każdego równania na płaszczyźnie z układem współrzędnych. Wzajemne położenie tych prostych zależy od ilości rozwiązań układu:

- proste przecinają się - układ oznaczony, ma dokładnie jedno rozwiązanie, którym są współrzędne punktu przecięcia prostych,
- proste pokrywają się - układ nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- proste równoległe rozłączne - układ sprzeczny, brak rozwiązań.

Przykład 8. Rozwiąż graficznie układ równań:

$$\begin{cases} 3(x+5)-4(y+3)=2(x+y) \\ 2x-5(3+y)=4(2x-2) \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} 3(x+5) - 4(y+3) = 2(x+y) \\ 2x - 5(3+y) = 4(2x-2) \end{cases}$$

Najpierw porządkujemy obydwa równania;

$$\begin{cases} 3x + 15 - 4y - 12 = 2x + 2y \\ 2x - 15 - 5y = 8x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = -3 \\ -6x - 5y = 7 \end{cases}$$

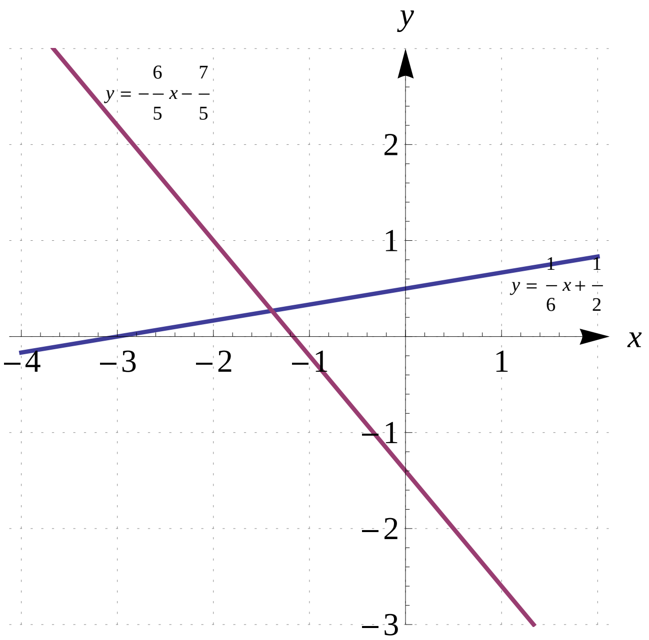
Obydwa równania przekształcamy do postaci $y = ax + b$

$$\begin{cases} -6y = -3 - x \\ -5y = 7 + 6x \end{cases}$$

Dalej

$$\begin{cases} y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \\ y = -\frac{6}{5}x - \frac{7}{5} \end{cases}$$

Rysujemy proste opisane otrzymanymi równaniami.



Rysunek 4: Rozwiązanie

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb, opisująca położenie punktu przecięcia prostych w układzie współrzędnych. Nie zawsze można dokładnie odczytać położenie punktu przecięcia prostych, dlatego warto rozwiązywać układy metoda algebraiczną.

Przykład 9. Rozwiąż graficznie układ równań:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = \frac{x+y}{2} + 1 \\ \frac{3x}{4} - \frac{7y}{4} = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Upraszczamy równania pozbywając się mianowników, w tym celu pierwsze równanie mnożymy przez 2, a drugie przez 4.

$$\begin{cases} 4x - 6y - 2 = x + y + 2 \\ 3x - 7y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 4 \\ 3x - 7y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3x}{7} - \frac{4}{7} \\ y = \frac{3x}{7} - \frac{4}{7} \end{cases}$$

Otrzymaliśmy jednakowe równania prostych, więc w interpretacji graficznej będą to proste pokrywające się. Zatem ten układ równań jest nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 10. Rozwiąż graficznie układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} + \frac{3y}{5} = -2 \\ \frac{2x-y}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Rozwiązanie

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} + \frac{3y}{5} = -2 \quad / \cdot 5 \\ \frac{2x-y}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{3}{2} \quad / \cdot 12 \end{cases}$$

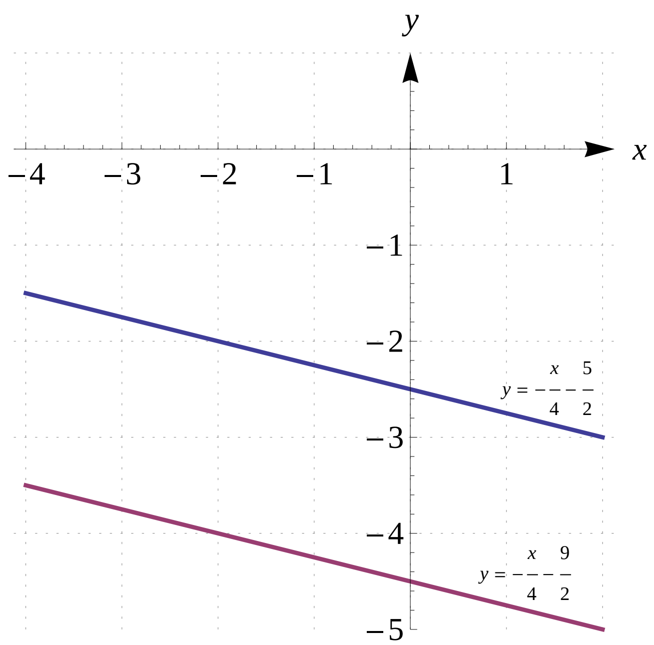
$$\begin{cases} x + y + 3y = -10 \\ 4(2x - y) - 3 \cdot 3x = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y = -10 \\ 8x - 4y - 9x = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = -10 - x \\ -4y = 18 + x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{2} - \frac{x}{4} \\ y = -\frac{9}{2} - \frac{x}{4} \end{cases}$$

Otrzymaliśmy proste równoległe rozłączne, zatem układ jest sprzeczny, nie ma rozwiązań.



Rysunek 5: Rozwiązanie

4 Algebraiczne metody rozwiązywania układów równań z dwiema niewiadomymi.

Metoda podstawiania polega na podstawieniu obliczonej z jednego z równań układu jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania. W ten sposób dostajemy równanie z jedna niewiadomą. Po obliczeniu tej niewiadomej i podstawieniu obliczamy druga niewiadomą.

Przykład 11. Rozwiąż metodą podstawiania układ równań.

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - 2 = y - 3 \\ \frac{x+6}{3} + 3(y-2) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Porządkujemy obydwa równania:

$$\begin{cases} x - 6 = 3y - 9 \\ x + 6 + 9y - 18 = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyliczamy x

$$\begin{cases} x = 3y - 3 \\ x + 9y = 12 \end{cases}$$

W drugim równaniu w miejsce x wstawiamy wyrażenie $3y - 3$ i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$\begin{cases} x = 3y - 3 \\ 3y - 3 + 9y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 3 \\ 12y - 3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 3 \\ 12y = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y - 3 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Obliczyliśmy wartość niewiadomej y, którą podstawimy teraz do pierwszego równania.

$$\begin{cases} x = 3\frac{5}{4} - 3 \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Należy jeszcze sprawdzić, czy uzyskane rozwiązanie jest prawidłowe, czyli czy wyliczone wartości spełniają obydwa równania. W tym celu podstawiamy w miejsce niewiadomych ich wartości i sprawdzamy czy lewe strony równań zgadzają się z prawymi.

$$L_1 = \frac{\frac{3}{4}}{3} - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$$

$$P_1 = \frac{5}{4} - 3 = -\frac{7}{4}$$

$$L_1 = P_1$$

Równanie pierwsze jest spełnione przez otrzymane liczby. Teraz sprawdzamy drugie:

$$L_2 = \frac{\frac{3}{4} + 6}{3} + 3\left(\frac{5}{4} - 2\right) = \frac{9}{4} + \left(-\frac{9}{4}\right) = 0 = P_2$$

Otrzymane rozwiązanie spełnia obydwa równania, jest więc rozwiązaniem układu równań.

Metoda przeciwnych współczynników polega na uzyskaniu przeciwnych współczynników przy tej samej niewiadomej w obu równaniach, a następnie na dodaniu ich stronami. W ten sposób otrzymujemy jedno równanie z jedną niewiadomą.

Przykład 12. Rozwiąż układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{3} + 4 = 3x \\ \frac{2{,}5x-2y}{2} - 2x = 3 \end{cases}$$

Rozwiązanie. Porządkujemy równania

$$\begin{cases} x - 2y + 12 = 9x \\ 2,5x - 2y - 4x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 2y = -12 \\ -1,5x - 2y = 6 \end{cases}$$

Przy niewiadomej y mamy ten sam współczynnik liczbowy. Wystarczy jedno z równań pomnożyć przez -1 i otrzymamy przy y współczynniki przeciwne.

$$\begin{cases} 6x + 2y = 12 \\ -1,5x - 2y = 6 \end{cases}$$

Obydwa równania dodajemy stronami i otrzymujemy równanie z jedna niewiadomą

$$6x + (-1,5x) + 2y + (-2y) = 12 + 6$$

$$4,5x = 18$$

$$x = 4$$

Otrzymaliśmy wartość niewiadomej x.

Chcąc wyliczyć drugą niewiadomą musimy wyeliminować już wyliczoną. W tym przypadku pozbędziemy się teraz z równania niewiadomej x. Wracamy do układu

$$\begin{cases} -6x - 2y = -12 \\ -1,5x - 2y = 6 \end{cases}$$

Żeby otrzymać współczynniki przeciwne przy x należy drugie równanie pomnożyć obustronnie przez -4.

$$\begin{cases} -6x - 2y = -12 \\ 6x + 8y = -24 \end{cases}$$

Dodajemy równanie stronami

$$-6x + 6x - 2y + 8y = -12 + -24$$

$$6y = -36$$

$$y = -6$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(4; -6)$.

Sprawdzamy prawidłowość rozwiązania. Podstawiamy w miejsce x i y w równaniach pierwszego układu obliczone wartości:

$$L_1 = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot (-6)}{3} + 4 = \frac{12 + 12}{3} + 4 = 8 + 4 = 12$$

$$P_1 = 3 \cdot 4 = 12$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = \frac{2,5 \cdot 4 - 2 \cdot (-6)}{2} - 2 \cdot 4 = \frac{10 + 12}{2} - 8 = 11 - 8 = 3 = P_2$$

Wyznaczona para liczb spełnia zarówno pierwsze jak i drugie równanie, jest więc rozwiązaniem układu równań.

Metoda mieszana jest połączeniem metody podstawiania i przeciwnych współczynników, tzn. jedną z niewiadomych wyliczamy metoda przeciwnych współczynników, a drugą metodą podstawiania.

Przykład 13. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2 \\ (x+4)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+3)^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2 \\ (x+4)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y+3)^2 \end{cases}$$

Porządkujemy równania

$$\begin{cases} x^2-6x+9+y^2+4y+4=x^2+6x+9+y^2-8y+16 \\ x^2+8x+16+y^2-2y+1=x^2+4x+4+y^2+6y+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -12x+12y=12 \\ 4x-8y=-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+y=1 \\ 2x-4y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Obie strony pierwszego równania mnożymy przez 2 i otrzymamy przeciwne współczynniki przy x.

$$\begin{cases} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Dodajemy stronami i mamy:

$$-2x + 2x + 2y - 4y = 2 - 2$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

Wartość niewiadomej y obliczyliśmy metodą przeciwnych współczynników. Druga niewiadomą obliczymy metoda podstawiania. Wybieramy jedno z równań z układu wyjściowego i wstawiamy obliczoną wartość niewiadomej y

$$(x-3)^2+(y+2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2$$

$$x^2-6x+9+(0+2)^2=x^2+6x+9+(0-4)^2$$

$$-12x+4=16$$

$$-12x=12$$

$$x=-1$$

Para liczb $(-1;0)$ jest rozwiązaniem tego układu.

Sprawdzimy poprawność rozwiązania.

$$L_1 = (-1-3)^2 + (0+2)^2 = 16 + 4 = 20$$

$$P_1 = (-1+3)^2 + (0-4)^2 = 4 + 16 = 20$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = (-1+4)^2 + (0-1)^2 = 9 + 1 = 10$$

$$P_2 = (-1+2)^2 + (0+3)^2 = 1 + 9 = 10$$

$$L_2 =_P 2$$

Sprawdziliśmy poprawność rozwiązania.

Metoda wyznaczników polega na obliczeniu trzech wyznaczników i zastosowaniu ich do wzorów na obliczenie wartości niewiadomych.

Jeśli mamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} ax + bx = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

wyznacznik główny W obliczymy ze wzoru:

$$W = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d$$

a wyznaczniki W_x i W_y obliczymy następująco:

$$W_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c \cdot e - b \cdot f,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a \cdot f - c \cdot d$$

.

Jeśli wyznacznik główny $W \neq 0$ i wyznaczniki $W_x \neq 0$ oraz $W_y \neq 0$, układ ma jedno rozwiązanie:

$$x = \frac{W_x}{W}$$

$$y = \frac{W_y}{W}$$

Gdy $W = 0$ i $W_x = W_y = 0$, układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Gdy $W = 0$ i $W_x \neq 0$ lub $Wy \neq 0$, układ nie ma rozwiązania.

Przykład 14. Rozwiąż układ równań metodą wyznaczników:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases}$$

Rozwiązanie.

$$\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ -5x + 3y = 19 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik główny

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot (-5) = 6 - 25 = -19$$

Wyznacznik główny $W \neq 0$, więc układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Obliczamy teraz pozostałe wyznaczniki

$$W_x = \begin{vmatrix} -19 & -5 \\ 19 & 3 \end{vmatrix} = (-19) \cdot 3 - (-5 \cdot 19) = 38$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & -19 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = 2 \cdot 19 - (-19) \cdot (-5) = -57$$

Obliczamy wartości niewiadomych

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{38}{-19} = -2$$

$$y = \frac{Wy}{W} = \frac{-57}{-19} = 3$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $(-2; 3)$

Sprawdźmy jeszcze prawidłowość rozwiązania.

$$L_1 = 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 = -19 = P_1$$

$$L_2 = -5 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 19 = P_2$$

Rozwiązanie jest zatem prawidłowe.

5 Równania kwadratowe (II stopnia z jedną niewiadomą)

Trójmianem kwadratowym nazywamy równanie postaci

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

przy $a \neq 0$, $b \neq 0$ i $c \neq 0$.
Jeśli $a = 0$, to równanie przyjmuje postać równania liniowego. Rozwiązanie równania kwadratowego polega na wyznaczeniu miejsc zerowych trójmianu kwadratowego. Istnienie i liczba pierwiastków równania kwadratowego zależy od znaku wyróżnika Δ, którego wartość obliczamy ze wzoru:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Gdy $\Delta > 0$ istnieją dwa pierwiastki

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Gdy $\Delta = 0$ istnieje jeden pierwiastek

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

Gdy $\Delta < 0$ brak pierwiastków. Dla pierwiastków równania kwadratowego prawdziwe są wzory Viete'a:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Przykład 15. Rozwiąż równanie $x^2 + 8x + 12 = 0$

Rozwiązanie.

$$x^2 + 8x + 12 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16$$

$\Delta > 0$ mamy zatem dwa pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -6,$$

$$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -2$$

Pierwiastkami równania są liczby -6 i -2.

Sprawdźmy poprawność rozwiązania. Dla $x_1 = -6$

$$L_1 = (-6)^2 + 8 \cdot (-6) + 12 = 36 - 48 + 12 = 0 = P_1$$

Dla $x_2 = -2$

$$L_2 = (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 12 = 4 - 16 + 12 = 0 = P_2$$

Obydwie uzyskane liczby spełniają równanie.

Przykład 16. Rozwiąż równanie

$$(x+3)^2 - (x+4)^2 = 3x^2$$

Rozwiązanie.

$$(x+3)^2 - (x+4)^2 = 3x^2$$

Najpierw przekształcamy równanie do najprostszej postaci.

$$x^2 + 6x + 9 - x^2 - 8x - 16 = 3x^2$$

$$-3x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$3x^2 + 2x + 7 = 0$$

Obliczamy wartość wyróżnika

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -80$$

$\Delta < 0$ równanie nie ma pierwiastków.

W przypadku gdy $c = 0$ otrzymujemy równanie niezupełna postaci:

$$ax^2 + bx = 0,$$

które można rozwiązać bez wyróżnika. Przekształcamy je do postaci :

$$x(ax + b) = 0$$

i korzystając z własności iloczynu mamy:

$$x = 0 lub ax + b = 0$$

, i dostajemy rozwiązanie:

$$x_1 = 0 lub x_2 = -\frac{b}{a}$$

Przykład 17. Rozwiąż równanie

$$x^2 + 2x - 8 = 3x - 8.$$

Rozwiązanie.

$$x^2 + 2x - 8 = 3x - 8$$

Porządkujemy równanie i otrzymujemy:

$$x^2 - x = 0$$

Przekształcamy do postaci iloczynu:

$$x(x-1) = 0$$

i mamy:

$$x = 0 \text{ lub } x = 1$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby 0 i 1.

Sprawdzamy: Dla $x_1 = 0$:

$$L = 0^2 + 2 \cdot 0 - 8 = -8$$

$$P = 3 \cdot 0 - 8 = -8$$

$$L = P$$

Dla $x_2 = 1$:

$$L = 1^2 + 2 \cdot 1 - 8 = -5$$

$$P = 3 \cdot 1 - 8 = -5$$

$$L = P$$

Otrzymane rozwiązanie jest poprawne.

W przypadku gdy $b = 0$ otrzymujemy równanie niezupełne postaci:

$$ax^2 + c = 0$$

Równanie takie możemy również rozwiązać bez wyróżnika

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Jeśli $-\frac{c}{a} < 0$ równanie nie ma rozwiązań. Jeśli $-\frac{c}{a} > 0$ równanie ma dwa rozwiązania

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Przykład 18. Rozwiąż równanie

$$-x^2 + 6x - 7 = -2x^2 + 6x + 9$$

Rozwiązanie.

$$-x^2 + 6x - 7 = -2x^2 + 6x + 9.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = -4 \text{ lub } x2 = 4$$

Sprawdzamy poprawność rozwiązania: Dla $x_1 = -4$:

$$L = -(-4)^2 + 6 \cdot (-4) - 7 = -16 - 24 - 7 = -47$$

$$P = -2 \cdot (-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 9 = -32 - 24 + 9 = -47$$

$$L = P$$

Dla $x_2 = 4$

$$L = -4^2 + 6 \cdot 4 - 7 = -16 + 24 - 7 = 1$$

$$P = -2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 + 9 = -32 + 24 + 9 = 1$$

$$L = P$$

Otrzymane rozwiązania są poprawne.

Przykład 19. Rozwiąż równanie

$$-4x - 8 = 3x^2 - 4x + 2$$

Rozwiązanie.

$$-4x - 8 = 3x^2 - 4x + 2.$$

Po przekształceniach dostajemy:

$$3x^2 + 10 = 0$$

$$3x^2 = -10$$

$$x^2 = -\frac{10}{3}$$

Druga potęga nie może być liczbą ujemną, więc to równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych Przykłady równań sprowadzalnych do równań kwadratowych

Równania dwukwadratowe $ax^4 + bx^2 + c = 0$ rozwiązujemy stosując podstawienie

$$t = x^2, (t \geqslant 0).$$

W ten sposób sprowadzamy je do równania kwadratowego

$$at^2 + bt + c = 0 \text{ i } t \geqslant 0$$

Po obliczeniu pierwiastków $t_1, t_2 > 0$ rozwiązujemy równania

$$x^2 = t_1 \text{ lub } x^2 = t_2$$

Wtedy

$$x_1 = \sqrt{t_1},\ x_2 = -\sqrt{t_1},\ x_3 = \sqrt{t_2},\ x_4 = -\sqrt{t_2}$$

są pierwiastkami równania

Przykład 20. Rozwiąż równanie

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Rozwiązanie.

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Podstawiamy $t = x^2$ i dostajemy:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

Obliczamy wyróżnik Δ

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$$

Ponieważ $\Delta > 0$ równanie ma dwa rozwiązania:

$$t_1 = \frac{10 - 8}{2} = 1$$

$$t_2 = \frac{10 + 8}{2} = 9$$

. $t_1 > 0$ i $t_2 > 0$ więc: $x_1 = \sqrt{1} = 1$, $x_2 = -\sqrt{1} = -1$, $x_3 = \sqrt{9} = 3$, $x_4 = -sqrt9 = -3$ Otrzymaliśmy cztery pierwiastki $-4, -1, 1, 4$. Sprawdźmy jeszcze poprawność rozwiązania. Dla $x_1 = 1$

$$L = 1^4 - 10 \cdot 1^2 + 9 = 1 - 10 + 9 = 0 = P$$

Dla $x_2 = -1$

$$L = (-1)^4 - 10 \cdot (-1)^2 + 9 = 0 = P$$

Dla $x_3 = 3$

$$L = 3^4 - 10 \cdot 3^2 + 9 = 81 - 90 + 9 = 0 = P$$

Dla $x_4 = -3$

$$L = (-3)^4 - 10 \cdot (-3)^2 + 9 = 0 = P$$

Jak widać rozwiązanie jest poprawne.

Przykład 21. Rozwiąż równanie:

$$x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3)$$

Rozwiązanie.

$$x^4 - 3(x^2 - 1) = 7(x^2 - 3).$$

Przekształcamy równanie:

$$x^4 - 3x^2 + 3 = 7x^2 - 21$$

$$x^4 - 10x^2 + 24 = 0$$

Podstawiamy $t = x^2$

$$t^2 - 10t + 24 = 0$$

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = 100 - 96 = 4$$

$\Delta > 0$ więc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$ i mamy:

$$t_1 = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{10 + 2}{2} = 6$$

i dalej:

$$x_1 = \sqrt{4} = 2$$

$$x_2 = -\sqrt{4} = -2$$

$$x_3 = \sqrt{6}$$

$$x_4 = -\sqrt{6}$$

Sprawdźmy poprawność rozwiązania dla $x_1 = 2$

$$L = 2^4 - 3(2^2 - 1) = 16 - 3 \cdot 3 = 7$$

$$P = 7(2^2 - 3) = 7 \cdot 1 = 7$$

$$L = P$$

dla $x_2 = -2$

$$L = (-2)^4 - 3((-2)^2 - 1) = 7$$

$$P = 7((-2)^2 - 3) = 7$$

$$P = L$$

dla $x_3 = \sqrt{6}$

$$L = (\sqrt{6})^4 - 3((\sqrt{6})^2 - 1) = 36 - 3?5 = 21$$

$$P = 7((\sqrt{6})^2 - 3) = 7 \cdot 3 = 21$$

$$L = P$$

dla $x_4 = -\sqrt{6}$

$$L = (-\sqrt{6})^4 - 3((-\sqrt{6})^2 - 1) = 36 - 3?5 = 21$$

$$P = 7((-\sqrt{6})^2 - 3) = 7 \cdot 3 = 21$$

$$L = P$$

Rozwiązanie jest poprawne.

Metodę zmiennej pomocniczej można też zastosować do rozwiązywania równań typu $ax+b\sqrt{x}+c=0$. Wtedy podstawiamy $t=\sqrt{x}$, $(t \geqslant 0)$.

Przykład 22. Rozwiąż równanie

$$(x-3)-2\sqrt{x-3}-3=0$$

Rozwiązanie.

$$(x-3)-2\sqrt{x-3}-3=0.$$

Podstawiamy $t=\sqrt{x-3}$ i dostajemy równanie kwadratowe:

$$t^2-2t-3=0$$

Obliczamy wyróżnik:

$$\Delta = 4-4\cdot 1\cdot(-3)=16$$

$$\sqrt{\Delta}=4$$

Obliczamy pierwiastki pomocnicze:

$$t_1=\frac{2-4}{2}=-1,$$

$$t_2=\frac{2+4}{2}=3.$$

Zauważmy, że $t_1<0$. Jest to niezgodne z założeniem, że $t\geqslant 0$. Zatem t_1 jest rozwiązaniem niespełniającym naszych oczekiwań. Dostajemy zatem jeden pierwiastek:

$$t_2=\sqrt{x-3}$$

$$3=\sqrt{x-3}$$

$$9=x-3$$

$$x=12$$

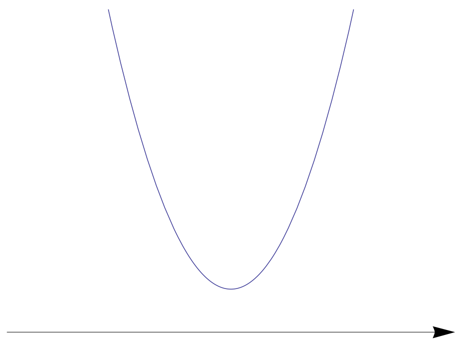
Sprawdzamy poprawność rozwiązania:

$L = (12 - 3) - 2\sqrt{12 - 3} - 3 = 9 - 6 - 3 = 0 = P$

6 Nierówności kwadratowe (II stopnia z jedną niewiadomą)

Rozwiązywanie nierówności kwadratowej polega na badaniu znaku trójmianu kwadratowego, który zależy od wartości współczynnika a oraz wyróżnika Δ. Rozważamy następujące przypadki:

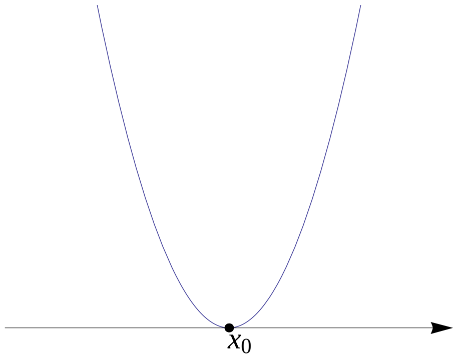
1. $a > 0, \ \Delta < 0$



Rysunek 6: Szkic wykresu

brak pierwiastków i $ax^2 + bx + c > 0$ dla $x \in R$

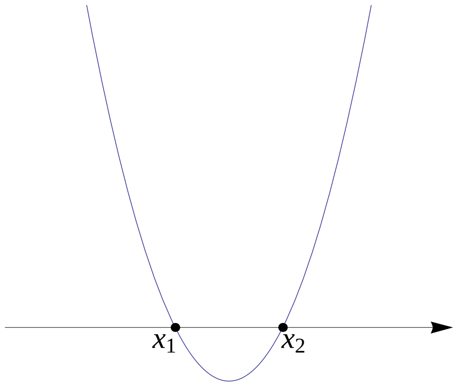
2. $a > 0, \Delta = 0$



Rysunek 7: Szkic wykresu

Wówczas mamy jeden pierwiastek x_0 i zachodzi:
$ax^2 + bx + c > 0$ dla $x \in R \setminus \{x_0\}$
oraz $ax^2 + bx + c = 0$ dla $x = x_0$

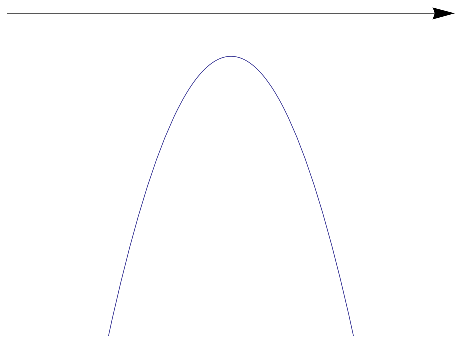
3. $a > 0, \Delta > 0$



Rysunek 8: Szkic wykresu

Wówczas mamy dwa pierwiastki x_1, x_2 i
$ax^2 + bx + c > 0$ dla $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$
$ax^2 + bx + c = 0$ dla $x = x_1 \vee x = x_2$
$ax^2 + bx + c < 0$ dla $x \in (x_1; x_2)$

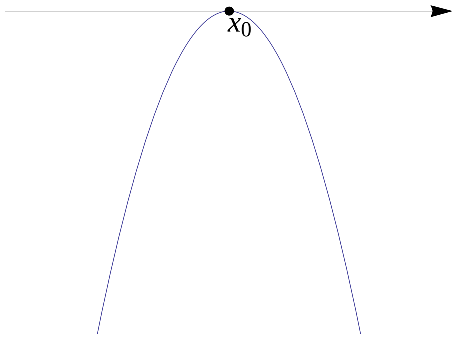
4. $a < 0, \Delta < 0$



Rysunek 9: Szkic wykresu

brak pierwiastków i $ax^2 + bx + c < 0$ dla $x \in R$

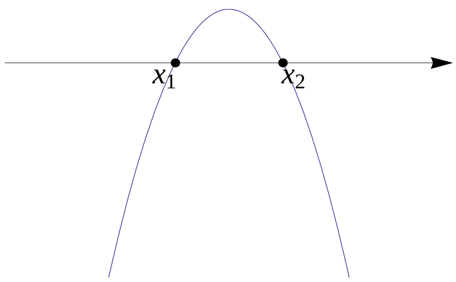
5. $a < 0, \Delta = 0$



Rysunek 10: Szkic wykresu

Mamy wówczas jeden pierwiastek x_0 i wówczas
$ax^2 + bx + c < 0$ dla $x \in R \setminus \{x_0\}$
oraz $ax^2 + bx + c = 0$ dla $x = x_0$

6. $a < 0, \Delta > 0$



Rysunek 11: Szkic wykresu

Mamy wówczas dwa pierwiastki x_1, x_2 i zachodzi
$ax^2 + bx + c > 0$ dla $x \in (x_1; x_2)$,
$ax^2 + bx + c = 0$ dla $x = x_1 \vee x = x_2$,
$ax^2 + bx + c < 0$ dla $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; \infty)$

Przykład 23. Rozwiąż nierówność

$$(3x-1)^2 - 4(2-x)^2 > 0$$

Rozwiązanie.

$$(3x-1)^2-4(2-x)^2>0$$

Przekształcamy i porządkujemy nierówność.

$$9x^2-6x+1-16+16x-4x^2>0$$

$$5x^2+10x-15>0$$

$$x^2+2x-3>0$$

Szukamy pierwiastków trójmianu:

$$\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-3)=16$$

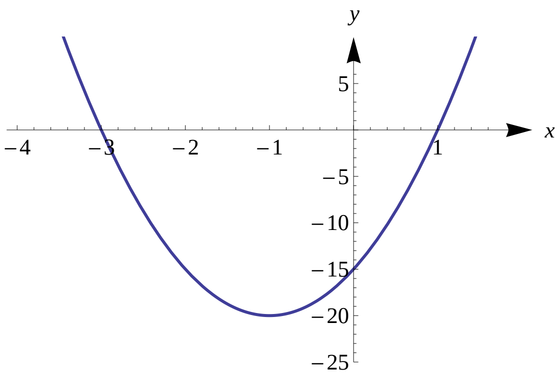
$$\sqrt{\Delta}=4$$

$$x_1=\frac{-2-4}{2}=-3$$

$$x_2=\frac{-2+4}{2}=1$$

Trójmian ma dwa pierwiastki, współczynnik $a>0$, zatem:

$(3x-1)^2-4(2-x)^2>0$ dla $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$



Rysunek 12: Szkic wykresu

Przykład 24. Rozwiąż nierówność

$$-x^2 + 6x - 5 \geqslant 2x^2 + 8x + 6$$

Rozwiązanie.

$$-x^2 + 6x - 5 \geqslant 2x^2 + 8x + 6$$

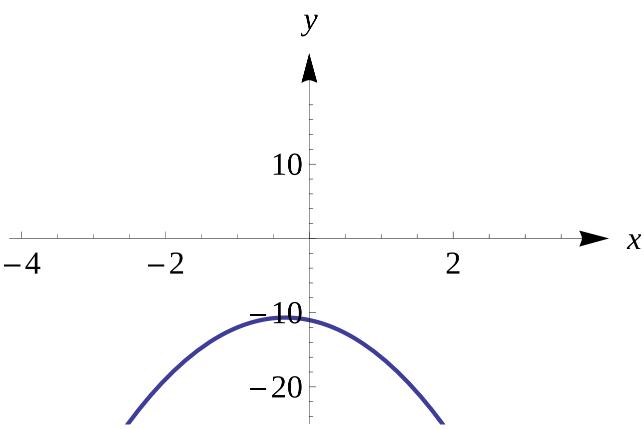
Przekształcamy równanie

$$-3x^2 - 2x - 11 > 0$$

Szukamy miejsc zerowych:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-11) = -128$$

Wyróżnik jest ujemny, zatem trójmian nie ma pierwiastków współczynnik $a < 0$, więc:



Rysunek 13: Szkic wykresu

Trójmian w całej dziedzinie przyjmuje wartości ujemne więc nierówność jest sprzeczna.

Przykład 25. Rozwiąż nierówność

$$2x^2 + 12x + 16 < 0$$

Rozwiązanie.

$$2x^2 + 12x + 16 < 0$$

Obliczamy wyróżnik

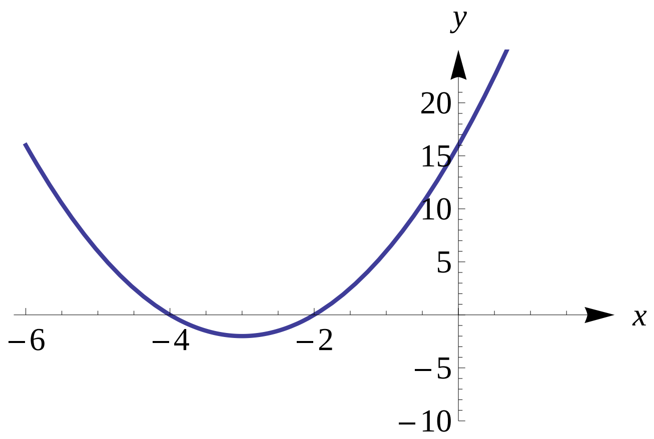
$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 16$$

$$\sqrt{\Delta} = 4$$

$$x_1 = \frac{-12 - 4}{2 \cdot 2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-12 + 4}{2 \cdot 2} = -2$$

Trójmian ma dwa pierwiastki, współczynnik $a > 0$, więc:



Rysunek 14: Szkic wykresu

$$2x^2 + 12x + 16 < 0 \text{ dla } x \in (-4; -2)$$

Przykład 26. Rozwiąż nierówność

$$5(x+1) > x(3-x)$$

Rozwiązanie.

$$5(x+1) > x(3-x)$$

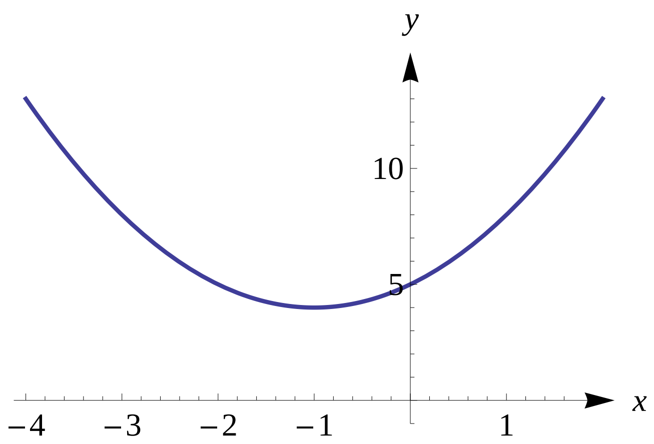
$$5x + 5 > 3x - x^2$$

$$x^2 + 2x + 5 > 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$$

$\Delta < 0, a > 0$, więc:

Trójmian w całej dziedzinie przyjmuje wartości dodatnie, zatem nierówność jest spełniona dla dowolnej liczby rzeczywistej.



Rysunek 15: Szkic wykresu

7 Równania wielomianowe

Rozwiązywanie równań wielomianowych polega na poszukiwaniu pierwiastków wielomianu. Chcąc rozwiązać równanie wielomianowe musimy wielomian rozłożyć na iloczyn jednomianów i dwumianów. Możemy to wykonać: grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik przed nawias, stosując wzory skróconego mnożenia, stosując twierdzenie Bezouta, stosując twierdzenia o pierwiastkach całkowitych i wymiernych wielomianu.

Przykład 27. Rozwiąż równanie

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

Rozwiązanie.

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

Rozkładamy wielomian na czynniki niższych stopni.

$$x^2(x+1) - (x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2-1) = 0$$

$$(x+1)(x+1)(x-1) = 0$$

$$(x+1)^2(x-1) = 0$$

$$x+1=0 \quad \vee \quad x-1=0$$

$$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 1$$

Pierwiastkami równania są:
$x_1 = -1$ pierwiastek podwójny,
$x_2 = 1$ pierwiastek pojedynczy.

Sprawdzamy poprawność rozwiązania:
dla $x_1 = -1$

$L = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0 = P$

dla $x_2 = 1$

$$L = 1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0 = P$$

Rozwiązanie jest poprawne.

Przykład 28. Rozwiąż równanie

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Rozwiązanie.

$$x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Rozkładamy wielomian na czynniki

$$x^3 - x - 2x - 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x + 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) - 2(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$(x + 1)^2(x - 2) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

Pierwiastkami równania są:
$x_1 = -1$ pierwiastek podwójny,
$x_2 = 2$ pierwiastek pojedynczy.

Sprawdzamy poprawność rozwiązania
dla $x_1 = -1$

$$L = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 = P$$

dla $x_2 = 2$

$$L = 2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 8 - 6 - 2 = 0 = P$$

Rozwiązanie jest poprawne.

Przykład 29. Rozwiąż równanie

$$4x^3 + 12x^2 - x - 3 = 0$$

Rozwiązanie.

$$4x^3 + 12x^2 - x - 3 = 0$$

$$4x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(4x^2 - 1) = 0$$

$$x + 3 = 0 \quad \vee \quad 4x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = -3 \quad \vee \quad 4x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x_3 = -\frac{1}{2}$$

Równanie ma trzy pierwiastki pojedyncze: $x_1 = -3$ $x_2 = \frac{1}{2}$ $x_3 = -\frac{1}{2}$

Sprawdzamy poprawność rozwiązania: dla $x_1 = -3$

$L = 4\cdot(-3)^3+12\cdot(-3)^2-(-3)-3 = -108+108+3-3 = 0 = P$

dla $x_2 = \frac{1}{2}$

$$L = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} - 3 = 0 = P$$

dla $x_3 = -\frac{1}{2}$

$$L = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+12\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)-3 = -\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2}-3 = 0 = P$$

8 Nierówności wielomianowe

Tok rozwiązywania nierówności wielomianowych jest analogiczny do toku rozwiązywania równania. Po wyznaczeniu pierwiastków wielomianu należy ustalić przedziały w jakich w jakich spełnione są zadane warunki. Często w tym celu posługujemy się tzw. siatką znaków.

Przykład 30. Rozwiąż nierówność

$$(x-1)(x-3)(x+4) > 0$$

Rozwiązanie.

$$(x-1)(x-3)(x+4) > 0.$$

Mamy tu postać iloczynową, wystarczy więc wyznaczyć pierwiastki:

$$x-1=0 \quad \vee \quad x-3=0 \quad \vee \quad x+4=0,$$

zatem

$$x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 3 \quad \vee \quad x_3 = -4.$$

Określamy znaki poszczególnych czynników, ponieważ znak wielomianu, jako iloczynu, zależy od znaków czynników rozkładu. Posłużymy się siatka znaków

	$(-\infty;-4)$	-4	$(-4;1)$	1	$(1;3)$	3	$(3;\infty)$
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+	+	+
$W(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Z tabeli wynika, że wielomian ma wartości ujemne dla $x \in (-\infty;-4) \cup (1;3)$, natomiast wartości dodatnie dla $x \in (-4;1) \cup (3;\infty)$. Rozwiązaniem tej nierówności jest więc zbiór liczb x takich, że $x \in (-4;1) \cup (3;\infty)$.

Przykład 31. Rozwiąż nierówność

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$$

Rozwiązanie.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \geqslant 0$$

Wiemy, ze całkowite pierwiastki wielomianu są dzielnikami wyrazu wolnego, więc mogą to być w tym wypadku liczby $-2, -1, 1, 2$. Sprawdźmy czy 2 jest pierwiastkiem. W tym celu podstawiamy liczbę 2 w wielomianie:

$$2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 8 - 12 + 6 - 2 = 0$$

Liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu.
Podzielmy wielomian $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ przez dwumian $(x - 2)$.

$$\begin{array}{ccccl}
(x^3 & -3x^2 & +3x & -2) & : (x-2) = (x^2 - x + 1) \\
-x^3 & 2x^2 & & & \\
\hline
= & -x^2 & +3x & & \\
 & x^2 & -2x & & \\
\hline
 & = & x & -2 & \\
 & & -x & 2 & \\
\hline
 & & = & = &
\end{array}$$

Możemy go więc rozłożyć na iloczyn czynnika $(x-2)$ oraz (x^2-x+1).

$$(x-2)(x^2-x+1) \geqslant 0$$

$$x-2=0 \quad \vee \quad x^2-x+1=0$$

Wyznaczmy pierwiastki równania $x^2-x+1=0$. W tym celu obliczamy "Deltę"

$$\Delta = 1-4 = -3 < 0$$

Wyróżnik trójmianu kwadratowego jest ujemny, a współczynnik $a>0$, więc trójmian jest dodatni w całej dziedzinie. Zatem znak wielomianu zależy tylko od znaku wyrażenia $x-2$.

	$(-\infty;2)$	2	$(2;\infty)$
$x-2$	-	0	+
x^2-x+1	+	+	+
$W(x)$	-	0	+

Zatem $x^3-3x^2+3x-2 \geqslant 0$ dla $x \in \langle 2;\infty)$

9 Przykłady równań z wartością bezwzględną

Przykład 32. Rozwiąż równanie

$$2x + |x - 1| = 2.$$

Rozwiązanie.

$$2x + |x - 1| = 2.$$

Na podstawie defincji wartości bezwzględnej mamy:

$$|x - 1| = \begin{cases} (x - 1) & \text{dla } x - 1 \geqslant 0, \\ -(x - 1) & \text{dla } x - 1 < 0 \end{cases}$$

a stąd wynika, że

$$|x - 1| = \begin{cases} (x - 1) & \text{dla } x \geqslant 1, \\ -(x - 1) & \text{dla } x < 1 \end{cases}$$

Rozpatrujemy zatem dwa przypadki, przedział, w którym $x \geqslant 1$ i drugi, w którym $x < 1$.

Niech $x \geqslant 1$, wówczas nasze równanie przyjmie postać:

$$2x + (x - 1) = 2$$

Skąd otrzymamy

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Otrzymany pierwiastek jest zgodny z założeniem (tzn. $x \geqslant 1$).

Rozpatrujemy drugi przypadek.
Niech $x < 1$, wówczas nasze równanie przyjmie postać:

$$2x - (x - 1) = 2.$$

Skąd otrzymujemy:

$$2x - x + 1 = 2$$

$$x = 1$$

Ponieważ rozwiązania szukaliśmy w zbiorze liczb mniejszych od 1 więc w tym przypadku nie mamy roziązania spełniającego nasze założenie.

Zatem rozwiązaniem naszego równania jest $x = 1$. Sprawdzamy:

$$L = 2 \cdot 1 + |1 - 1| = 2 = P$$

Przykład 33. Rozwiąż równanie

$$|x-1|+|x-2|-|x+3|=6.$$

Rozwiązanie.

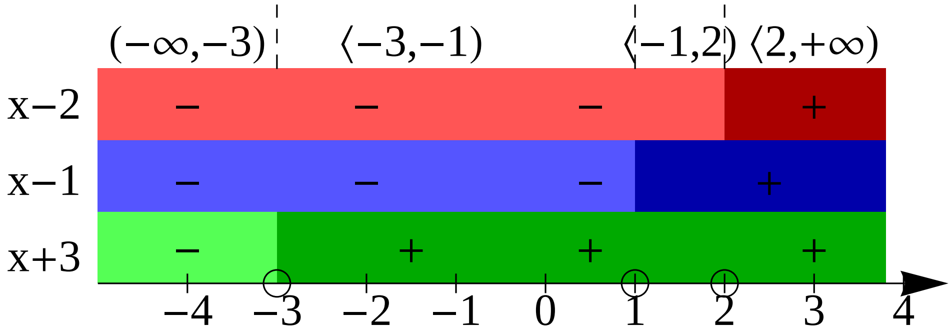
$$|x-1|+|x-2|-|x+3|=6.$$

Rozwiązując równania z wartością bezwzględną należy rozpatrywać co się stanie z wyrażeniem pod znakiem wartości bezwzględnej gdy ten znak opuścimy. Zauważmy, że gdy wartości pod znakiem $|\ |$ są dodatnie to wystarczy opuścić znak $|\ |$ i przepisać wyrażenie bez zmian. Natomiast gdy wyrażenie pod znakiem wartości bezwzględnej przyjmuje wartości ujemne, wówczas przy opuszczaniu znaku $|\ |$ należy zmienić jego znak na przeciwny. Robimy to w ten sposób że znak stojący przed wartością bezwzględną zmieniamy na przeciwny a znak wartości bezwzględnej $|\ |$ zastępujemy znakiem nawiasu ( ).
Zauważmu ponadto, że gdy mamy wyrażenie postaci

$$|x-a|,$$

gdzie $a>0$, to wyrażenie $x-a$ przyjmuje wartości nieujemne gdy $x\geqslant a$, i wtedy zamiast $|x-a|$ piszemy $x-a$, natomiast to samo wyrażenie przyjmuje wartości ujemne gdy $x<a$ i wtedy zamiast $|x-a|$ piszemy $-(x-a)$.
Zatem zmiana znaku zachodzi w punkcie a. Patrząc na nasze równanie widzimy że mamy sumę wyrażeń postaci $|x-a|$. Zatem dla naszego równania zmiana znaku zajdzie kolejno według wyrażeń, w punktach 1, 2, -3.

Po uszeregowaniu rosnąco mamy liczby -3, 1, 2. Odpowiadają temu przedziały, w których wyrażenia pod znakiem wartości bezwzględnej zachowują znak (tzn. są zawsze ujemne, lub zawsze nieujemne). Będą to przedziały: $(-\infty; -3)$, $\langle -3; 1)$, $\langle 1; 2)$, $\langle 2; \infty)$



Rysunek 16: Siatka zmiany znaków

Rozpatrujemy przedział $(-\infty; -3)$, w którym wszystkie wyrażenia pod znakami wartości bezwzględnej mają wartości ujemne, więc podczas opuszczania znaku wartości bezwzględnej zmieniamy znaki na przeciwne i mamy:

$$-(x-1)-(x-2)+(x+3)=6$$

$$-x+1-x+2+x+3=6$$

$$-x+6=6$$

$$x=0$$

Otrzymany pierwiastek nie należy do rozpatrywanego zbioru, więc w rozpatrywanym przedziale równanie nie ma rozwiązań.

Rozpatrujemy teraz drugi przypadek $x \in \langle -2; -1)$. W tym wypadku tylko wyrażenie $x + 3$ przyjmuje wartości nieujemne, zatem przy opuszczniu znaku wartości bezwzględnej przepisujemy je bez zmian (dla ułatwienia zamieniamy znak $|\ |$ znakiem $(\ )$. Pozostałe wyrażenia przyjmują wartości ujemne zatem przy opuszczaniu znaku wartości bezwzględnej zmieniamy ich znak na przeciwny. Stąd

$$-(x-1)-(x-2)-(x+3)=6$$

$$-x+1-x+2-x-3=6$$

$$-3x=6$$

$$x=-2$$

Otrzymany pierwiastek należy do rozpatrywanego zbioru, więc w rozpatrywanym przedziale równanie ma rozwiązanie -2.

Rozpatrujemy teraz trzeci przypadek $x \in \langle -1; 2)$. W tym wypadku tylko wyrażenie $x - 2$ przyjmuje wartości nieujemne, zatem przy opuszczniu znaku wartości bezwzględnej przepisujemy je ze zmianą znaku (dla ułatwienia zamieniamy znak przed wyrażeniem | | a sam znak wartości bezwzględnej zastępujemy znakiem ( ). Pozostałe wyrażenia przyjmują wartości nieujemne zatem przy opuszczaniu znaku wartości bezwzględnej zamieniamy go na ( ). Zatem W tym wypadku:

$$(x - 1) - (x - 2) - (x + 3) = 6$$

Stąd

$$x - 1 - x + 2 - x - 3 = 6$$

$$-x - 2 = 6$$

$$-x = 8$$

$$x = -8$$

Otrzymany pierwiastek nie należy do rozpatrywanego zbioru, więc w rozpatrywanym przedziale równanie nie ma rozwiązań.

Rozpatrujemy kolejny przypadek $x \in \langle 2; \infty)$. W tym wypadku wszystkie wyrażenia przyjmują wartości nieujemne, zatem przy opuszczniu znaku wartości bezwzględnej przepisujemy je bez zmiany znaku (dla ułatwienia sam znak wartości bezwzględnej zastępujemy znakiem ( ). Zatem

$$(x-1)+(x-2)-(x+3)=6$$

$$x-1+x-2-x-3=6$$

$$x=12$$

Otrzymany pierwiastek należy do rozpatrywanego zbioru, więc jest rozwiązaniem równania w tym przedziale.

Rozwiązaniem tego równania jest suma rozwiązań poszczególnych nierówności we wszystkich przedziałach. I tak: w drugim przedziale rozwiązaniem jest $x = -2$ w czwartym przedziale rozwiązaniem jest $x = 12$ zatem rozwiązaniem równania jest suma tych zbiorów czyli $x \in \{-2, 12\}$.