KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

ZADANIA KONSTRUKCYJNE

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodowa w Chełmie

Zadanie konstrukcyjne to zadania, które polegają na poszukiwaniu obiektu geometrycznego przy użyciu cyrkla i linijki.
Najprostszym obiektem do znalezienia jest punkt więc aby go jednoznacznie określić, należy wskazać go jako przecięcie dwóch prostych (lub odcinków), dwóch okręgów (lub łuków), lub prostej i okręgu (odcinka z łukiem).
Wiadomo, że do wykreślenia łuku i prostej służy cyrkiel i linijka. Stąd też zadania konstrukcyjne nazywamy zadania typu p-o (prosta – okrąg)

Niektóre zadania konstrukcyjne wydają się być bardzo trudne.
Poszukiwanie sposobów na ich rozwiązywanie nazywamy ***poszukiwaniem heurystyk***.
Wybitny pedagog i dydaktyk matematyki George Poly'a poświęcił heurystykom swoją książkę „Jak to rozwiązać" w której zawarł kanony takich heurystyk.
Książka ta jest rozchwytywana przez uczniów, ich nauczycieli i studentów.
Ostatnie jej wydanie polskie pojawiło się w 2009 r.

George Poly’a dzieli każde zadanie na cztery części:
1. zrozumienie zadania,
2. układanie planu rozwiązania,
3.wykonywanie planu,
4. rzut oka wstecz.

Zrozumienie zadania

polega na odpowiedzeniu sobie na kilka pytań:
a/ co jest niewiadome,
b/ co jest dane,
c/ jaki jest warunek – czy można go spełnić, czy wystarcza on do określenia niewiadomej, czy jest on może niewystarczający, zbyt obszerny, a może sprzeczny,
d/ zrób rysunek i wprowadź w nim oznaczenia,
e/ wydziel poszczególne części warunku; czy możesz je zapisać?

Układanie planu zadania:

a/ czy spotkałeś się już kiedyś z tym zadaniem?
b/ może ono wystąpiło w innej postaci?
c/ czy znasz zadanie pokrewne?
d/ spójrz na niewiadomą,
e/ czy możesz skorzystać z rozwiązania zadania pokrewnego?
f/ czy skorzystałeś z wszystkich danych?

Wykonanie planu:

W trakcie jego wykonywania sprawdzamy każdy jego krok, jego poprawność i w miarę możliwości staramy się go udowodnić

Rzut oka wstecz:

a/ czy możesz sprawdzić wynik?
b/ czy możesz sprawdzić uzasadnienie rozwiązania?
c/ czy wynik mogłeś uzyskać innym sposobem?
d/ czy możesz wykorzystać metodę rozwiązania lub wynik do innego zadania?

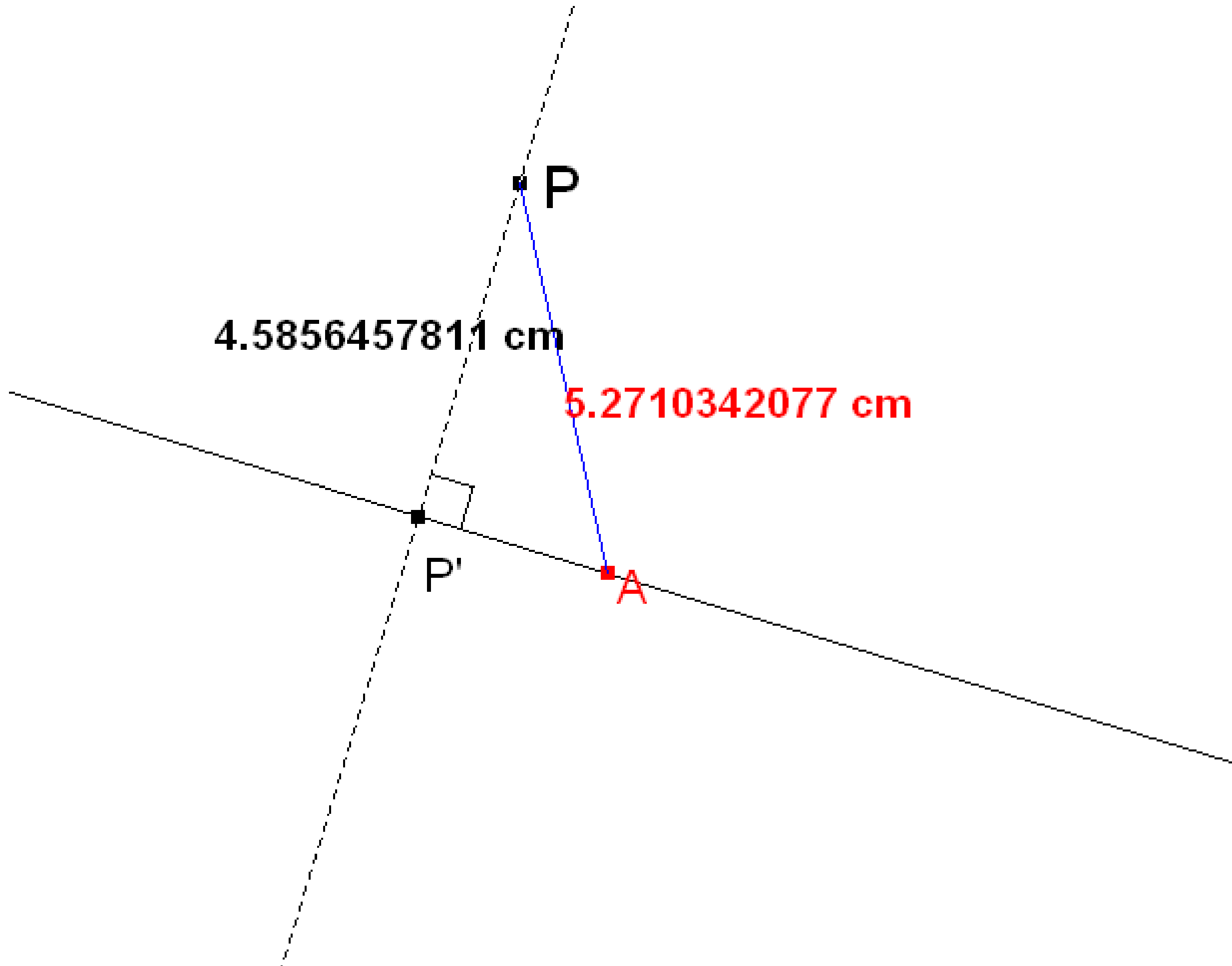
Zadanie 1

Dana jest prosta ***k*** i punkt ***F*** nie leżący na niej.
Skonstruuj co najmniej cztery punkty, których odległość od punktu ***F*** i prostej ***k*** jest taka sama.

Rozwiązanie:
Zauważ, że pojęciem które musisz znać w tym zadaniu jest odległość punktu od punktu i punktu od prostej.
Na pewno wiesz co to jest odległość punktu od punktu.
Tę mierzysz zawsze po najkrótszej drodze łączącej punkty, czyli po odcinku, którego końcami są te punkty.

Gorzej może być z odległością punktu ***P*** od prostej. Tutaj musisz znaleźć na prostej taki punkt ***P'***, by odcinek łączący oba punkty był najkrótszy. Co to za punkt? Jak go skonstruować?

Popatrz na poniższy aplet. Poruszaj punktem ***A*** po prostej i obserwuj, jak się ma odległość punktu ***P*** od **A** względem długości odcinka ***PP'***?



Uzupełnij zapis: długość ***PA*** jest zawsze …………..od długości ***PP’***. **(01)**
Jak skonstruowany jest punkt ***P’***?
Aby odpowiedzieć na to pytanie poruszaj na aplecie punktem ***P***. Czy już wiesz, jak powstaje punkt ***P’*** z punktu ***P*** ?

Opisz konstrukcję, w wyniku której powstał punkt *P’*. **(02)**

Punkt P’ nazywamy rzutem prostokątnym punktu P na prostą.

Zatem:
Odległością punktu od prostej jest jego odległość od …………………
…………….. – uzupełnij ten zapis **(03)**

Czy powyższe fakty pozwolą Ci rozwiązać zadanie?
Wróćmy do zadania.

Wykonaj na kartce rysunek pomocniczy.
Postaraj się na nim odnaleźć przynajmniej jeden punkt spełniający warunki zadania.

Który to punkt? Opisz dokładnie jego położenie **(04).**

Dwa kolejne punkty znajdziesz wiedząc, że muszą one być równo odległe od prostej ***k*** i od prostej ***FF’***.

Opisz dokładnie położenie tych dwóch punktów **(05).**

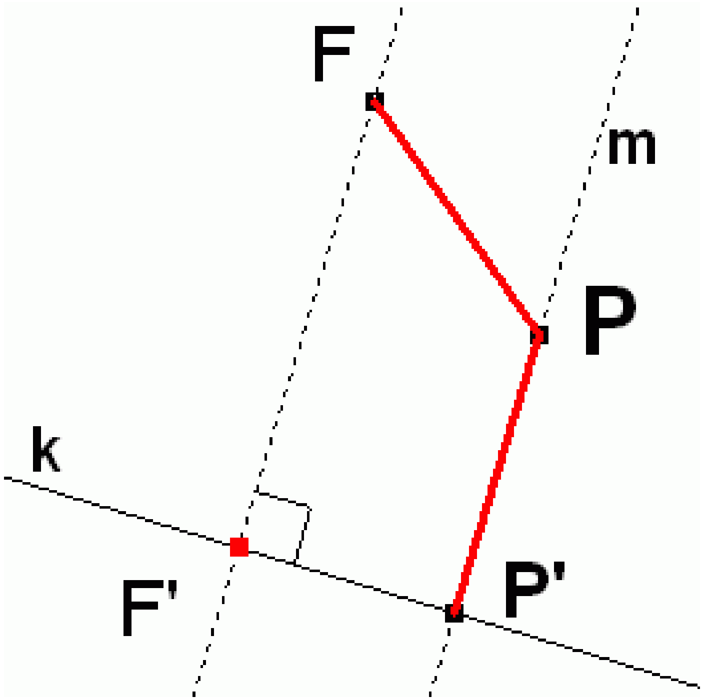
Masz już trzy punkty spełniające warunki zadania - poniższy aplet.

Poruszaj punktem ***F*** lub prostą ***k*** i obserwuj położenie punktów ***(1)***, ***(2)***, ***(3)***.

Kolej na znalezienie czwartego punktu.
Wiesz już, że ma być oddalony od prostej ***k*** tak samo, jak od punktu ***F***.
Mówiąc o jego odległości od prostej ***k*** wiemy, że odległość ta mierzona jest wzdłuż prostej prostopadłej do ***k***.
Wystawmy więc dowolną prostą ***m*** prostopadłą do ***k***.

Już wiesz, że poszukiwany punkt ***P*** musi leżeć na prostej ***m***.

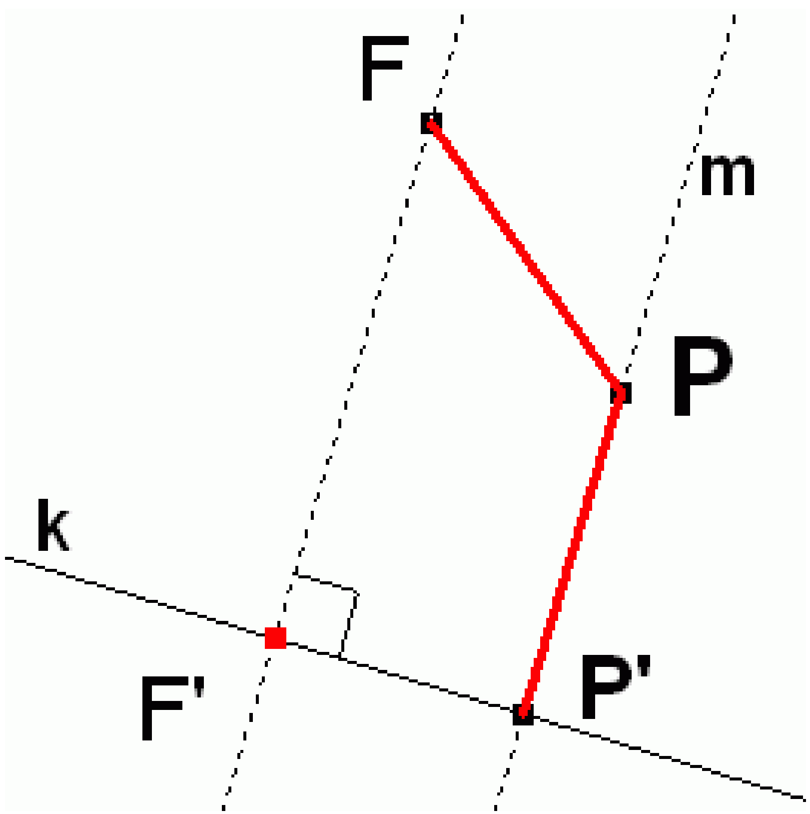
Dokonajmy analizy rozwiązania, zakładając, że znamy już położenie punktu ***P*** na prostej ***m***. Niech ***P'*** będzie rzutem prostokątnym punktu ***P*** na prostą ***k***.
Odległość punktu ***P*** od prostej ***k*** to wielkość ***PP'.***



Ale ta odległość zgodnie z treścią zadania musi być równa odległości ***PF***.

Mamy więc warunek: dla każdego ***P: PF = PP'***

Czy wiesz, jak nazywa się zbiór punktów ***P***, które są tak samo odległe do dwóch ustalonych punktów ***F*** i ***P***' ? **(06)**

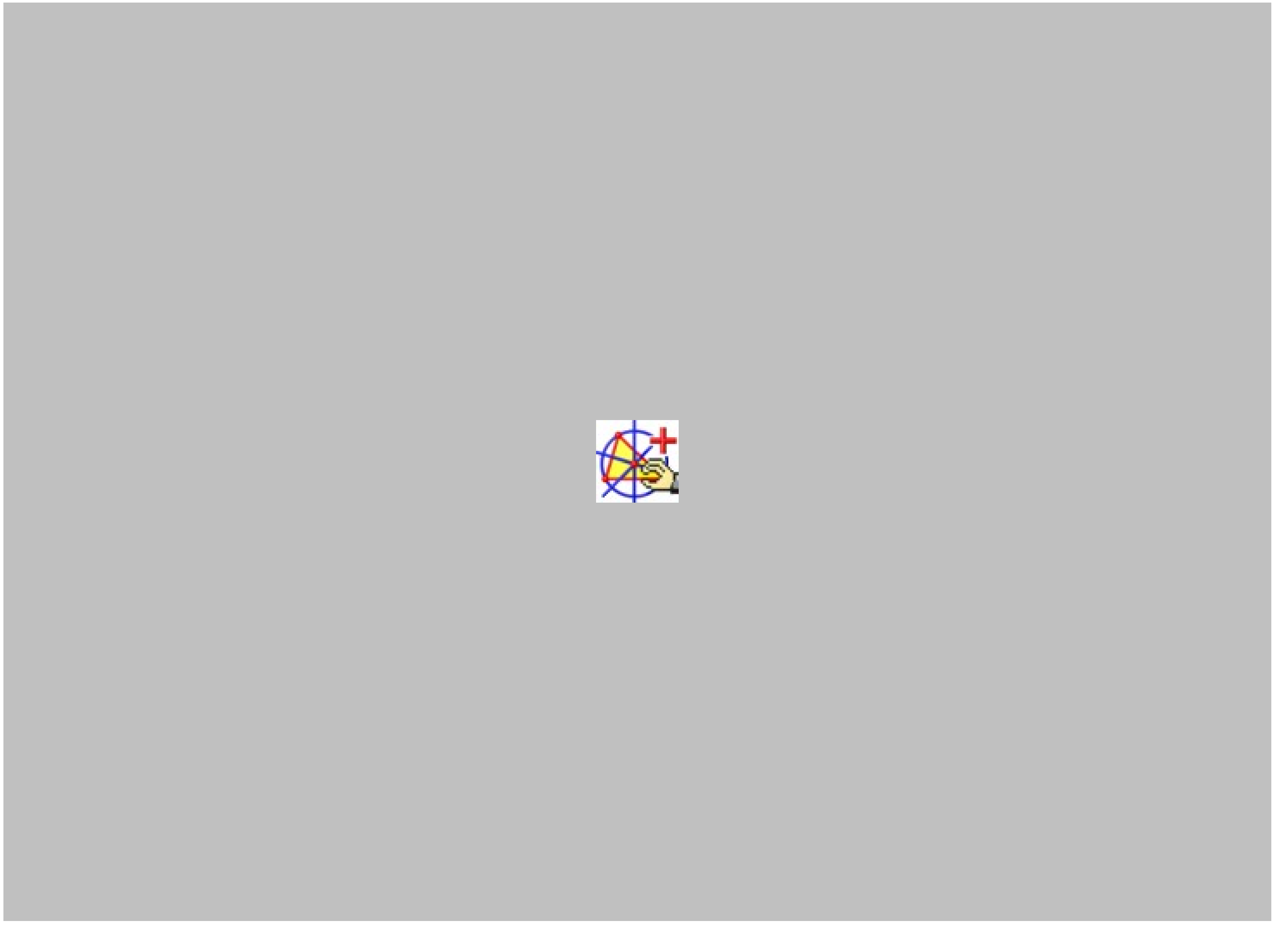


Zbiór tych punktów tworzy oczywiście symetralną tych punktów.
Punkt ***F*** jest ustalonym punktem, zaś punkt ***P'*** możemy położyć dowolnie na prostej ***k***, więc położenie symetralnej będzie zależało tylko od położenia punktu ***P'*** na prostej ***k***.
Myślę, że ten tok rozumowania pozwoli Ci skonstruować czwarty punkt spełniający warunki zadania.

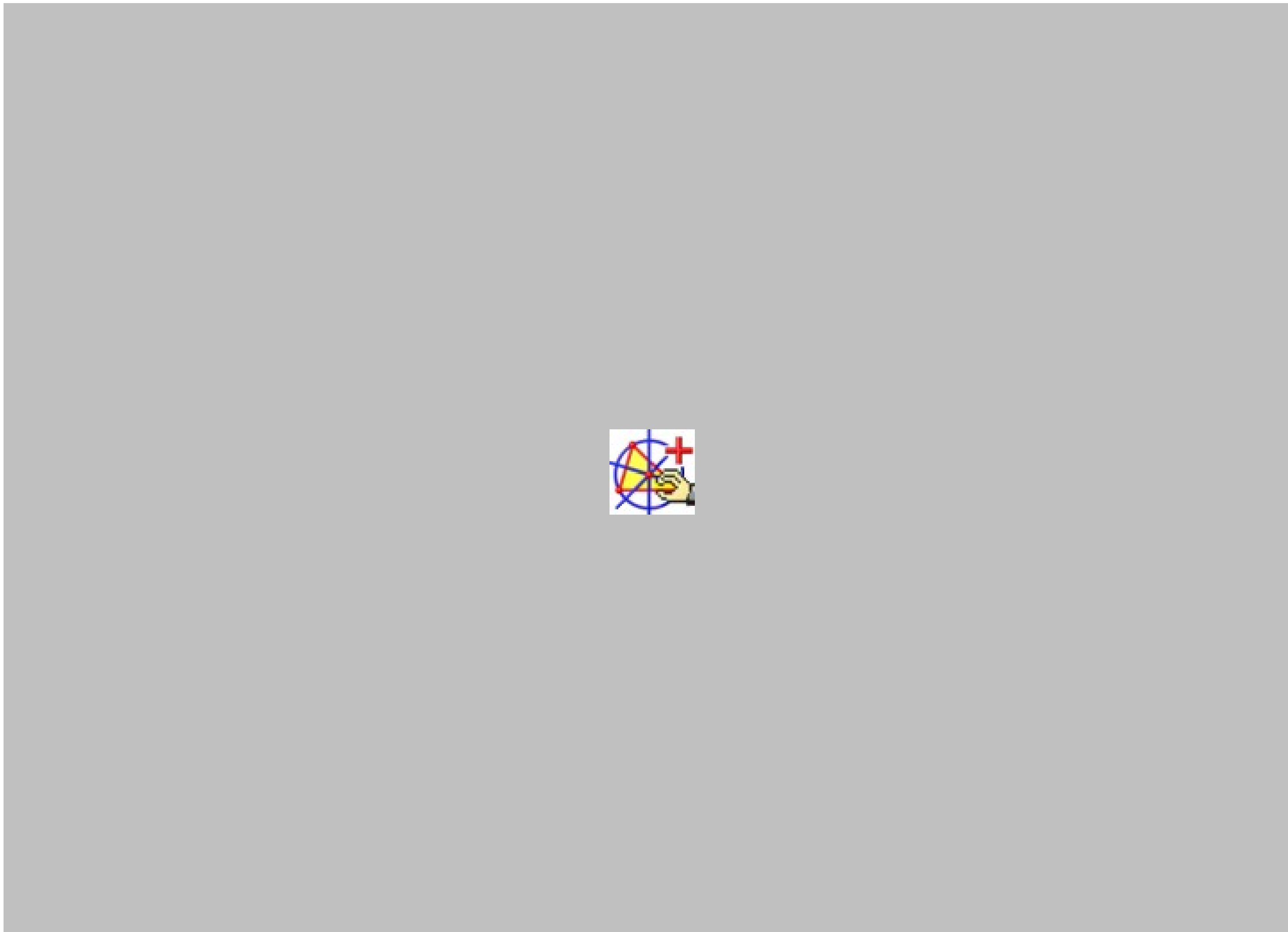
Dokonaj opisu tej konstrukcji i prześlij go na platformę. **(07)**

Twoja konstrukcja jest statyczna, to znaczy wykonana dla ustalonego punku ***P’***, wybranego na prostej ***k***.
Jeśli tę konstrukcję powtórzysz w programie Cabri II Plus, to masz możliwość zmiany położenia punkt ***P’***.
Wówczas zmieni się też położenie punktu ***P***, gdyż zależy ono wyłącznie od wyboru punktu ***P’***.
Aplet na kolejnym slajdzie przypomni Ci ponownie wszystkie kroki konstrukcji punktu ***P***. - włączaj kolejne przyciski.

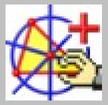
Włączaj kolejne przyciski.



Włączmy ślad punktu ***P.*** Poruszajmy punktem ***P'***. Co wykreśla wówczas punkt ***P*** ?

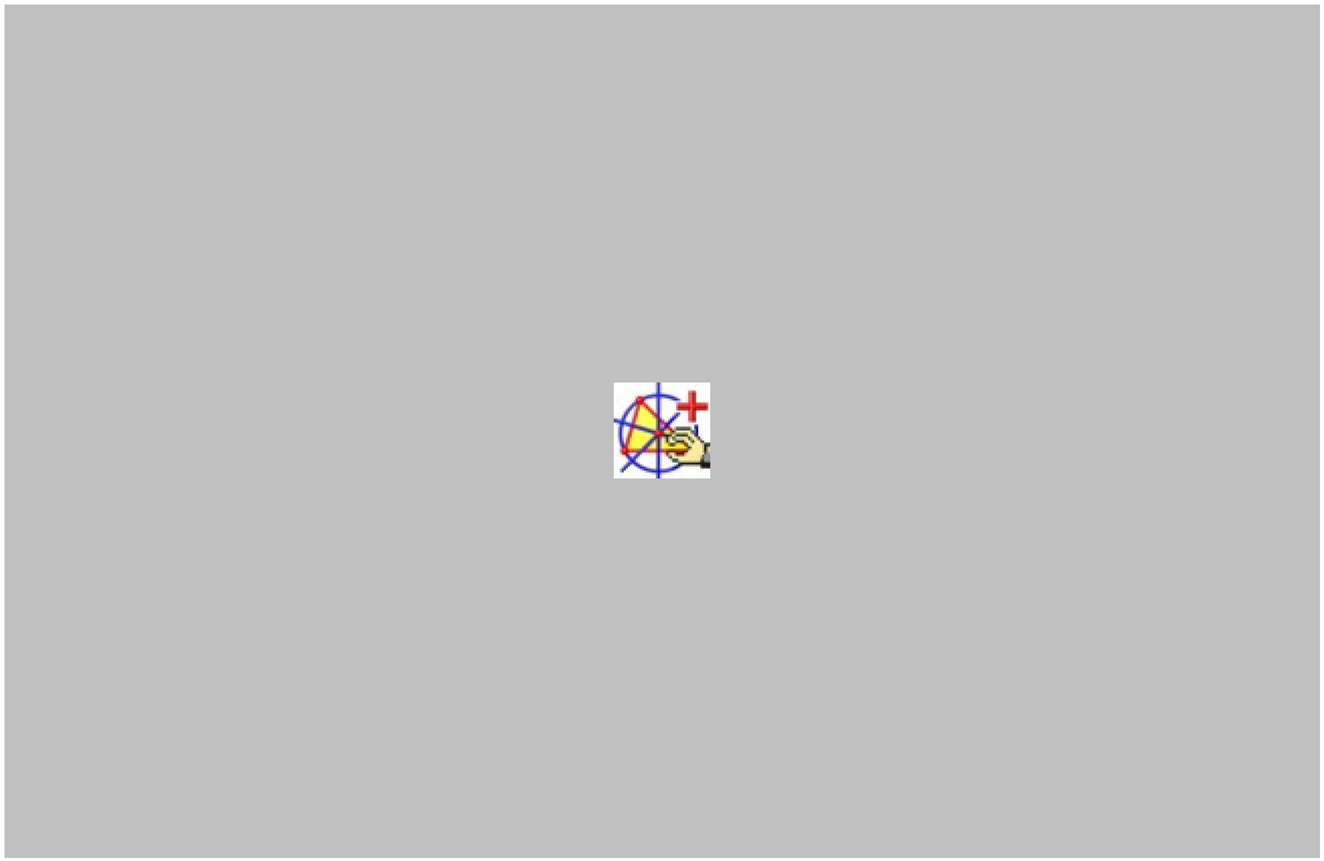


Teraz wykorzystamy narzędzie Cabri „***miejsce geometryczne***”, które pozostawia ślad na stałe, mimo zmiany położenia punktów stałych konstrukcji.

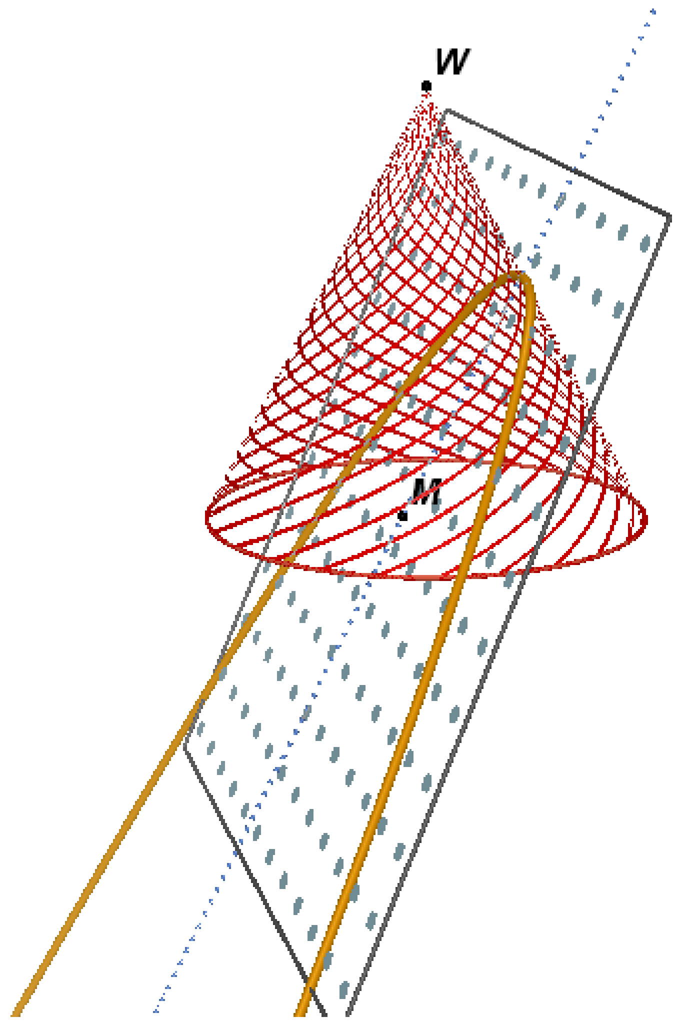


Co się dzieje z krzywą, gdy zmieniamy położenie punktu ***F*** względem prostej ***k***? **(08)**

Uzyskana krzywa to ***parabola***. Punkt ***F*** nazywamy ***ogniskiem*** tej paraboli, zaś prostą ***k*** jej ***kierownicą***.



Krzywa, którą wykreśla punkt ***P*** to znana Ci z algebry ***parabola***, wykres funkcji kwadratowej. Powstaje z przecięcia stożka płaszczyzną równoległą do tworzącej stożka – poruszaj całą sceną (z wciśniętym prawym klawiszem myszy) oraz punktami ***M*** i ***W*** i sprawdź ten fakt.



Zadanie 2

Dany jest odcinek ***AB*** oraz dwa punkty F_1 ***i*** F_2 nie leżące na tym odcinku, przy czym długość odcinka jest mniejsza niż odległość pomiędzy punktami F_1 ***i*** F_2 .

Skonstruuj co najmniej jeden punkt ***P*** taki, by suma odległości tego punktu od F_1 oraz F_2 była równa długości odcinka ***AB***, czyli aby:

$$PF_1 + PF_2 = AB$$

ROZWIĄZANIE

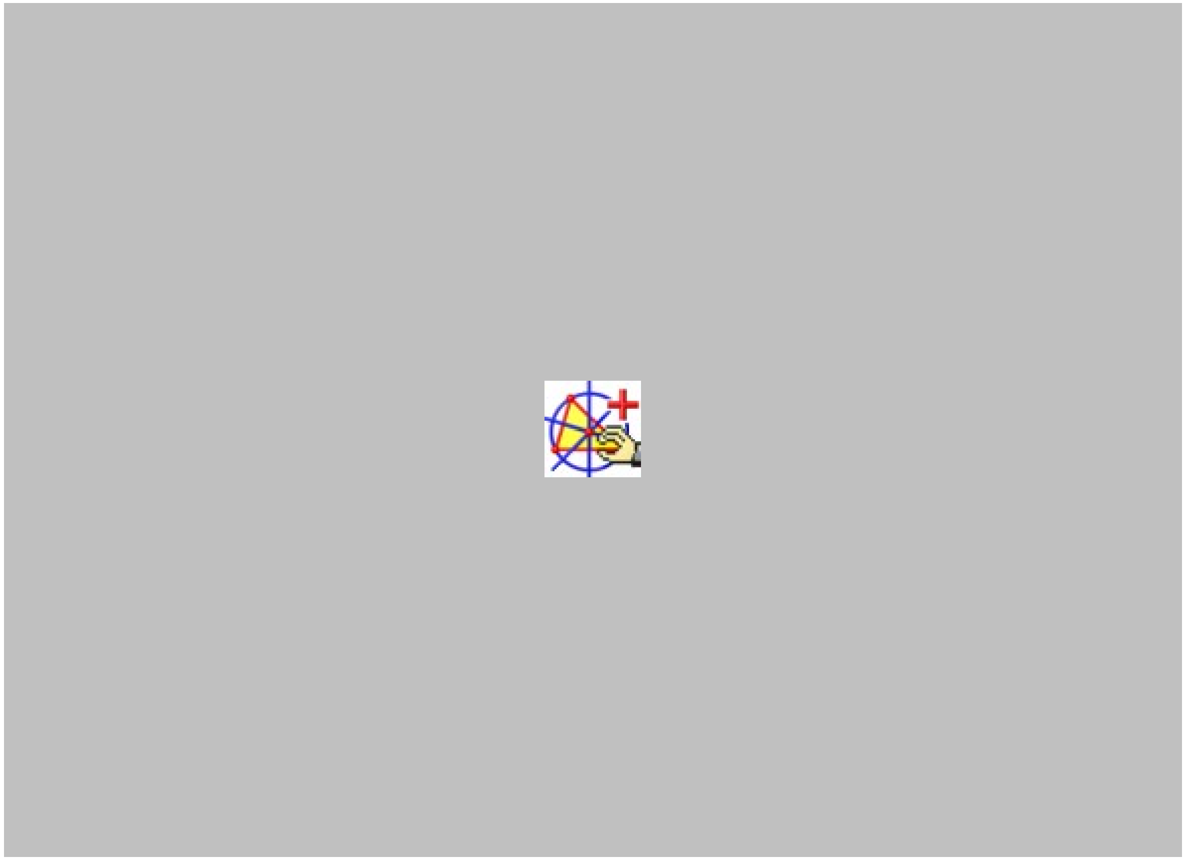
Sporządź rysunek i zauważ, że każdy punkt ***M*** odcinka ***AB*** spełnia warunek:

AM +MB = AB.

Ale punkt ***M*** nie spełnia warunku $F_1M + F_2M = AB$

Widać, że odległości ***MA*** i ***MB*** należy odpowiednio odmierzyć z punktów F_1 i F_2

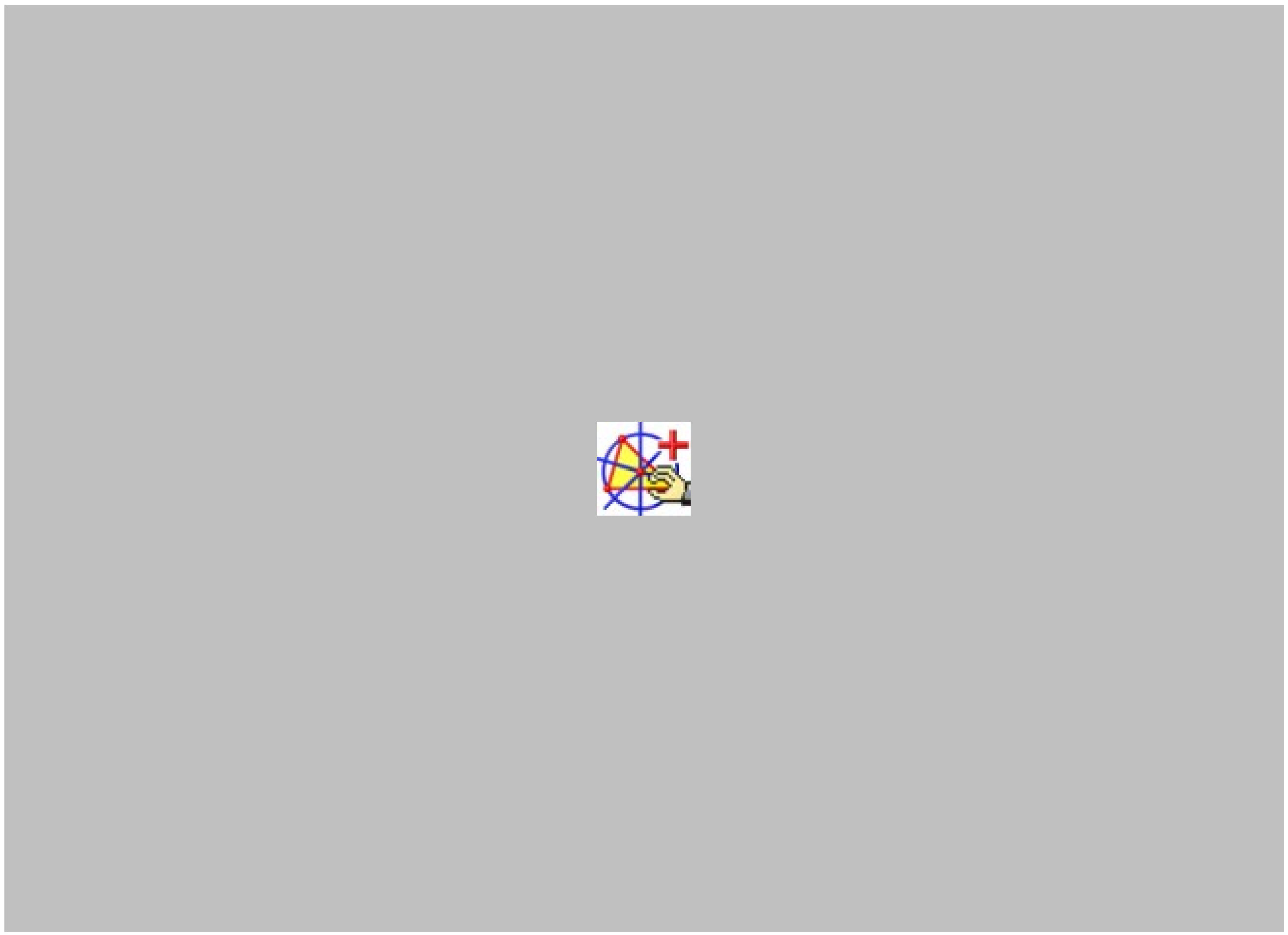
Jak i czym to zrobić na kartce papieru? **(09)**



Wykreśl dwa okręgi – jeden o środku ***F_1*** i promieniu ***AM***, drugi o środku ***F_2*** i promieniu ***MB.*** Czy te okręgi przecięły się?

Czy zawsze przetną się ze sobą? Od czego to zależy? **(10)**

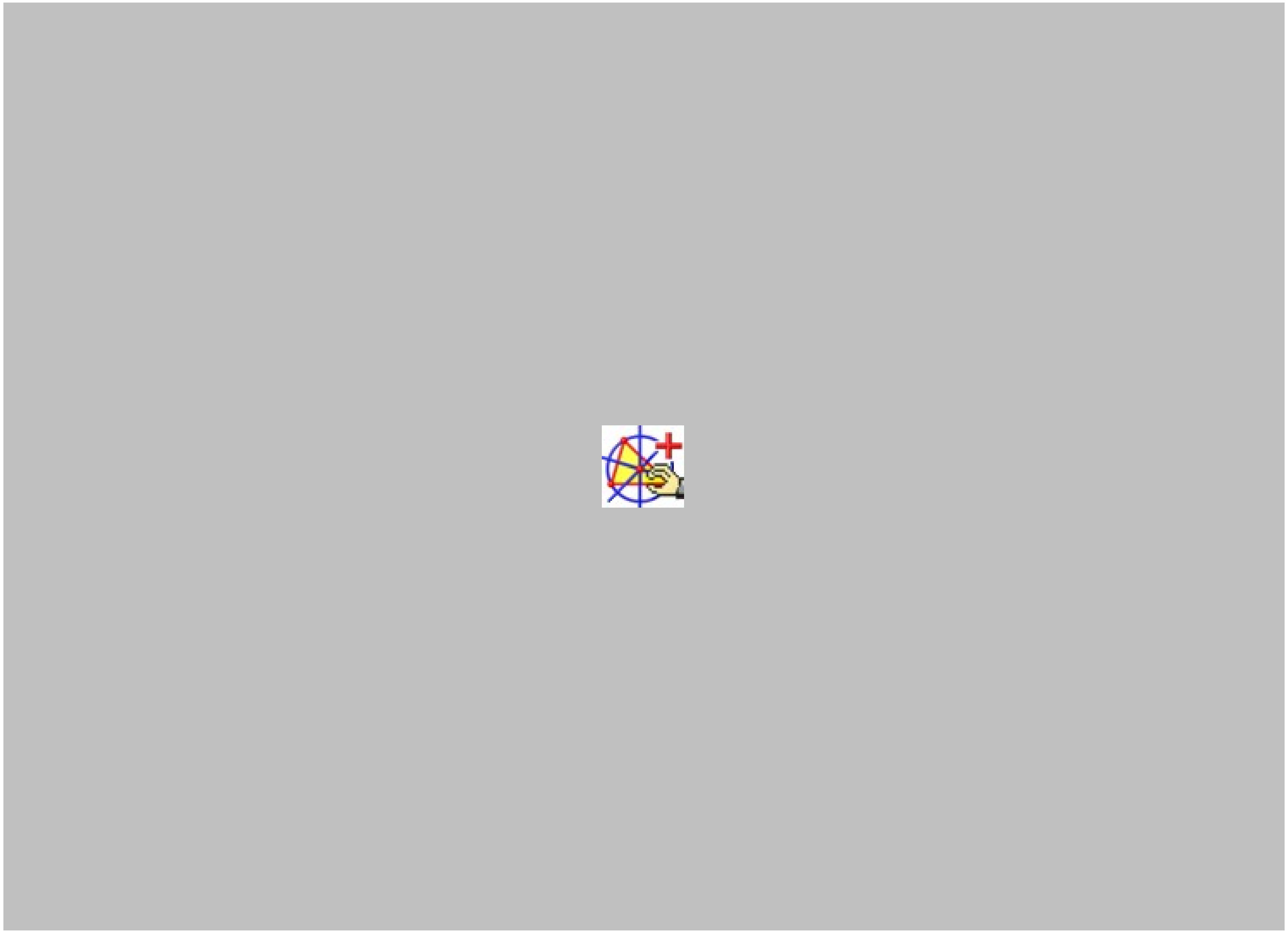
Zmień odległość punktów ***A*** i ***B***.



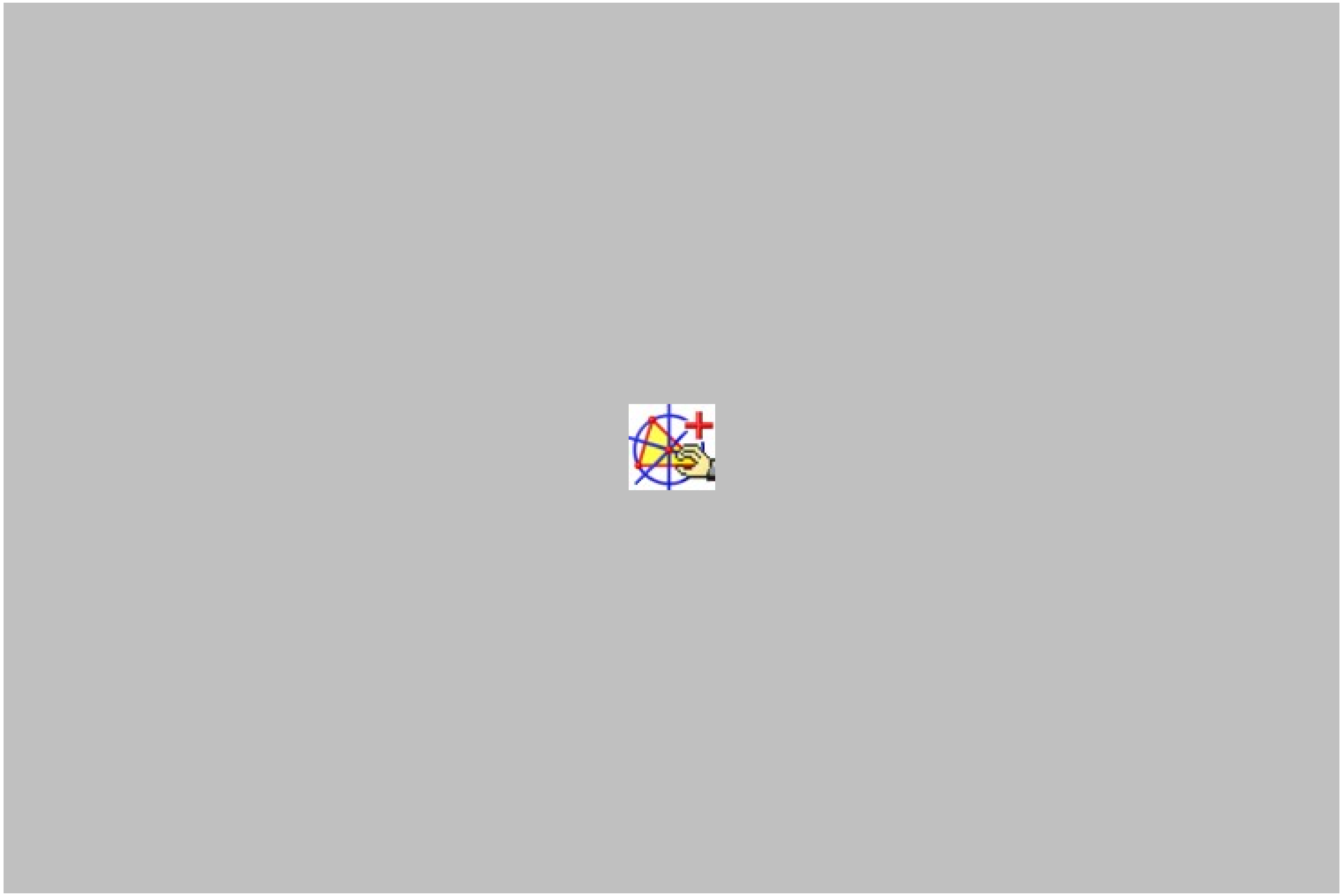
Czy rozwiązałeś już zadanie? Ile punktów je spełnia?

Włączmy ślad punktów P_1 i P_2. Poruszaj punktem M po odcinku AB. Ile teraz widzisz punktów spełniających rozwiązanie?

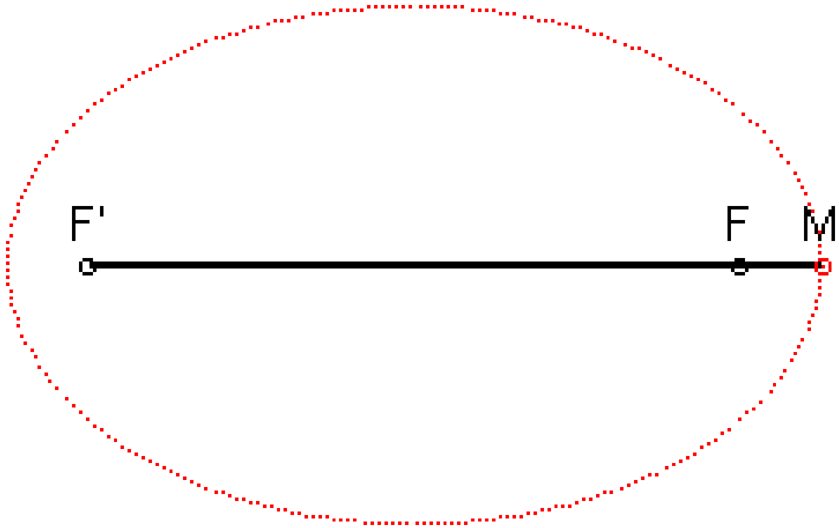
Co one tworzą? **(11)**

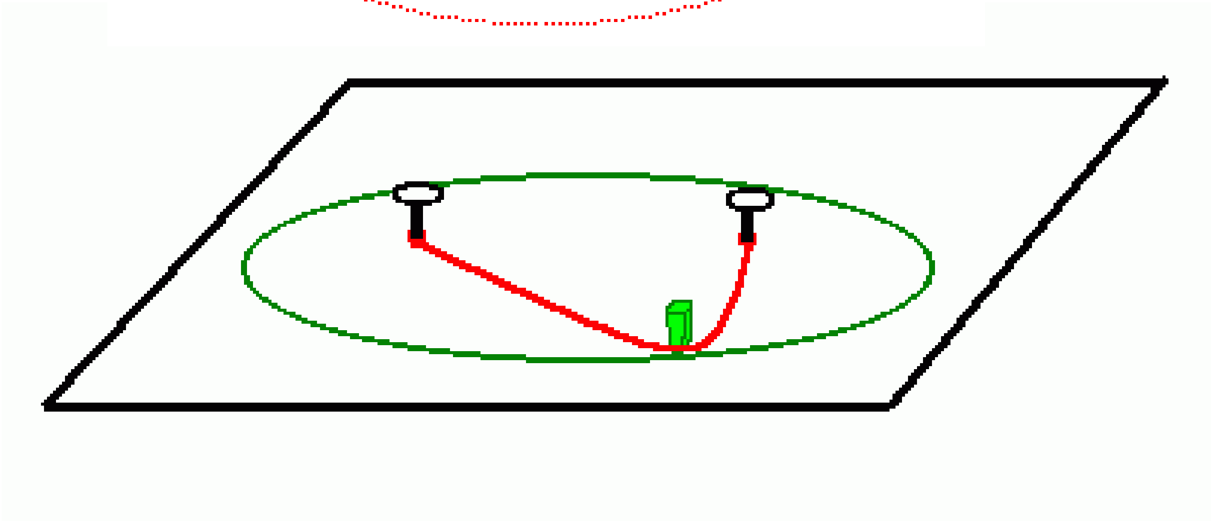


Punkty ***P*** kreślą oczywiście krzywą zwaną elipsą. Punkty F_1 i F_2 nazywamy ogniskami elipsy. Czy elipsa ta może być okręgiem? Jakie warunki początkowe musisz wówczas zmienić w konstrukcji tej elipsy? **(12)**

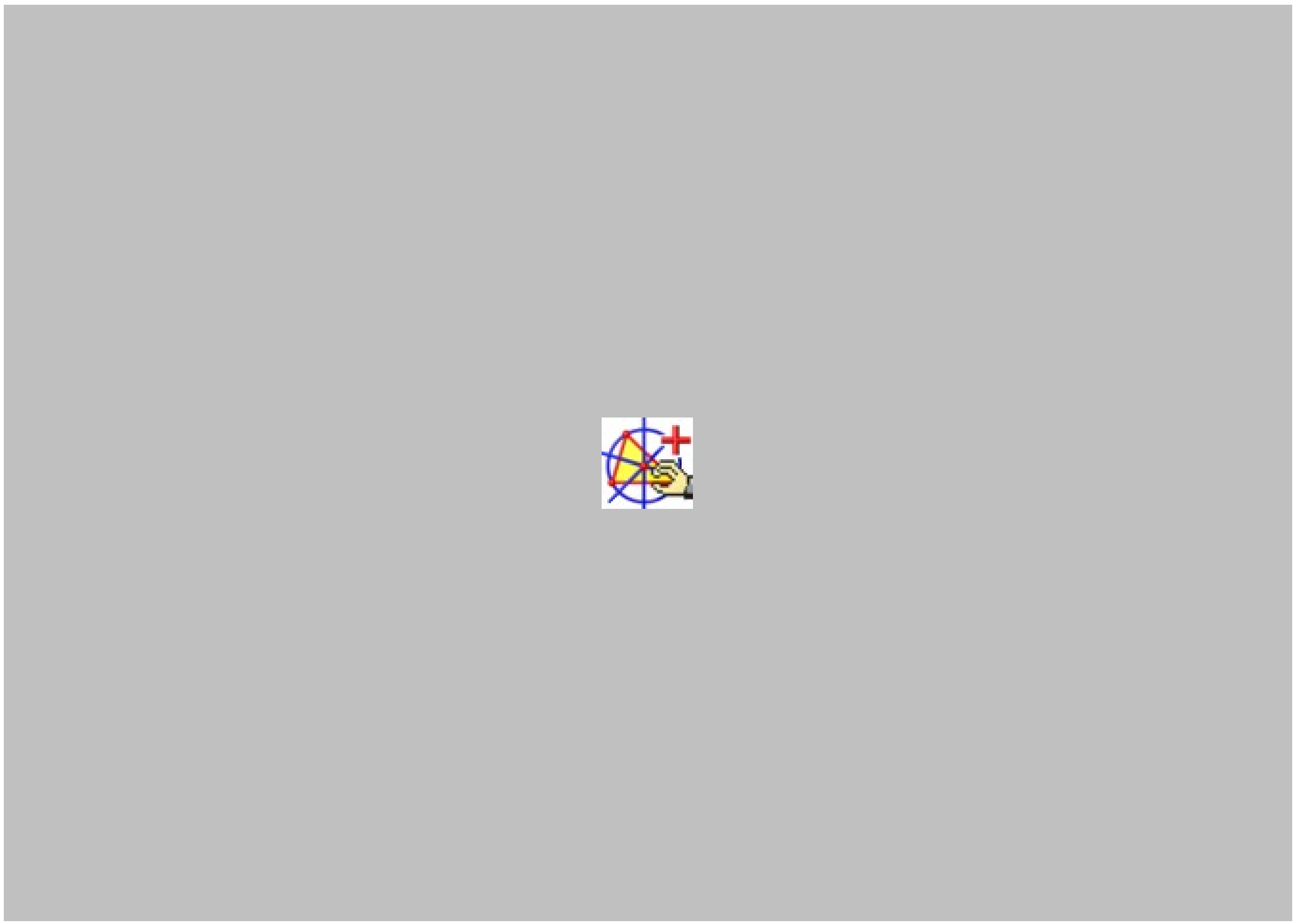


Krzywą tę możesz skonstruować w warunkach domowych. Wystarczy wbić w kawałek deski dwa gwoździe, zawiązać końce sznurka do tych gwoździ i naciągając sznurek kreślić ołówkiem krzywą.





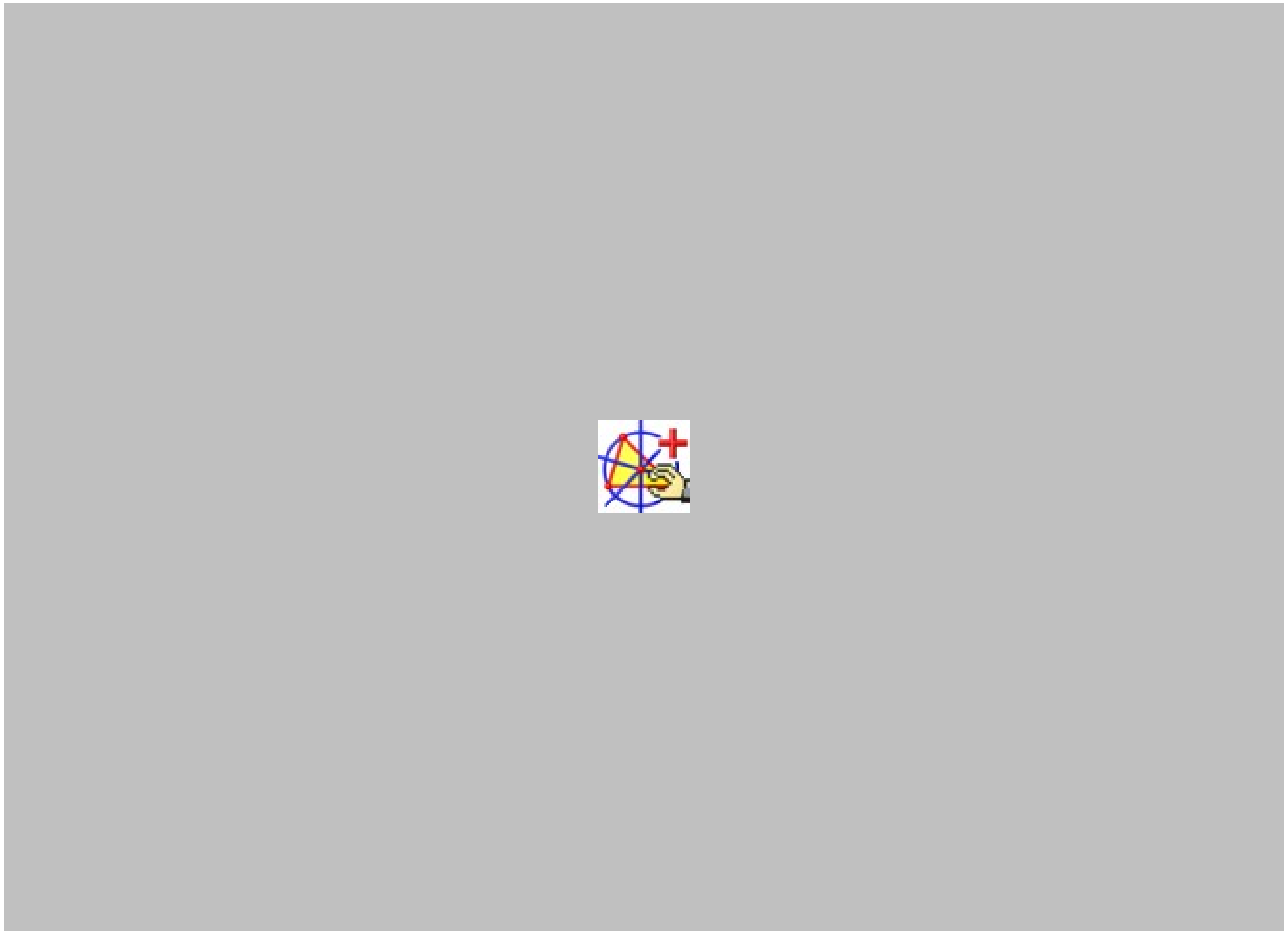
Elipsa ma bardzo wiele interesujących własności. Jedną z nich jest fakt, że każdy promień światła wychodzący od jednego z ognisk elipsy po odbiciu zawsze dochodzi dokładnie do drugiego ogniska. Sprawdź to na poniższym aplecie chwytając myszą za półprostą (pojawi się napis *this ray*) wychodzącą z punktu F_2



Kula bilardowa odbita w dowolnym kierunku stołu eliptycznego z jednego z ognisk zawsze po odbiciu wpadnie do otworu znajdującego się w drugim ognisku.

Ta własność była również wykorzystana do celów politycznych (elipsoidalne sklepienie świątyni w Egipcie a zaćmienie Słońca opisane w „Faraonie” Bolesława Prusa).

Poruszaj punktem ***P*** po górnej części elipsy i dostrzeż opisaną własność



Możesz tu dostrzec jeszcze inną własność. Dwusieczną kata F_1PF_2 jest prostopadła do stycznej do elipsy. Poruszaj punktem P

Włączmy dodatkowo ślad tej prostopadłej. Czym jest ta prostopadła do dwusiecznej kąta F_1PF_2? **(13).** Poruszaj punktem P

Zadanie 3

Dany jest trójkąt ***ABC***, w którym żaden z kątów nie przekracza miary 120°. Wewnątrz trójkąta skonstruuj taki punkt ***P***,
aby suma jego odległości od wierzchołków tego trójkąta była najmniejsza.

To zadanie postawił a później również rozwiązał francuski matematyk

Pierre Fermat (1601-1665)

Pierwszy krok w poszukiwaniu rozwiązania może być bardzo infantylny. Chwyć myszą punkt ***P*** i poruszając go wewnątrz trójkąta odczytuj sumę jego odległości od wierzchołków trójkąta, obliczona przez kalkulator Cabri.

Ta metoda nie należy do matematycznych, ale daje Ci wyobrażenie przybliżonego położenia, punktu ***P***, by ***AP+BP+CP*** było minimalne.

Obróćmy trójkąt ***BCP*** wokół punktu B o kąt o mierze -60° (zgodnie ze wskazówkami zegara). Otrzymany trójkąt oznaczmy ***BC'P'***.

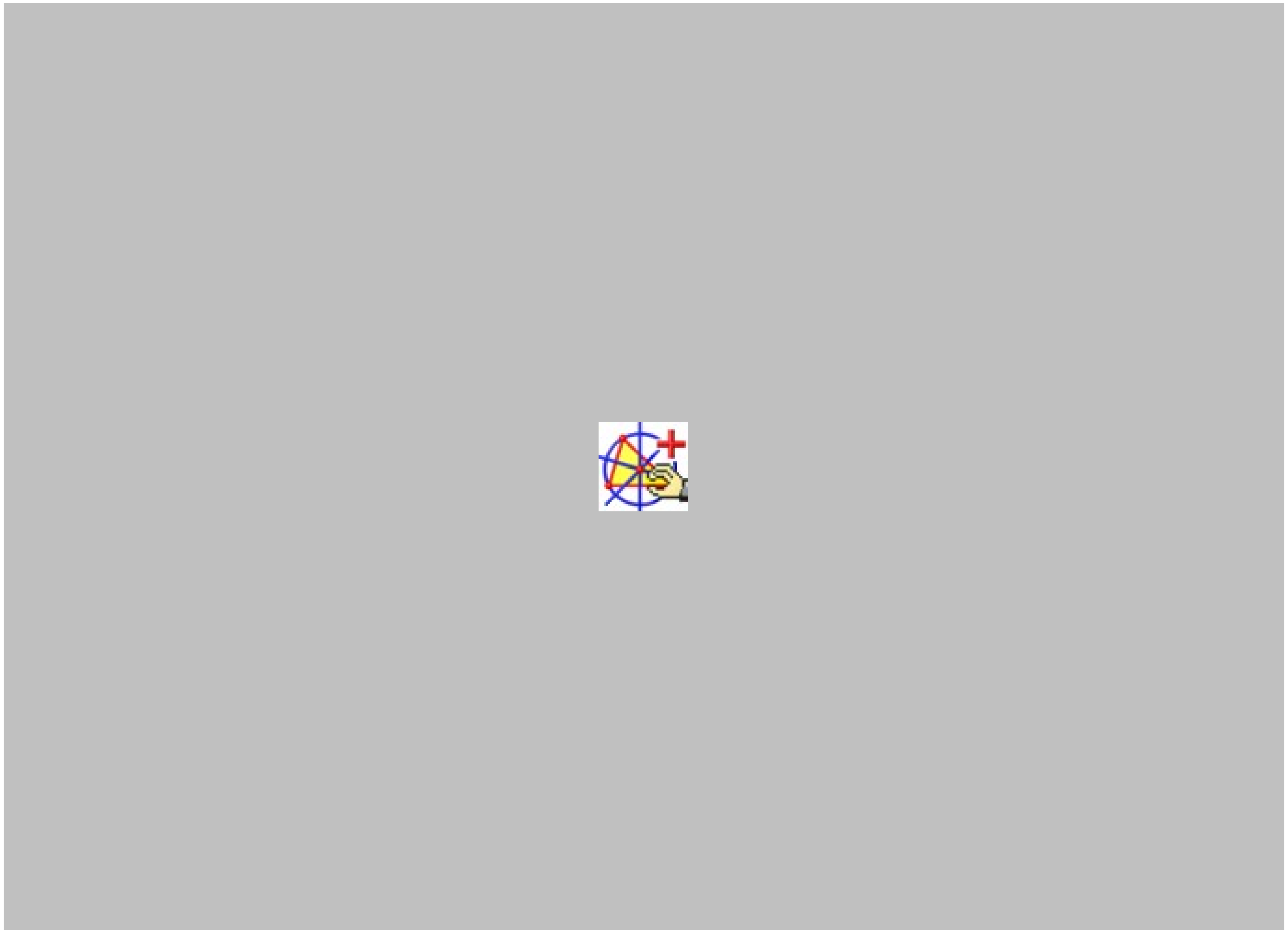
Na podstawie obserwacji uzupełnij zapis:

PC = ………

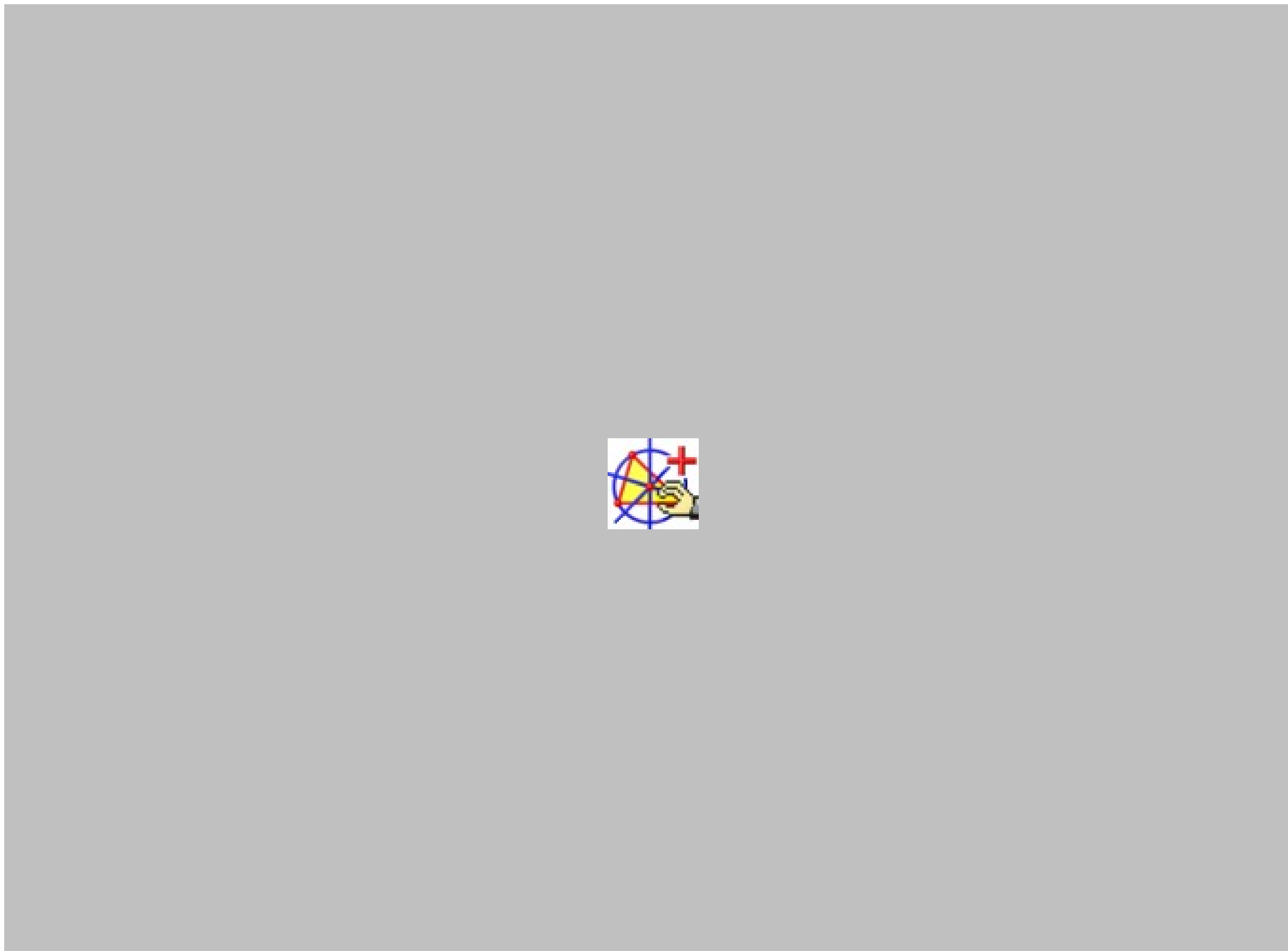
BP = ………

BC' = ……... (

Trójkąt ***BC’P’*** jest przystający do trójkąta ***BPC***, gdyż powstał w wyniku jego obrotu. Jakim trójkątem jest trójkąt ***BP’P***? **(15)**
Czym teraz można zastąpić sumę odcinków **AP + BP +CP**? **(16)**

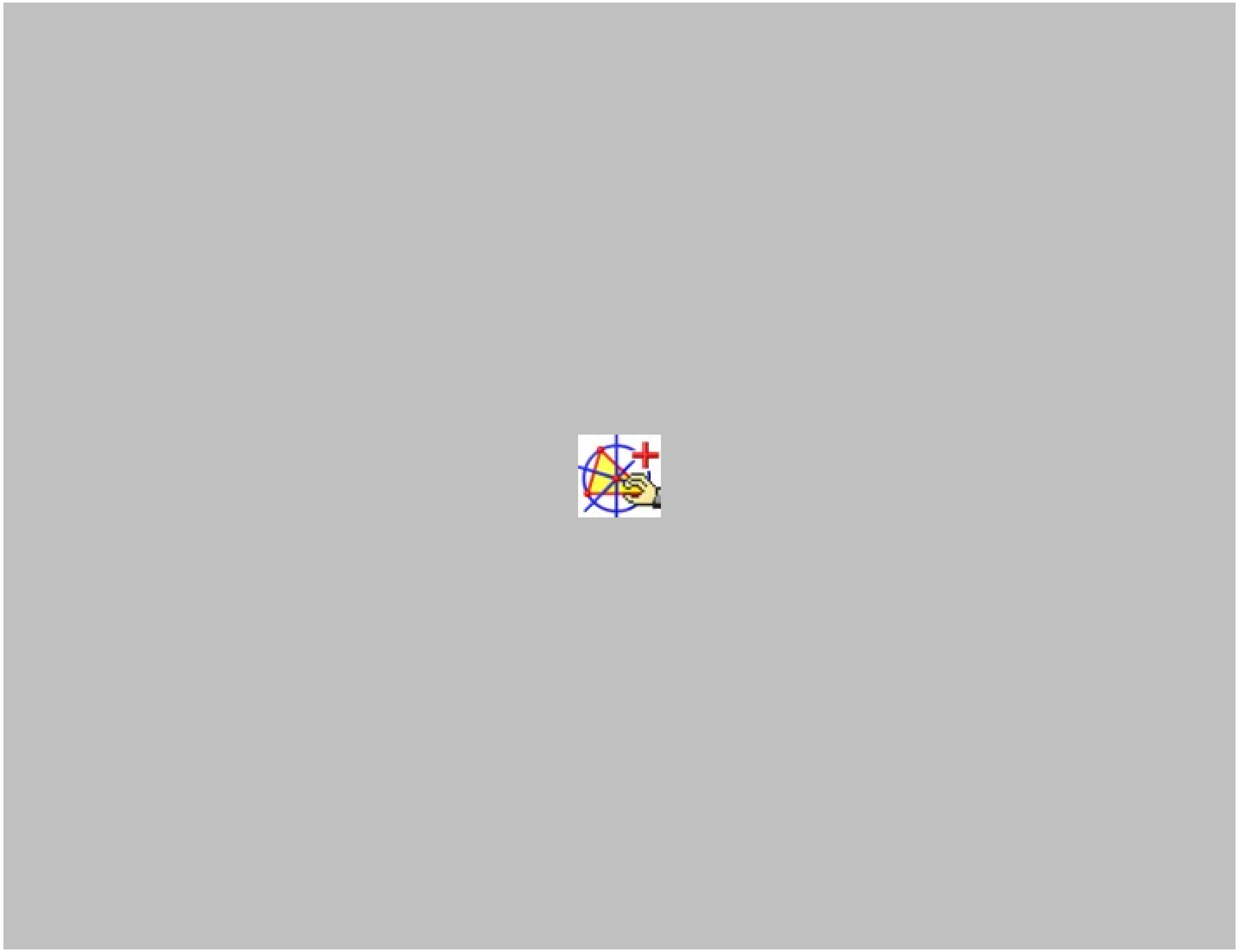


Pewnie zauważyłeś, że ***PA+PB+PC*** = ***AP + PP’ +P’C’***
Kiedy łamana ***APP”C”*** będzie najkrótsza? Gdzie musisz umieścić punkt ***P***, by ta łamana była najkrótsza? **(17)**
Posłuż się poniższym apletem. Poruszaj punktem ***P.***

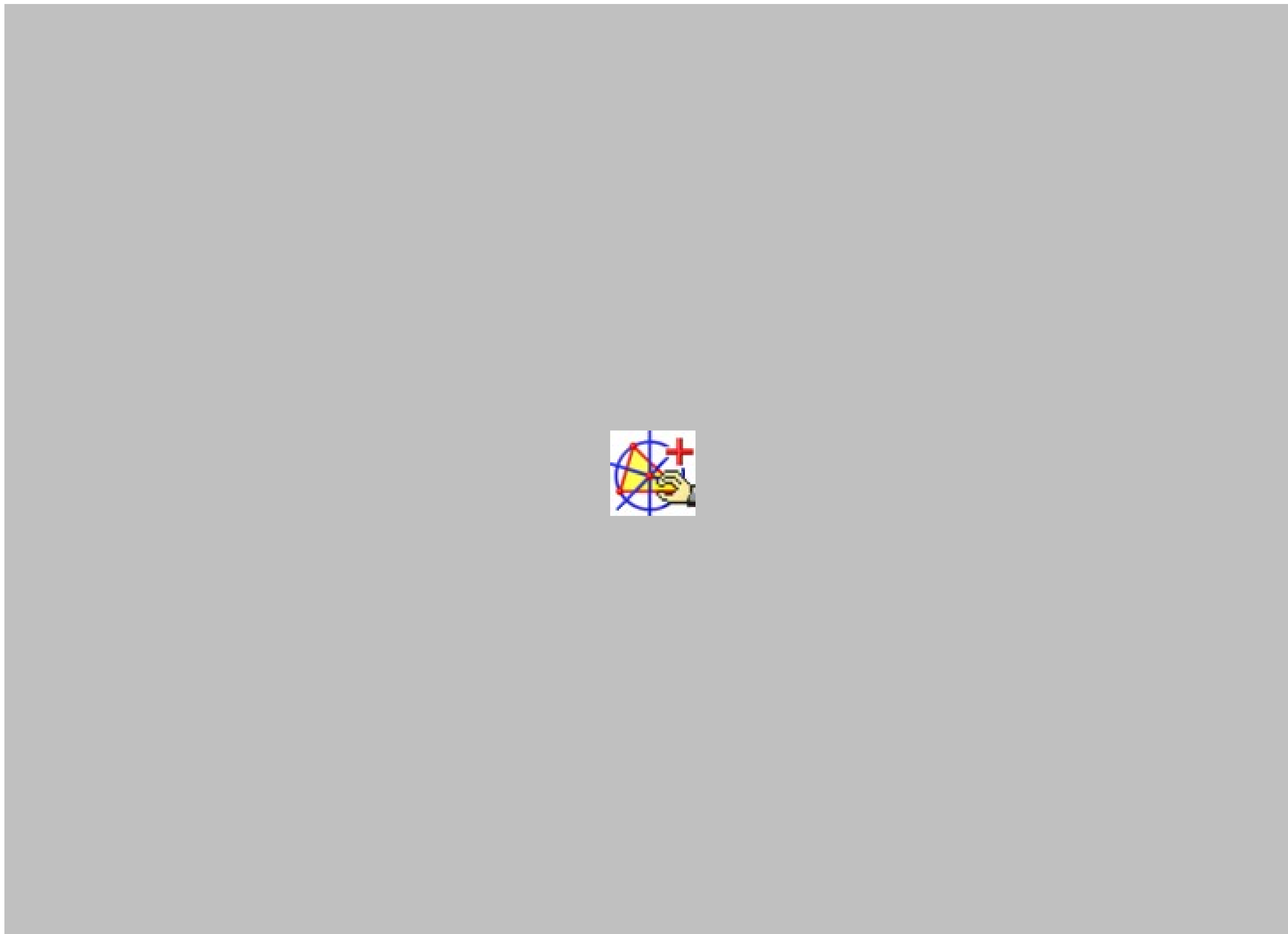


Już wiesz, że punkt ***P*** będzie spełniał warunki zadania gdy będzie leżał na odcinku ***AC'***. Ale jeszcze nie wiesz, gdzie dokładnie musi się na nim znaleźć.

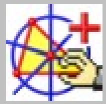
Wyobraź sobie więc, że zamiast obracać trójkąt ***BCP*** wokół punktu ***B*** obróciłbyś trójkąt ***ABP*** wokół punkt ***A*** o 60° zgodnie ze wskazówkami zegara – patrz poniższy aplet.



Gdzie znalazłby się wówczas obraz punktu ***P*** po obrocie? **(18)**
Czy ***P*** leżałby na odcinku ***CPP’’***? **(19)**



Evangelista Torricelli (1608 – 1647) - włoski fizyk i matematyk zauważył, że jeśli na bokach trójkąta ostrokątnego ***ABC*** dobudujemy trójkąty równoboczne ***ABC’***, ***BCA’*** i ***CAB’***, to odcinki ***AA’***, ***BB’*** i ***CC’*** są tej samej długości i przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten nazwano punktem Torricelliego.



Torricelli żył w czasach działalności matematycznej Fermata. Przypuszczalnie nie wiedział, że Pierre Fermat postawił swój problem i odkrył ten sam punkt ale o innych własnościach.
Przypatrz się uważnie na punkt Torricelliego i popatrz pod jakim kątem przecinają się ze sobą odcinki ***AA'***, ***BB''*** i ***CC'***? **(20)**

Geometria trójkąta jest niezwykle interesująca.
Po dziś dzień odkrywa się w niej coraz to nowsze twierdzenia.
Punkty które mają w trójkącie specjalne własności nazywamy ***punktami charakterystycznymi trójkąta***.

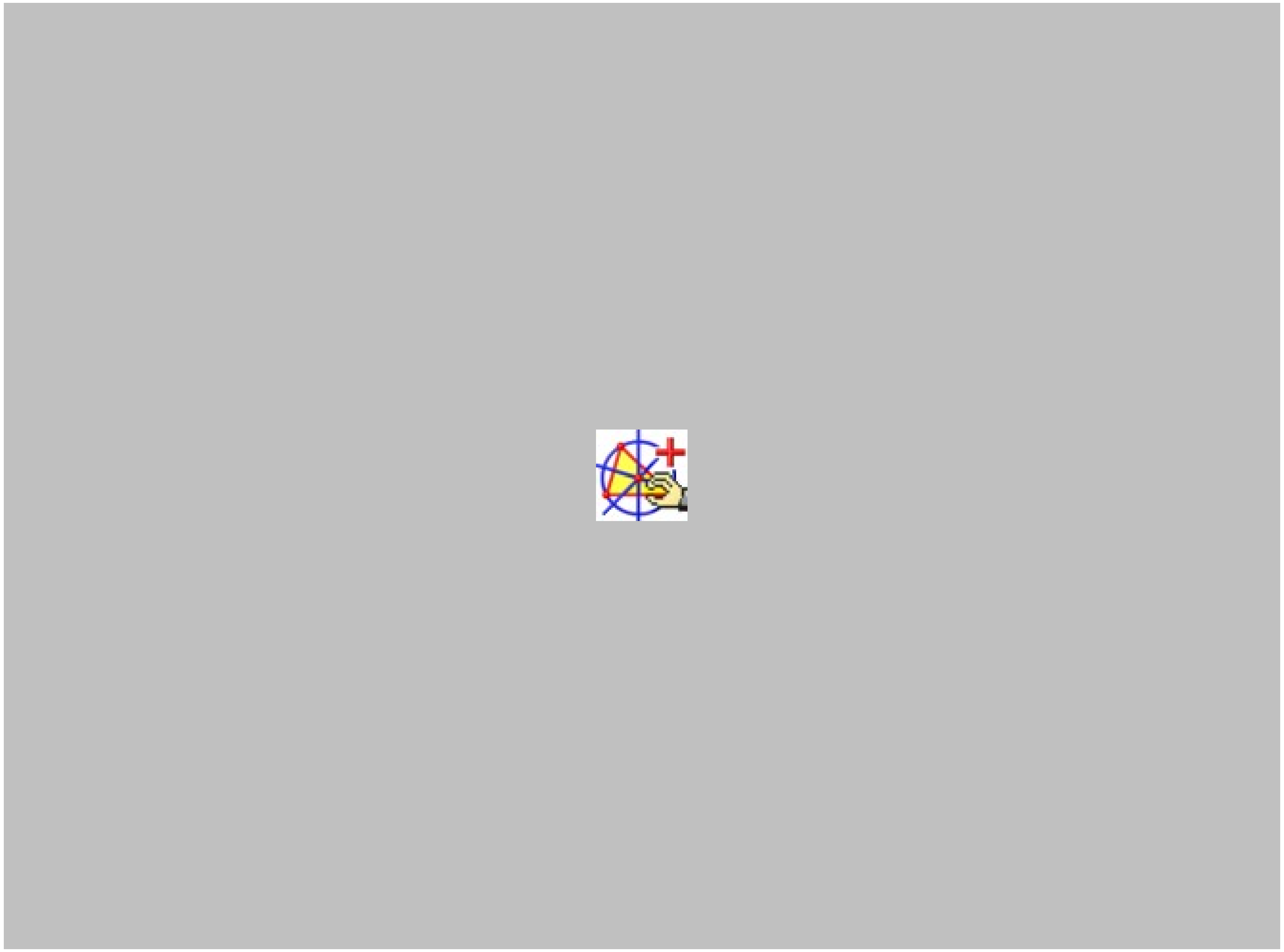
Oprócz punktu Torricelliego mamy jeszcze ponad 5000 punktów charakterystycznych trójkąta. Wszystkie zebrane przez profesora Clarka Kimberlinga można zobaczyć na stronie
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Zadanie 4

Skonstruuj styczną do dwóch okręgów o różnych promieniach.

Zacznijmy od przypomnienia, znanej Ci konstrukcji stycznej do okręgu. Włączaj kolejne kroki tej konstrukcji:

Teraz mamy dwa okręgi ***o(A,a)*** oraz ***o(B,b)***, każdy o innym promieniu (***a***>***b***). Wykonajmy analizę rozwiązania.

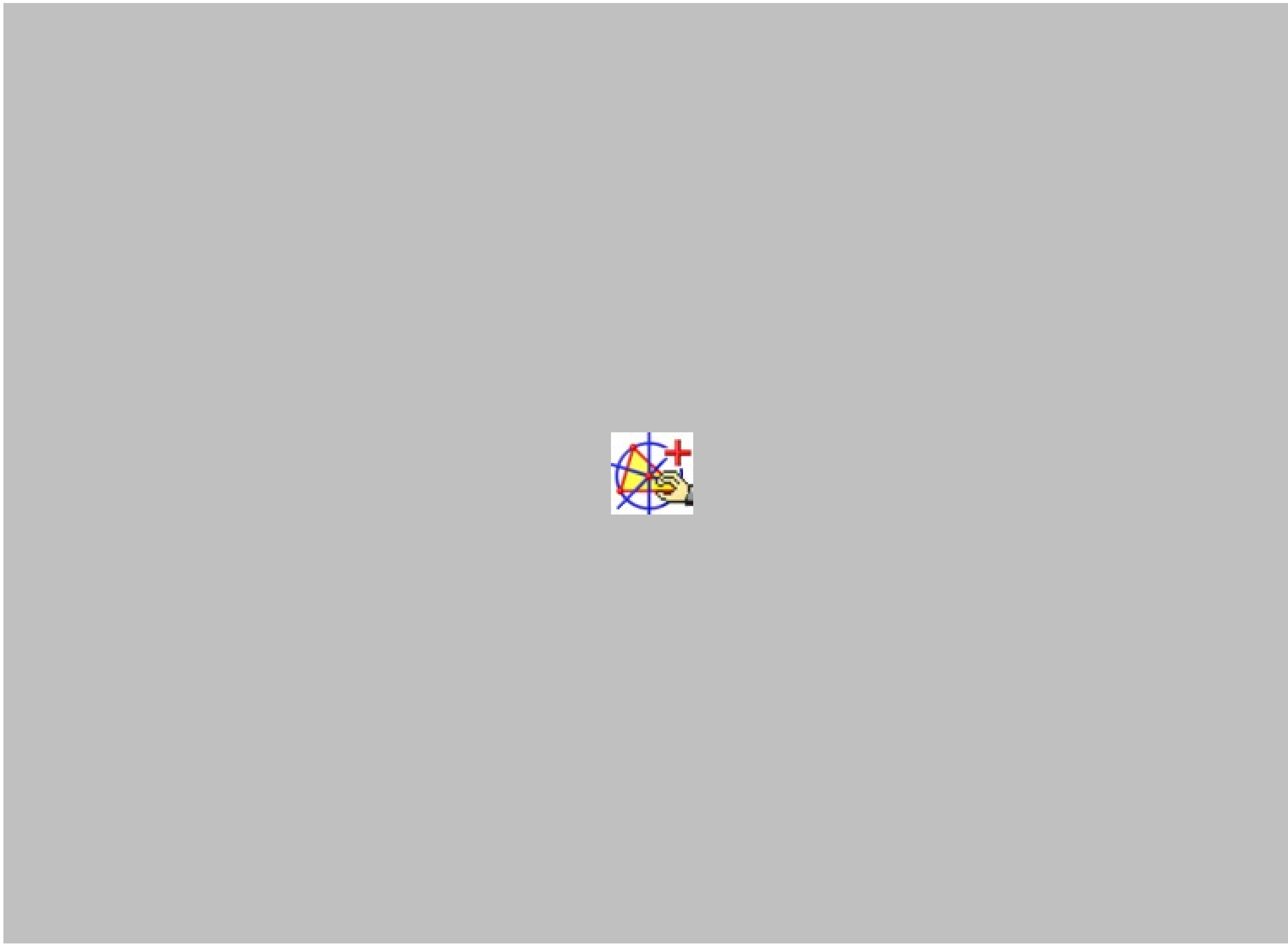


Załóżmy że już skonstruowaliśmy wspólną styczną do obu okręgów. Co z tego wynika?

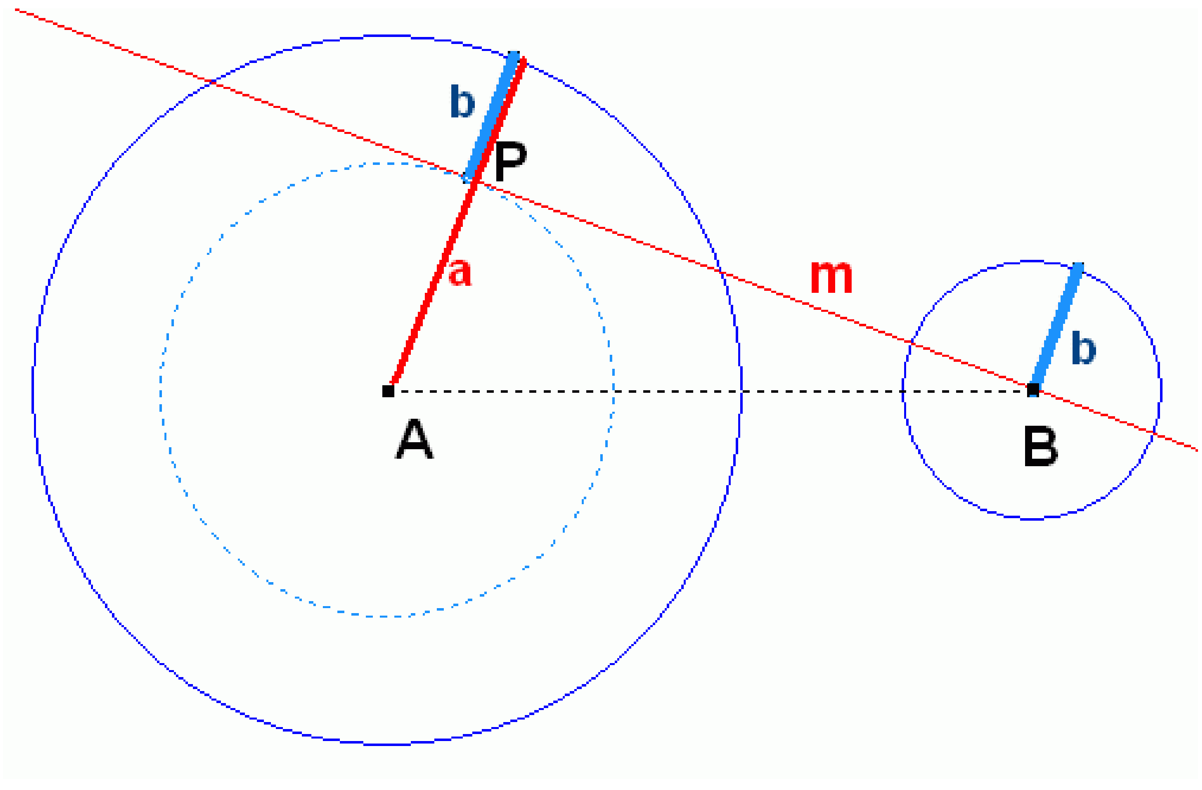
Oddalaj i przybliżaj punktem ***P*** prostą ***m***.

W pewnym momencie widzisz już tę styczną. A co widzisz, gdy prosta ***m*** przechodzi przez środek **B** mniejszego okręgu? **(21)**

Czy nie przypomina Ci to konstrukcji stycznej z punktu do jakiegoś okręgu? Jaki byłby jego promień? **(22)**



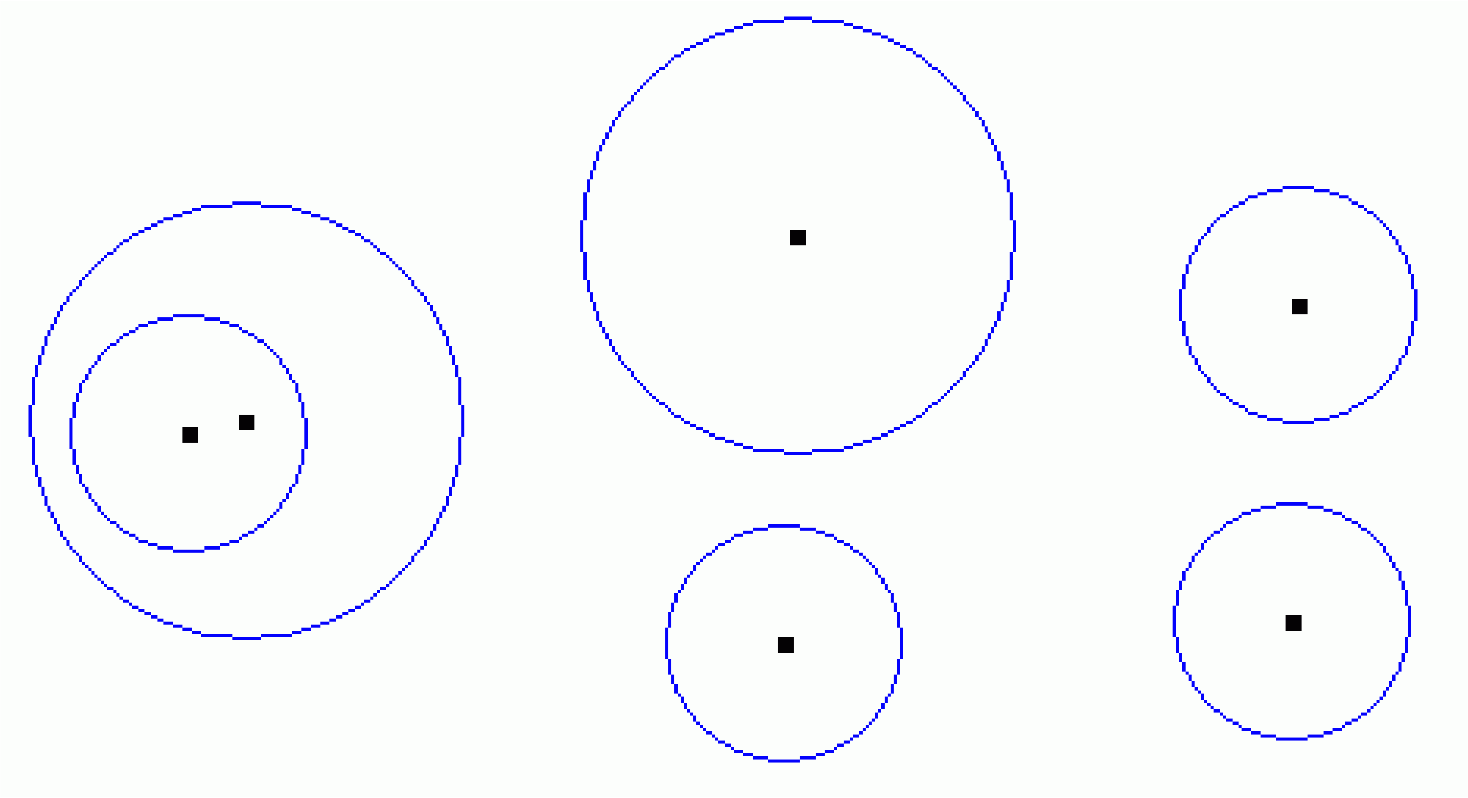
Jeśli nie widzisz tego okręgu, popatrz na poniższy rysunek.
Czy już wiesz, jaka jest długość promienia okręgu wykreślonego linią przerywaną? **(23)**



Myślę, że teraz poradzisz sobie z wykreśleniem stycznej do dwóch okręgów. Jeśli jednak masz dalej z tym problemy, obejrzyj w następnym slajdzie aplet, który przeprowadzi Cię przez całą konstrukcję.

Na podstawie obserwacji kolejnych kroków konstrukcji wykonaj dokładny jej opis wyjaśniając cele każdego z nich. **(24).**

Ile stycznych mogą mieć dwa okręgi o różnych promieniach?
A ile o tych samych? **(25)**
Czy wydaje Ci się że zadanie już rozwiązałeś do końca?
Rozważ poniższe przypadki:



Myślę, że jesteś świadomy, iż dwa okręgi nie muszą mieć stycznej, mogą mieć dwie gdy ich promienie są takie same i mogą mieć nawet cztery – dwie zewnętrzne i dwie wewnętrzne.

Skonstruuj samodzielnie styczne wewnętrzne do dwóch okręgów o różnych promieniach, opierając się dokładnie na takim samym rozumowaniu, jakie poznałeś rozwiązując zadanie dla stycznych zewnętrznych.

Napisz dokładny opis tej konstrukcji i prześlij go swojemu nauczycielowi. **(26)**

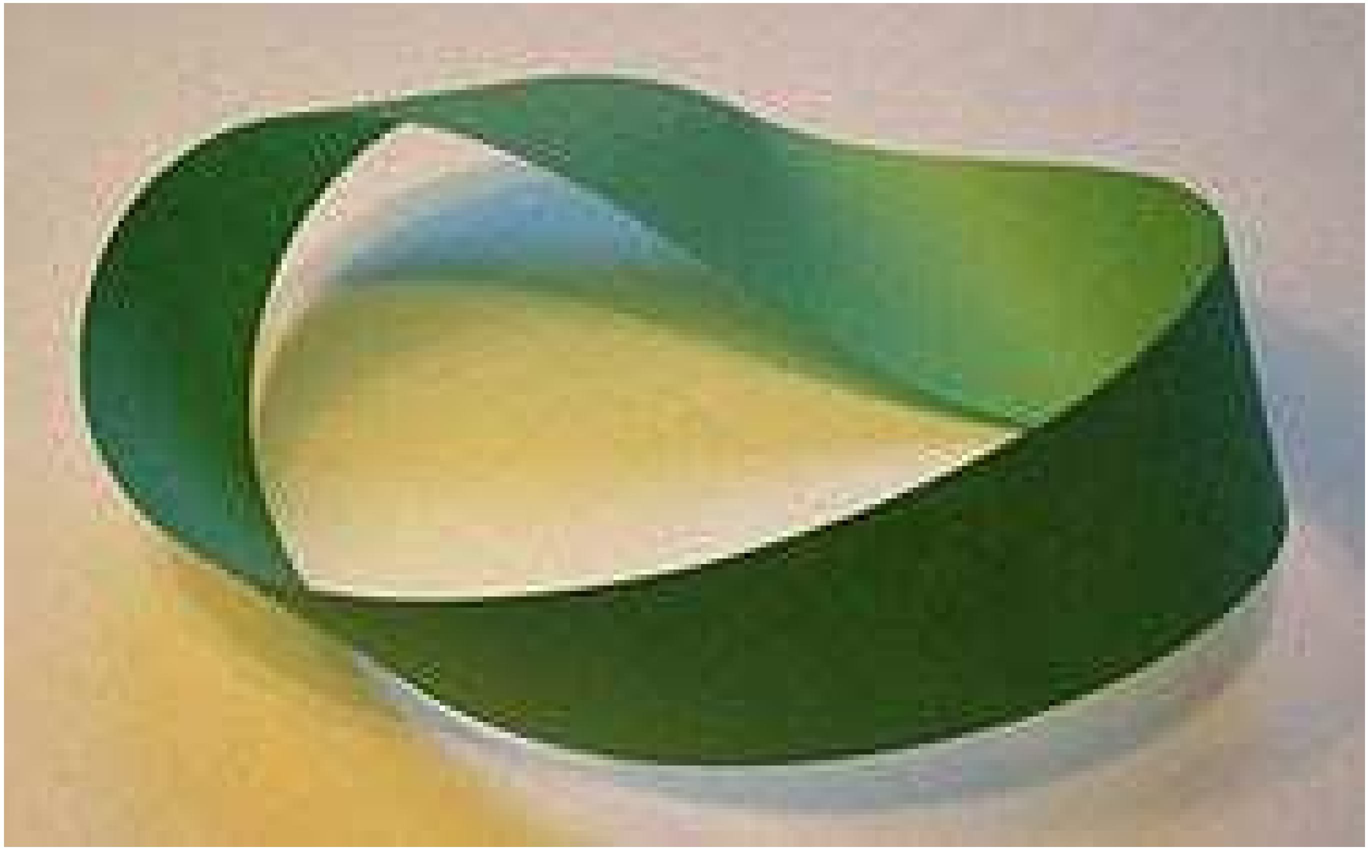
Problem styczności do dwóch okręgów jest dobrze znany rolnikom, którzy napędzają swoje maszyny rolnicze za pomocą silnika elektrycznego poprzez tzw. pasy transmisyjne. Długość tego pasa można wyznaczyć znając promienie obu kół napędowych oraz ich odległości.

Zastanawiający jest fakt, że rolnicy dość dziwnie zakładają te pasy na koła skręcając ich końce przy łączeniu ze sobą.

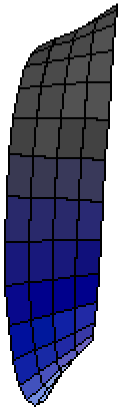
Czy wiesz, dlaczego tak robią?
Odpowiedź otrzymasz już wkrótce.

Matematyk niemiecki ***August Ferdynand Mőbius*** w 1858 r. odkrył powierzchnię zwaną wstęgą Mőbiusa. Możesz ją wykonać ze wstążki papierowej sklejając tak, by jeden jej koniec przed sklejeniem był obrócony względem drugiego końca wstążki tak, jak to przedstawia poniższy rysunek.

Wstęga taka jest tzw. powierzchnią jednostronną.



Pająk spacerujący po takiej wstędze pokona dwukrotnie dłuższą drogę niż długość wstęgi, z której wykonaliśmy wstegę Mőbiusa. Dlaczego – spróbuj to wyjaśnić. **(27)**



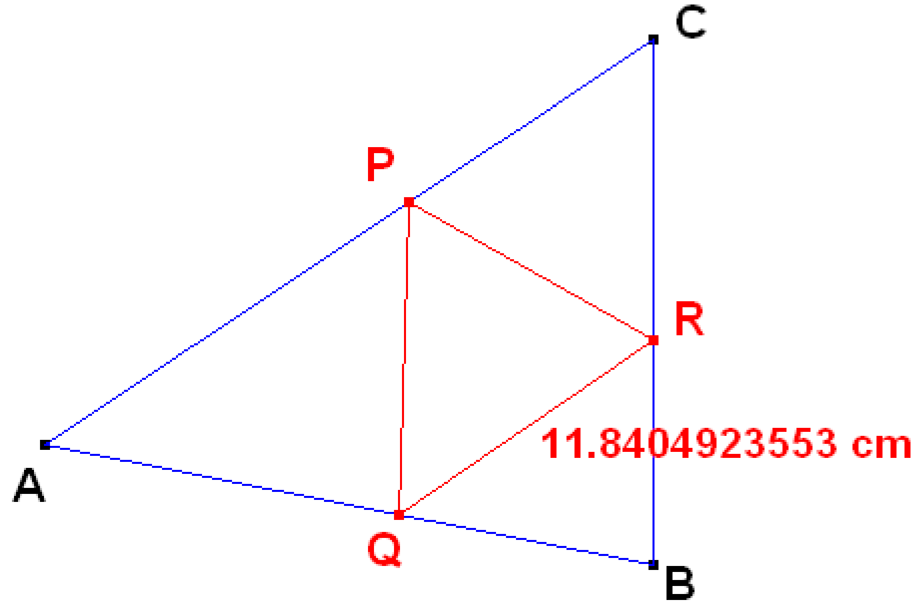
Czy już wiesz, dlaczego rolnicy używają pas transmisyjny w kształcie wstęgi Mőbiusa? Wyjaśnij to **(28)**.

Zadanie 5

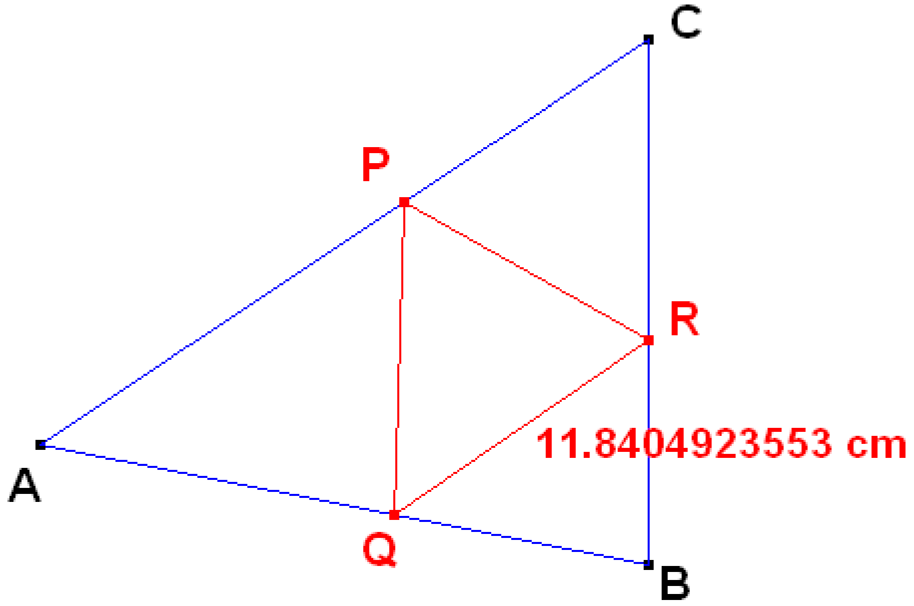
Na bokach trójkąta ***ABC*** obrano punkty ***P*, *Q* i *R*.** Dla jakiego ich położenia obwód trójkąta ***PQR*** jest najmniejszy?

Problem ten znany jest jako problem J. F. Fagnano z 1775 roku.

Sporządźmy konstrukcję w programie Cabri by tam odnaleźć heurystykę rozwiązania tego zadania.



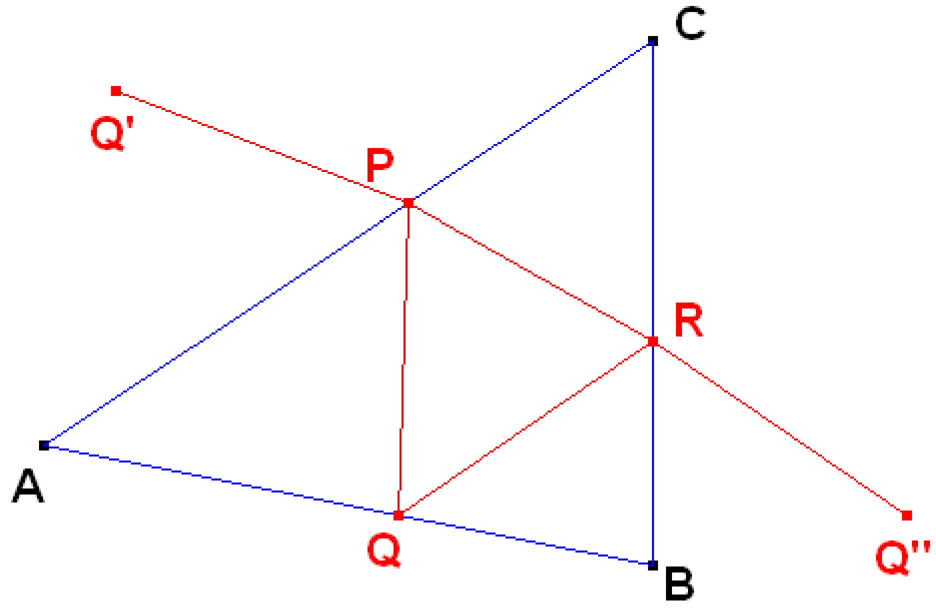
Program Cabri mierzy opcjonalnie obwód trójkąta więc spróbuj najpierw wybadać, czy można ustawić tak położenie punktów ***P***, ***Q*** i ***R*** by obwód ten był minimalny.



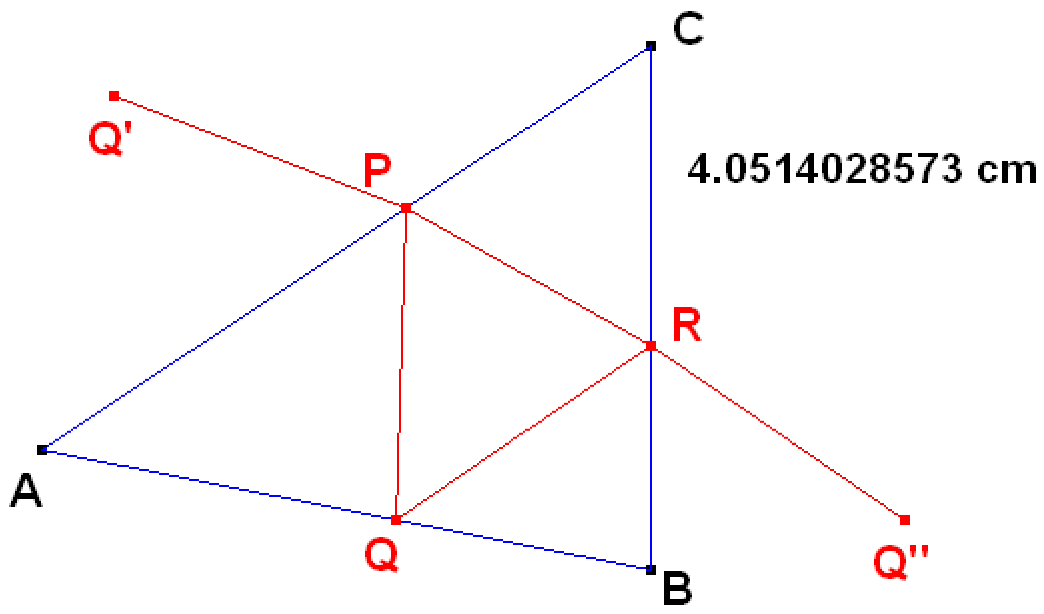
Drugi pomysł, to zastosowanie się do poleceń Georga Poly'a i poszukanie zadania, które było podobne do tego zadania. Myślę, że zadanie z punktem Fermata jest bardzo do niego podobne, gdyż tam też poszukiwane były warunki minimalne.

Poza tym pomysł na rozwiązanie tamtego zadania polegał na znalezieniu łamanej, która ma mieć najkrótszą długość. Może i tym razem takie podejście pomoże rozwiązać zadanie.

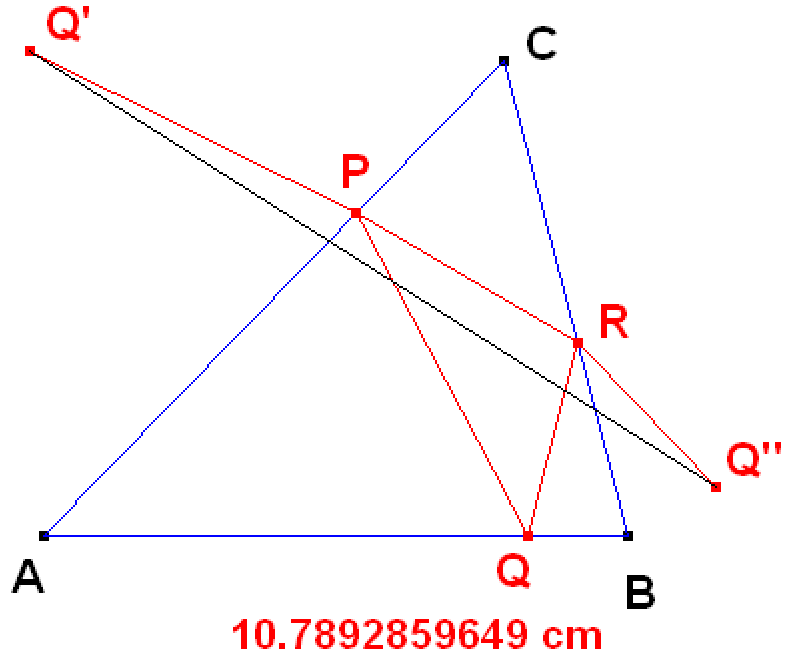
Ale jak z trzech boków trójkąta ***PQR*** stworzyć łamaną? Może spróbujmy odbić dwa jego boki w symetriach względem odpowiednich boków trójkąta ***ABC***? Wówczas ***Q'P*** = ***QP*** oraz ***Q''R*** = ***QR***.



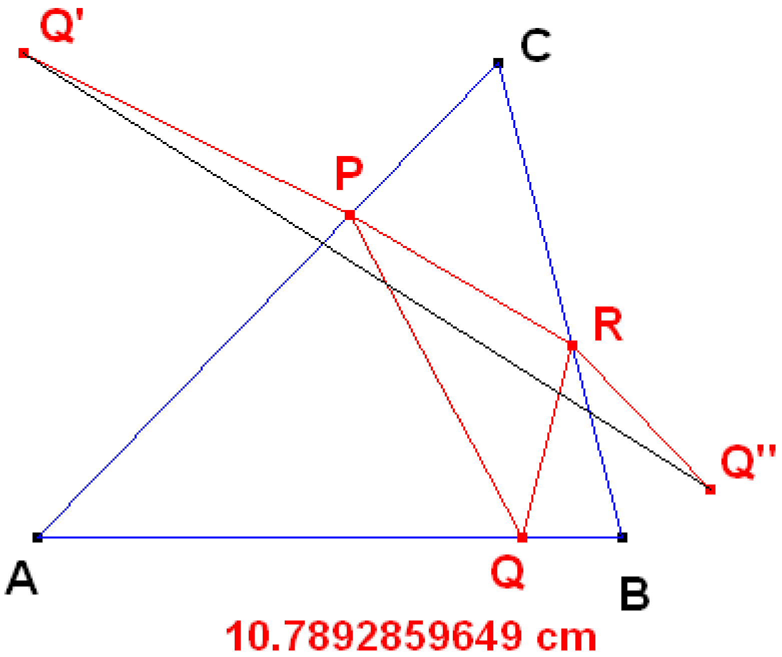
Jak widać, teraz obwód trójkąta ***PQR*** można zastąpić długością łamanej ***Q'PRQ''*** . Będzie ona najkrótsza, gdy punkty ***Q'***, ***P***, ***R*** i ***Q''*** będą współliniowe. Zmieniaj położenie punktów ***P***, ***Q*** i ***R*** i obserwuj obwód trójkąta ***PQR*** czyli łamanej ***Q'PRQ''***.



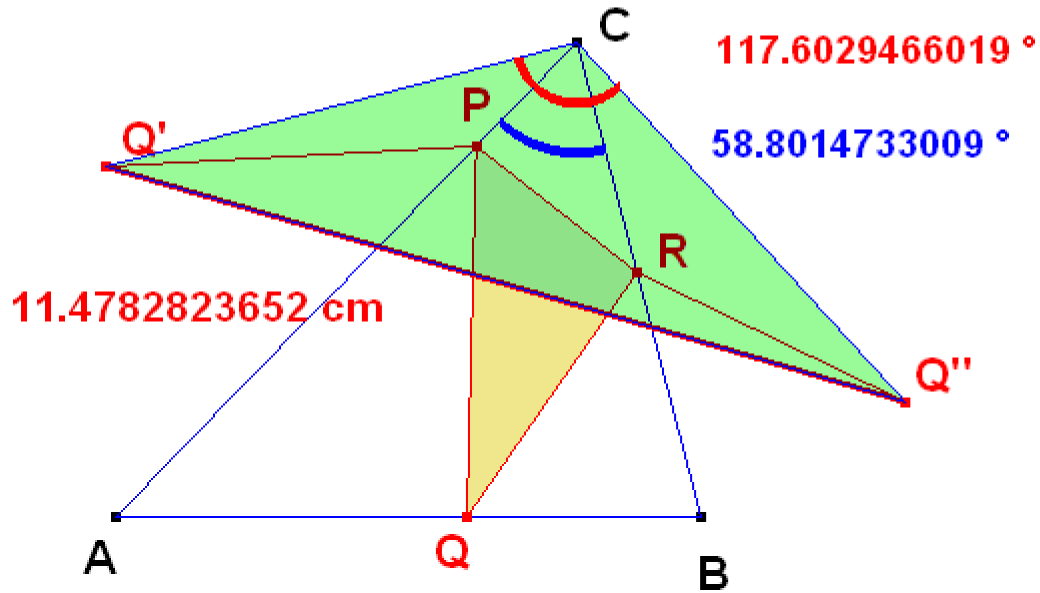
Ponieważ łamana ma się „wyprostować” do odcinka ***Q’Q’’***
to poprowadźmy pomocniczo odcinek ***Q’Q’’***.



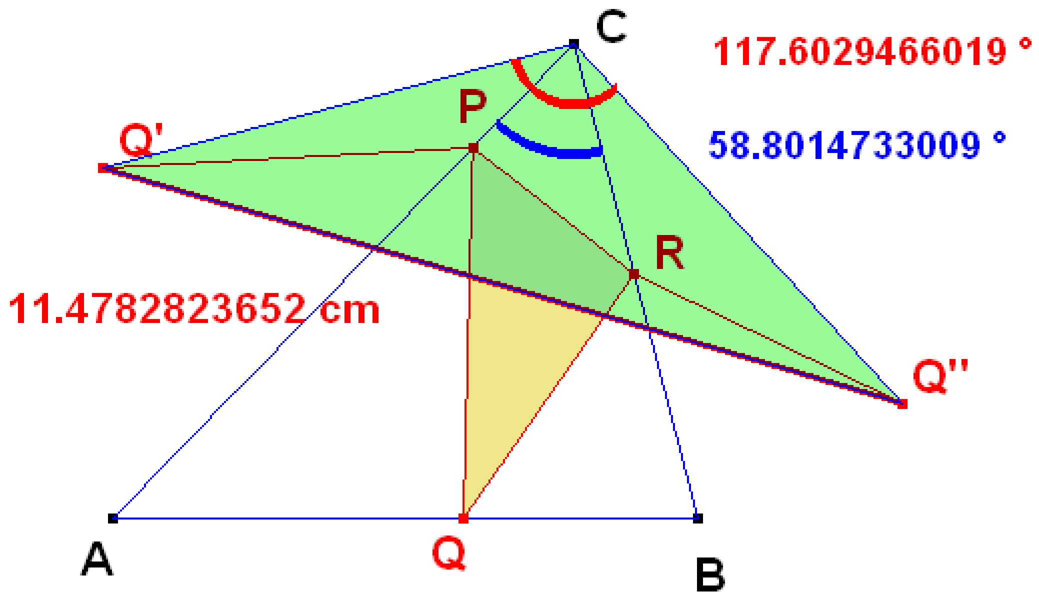
Ustal na chwilę położenie punktów ***P*** i ***R*** i przesuwaj punkt ***Q*** po odcinku ***AB***. Czy zmienia się obwód trójkąta ***PQR*** **(29)**? Czy jest takie położenie punktu Q, w którym obwód trójkąta jest minimalny? **(30)**



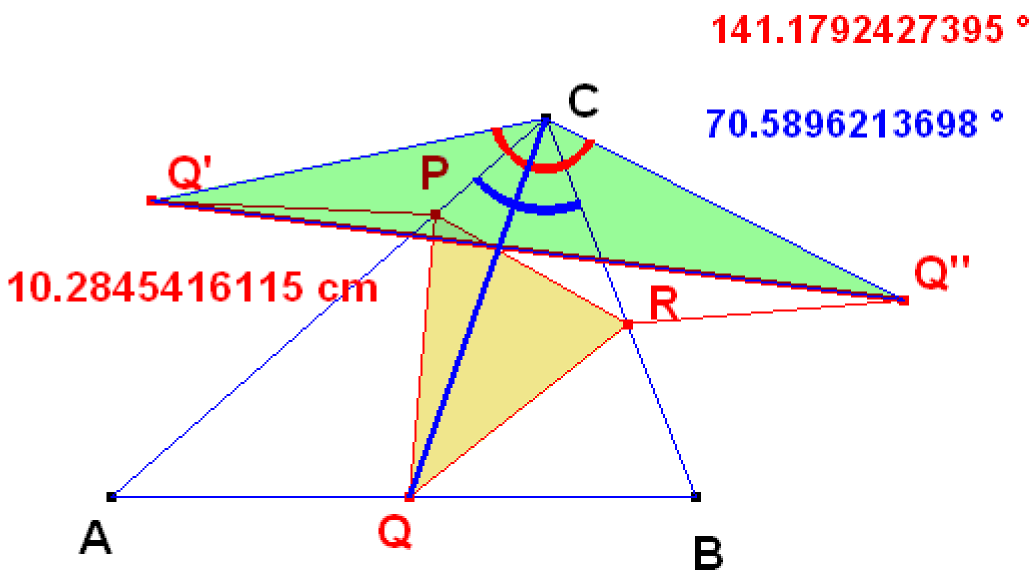
A teraz przypatrzmy się uważnie trójkątowi ***Q'Q''C***. Poruszaj punktem ***Q*** po odcinku ***AB***. Co interesującego zauważyłeś? **(31)**



A teraz jeszcze przyjrzyj się temu trójkątowi w trakcie zmiany położenia punktów ***P*** i ***R***. Co teraz zauważyłeś? **(32)**

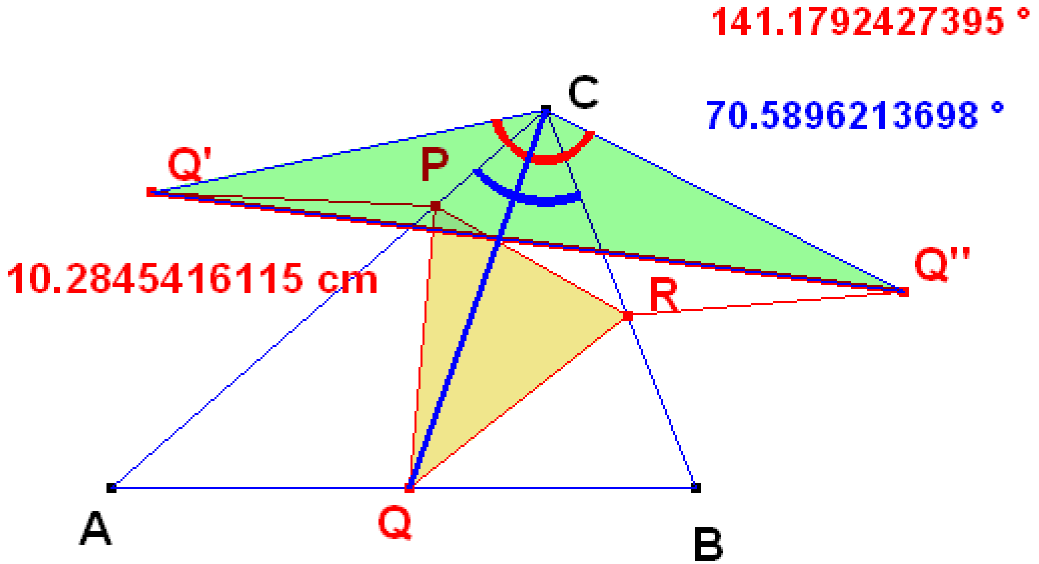


Czy wiesz dlaczego miara ∠***Q'CQ''*** jest dwukrotnością miary kąta ∠***ACB***?
To bardzo proste: kąty ***ACQ'*** i ***ACQ*** są przystające, gdyż ***Q'C*** jest obrazem ***QC*** w symetrii osiowej o osi ***AC***.

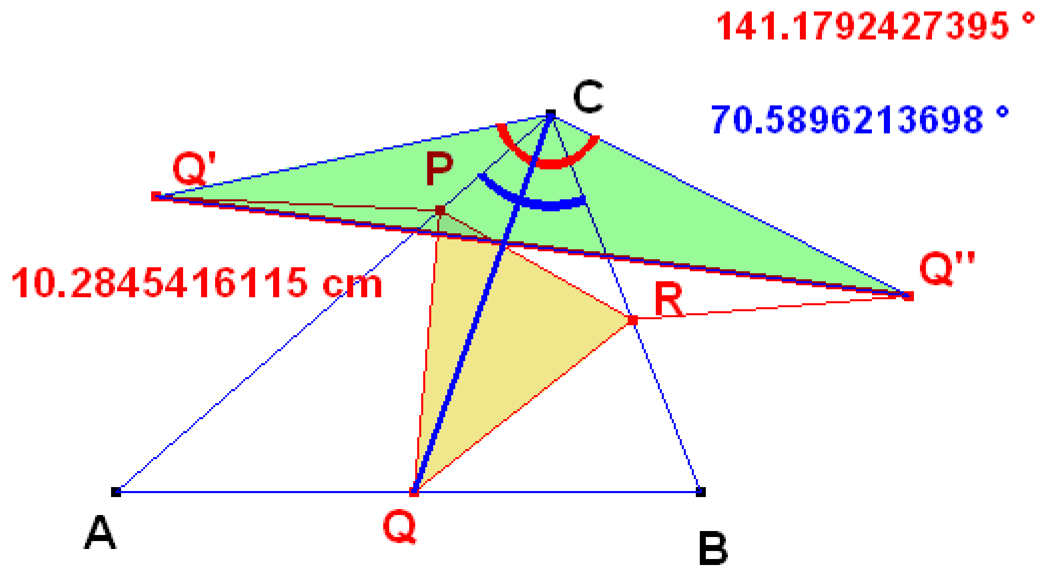


Analogicznie kąty ***BCQ''*** i ***BCQ*** są przystające. Stąd też:

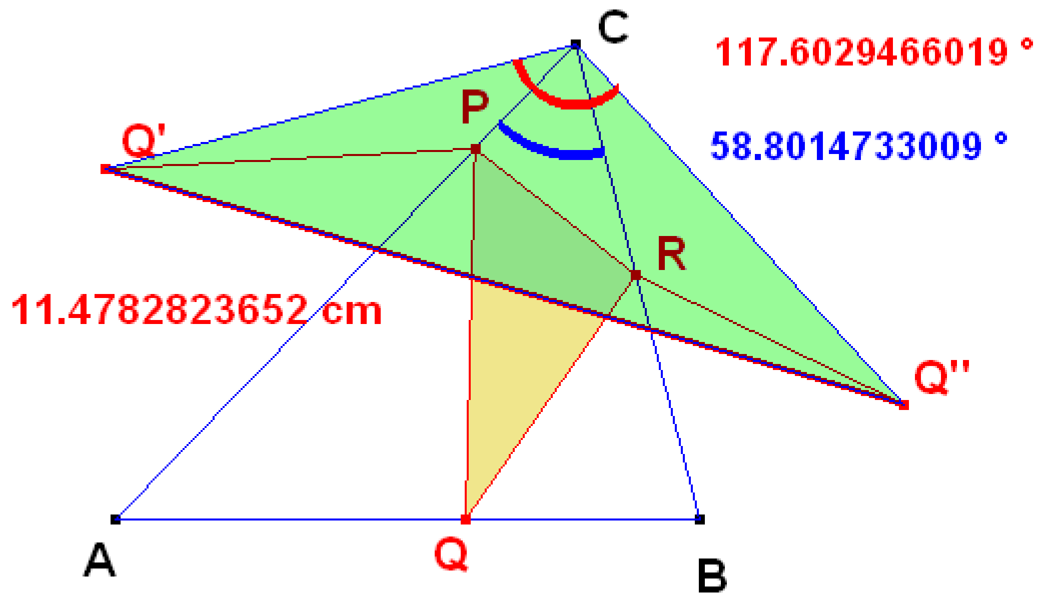
$$|\angle Q'QQ''| = 2\cdot|\angle ACQ| + 2\cdot|\angle BCQ| = 2\cdot|\angle ACB|$$



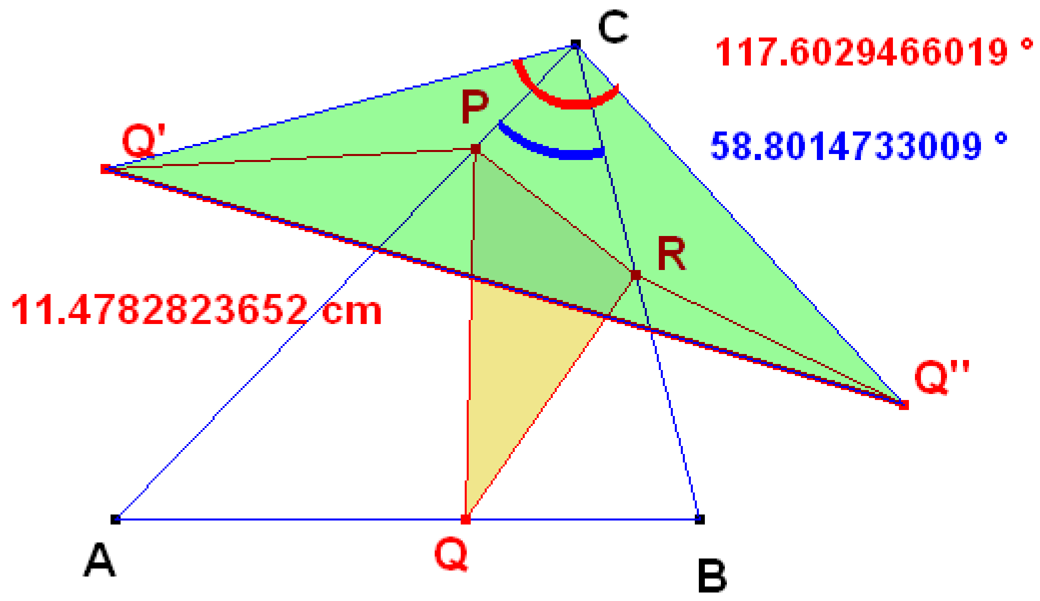
Te wszystkie fakty przemawiają za tym, że wszystkie trójkąty ***Q’Q’’C*** dla zmieniającego się punktu ***Q*** są podobne i obracają się wokół punktu ***C***.



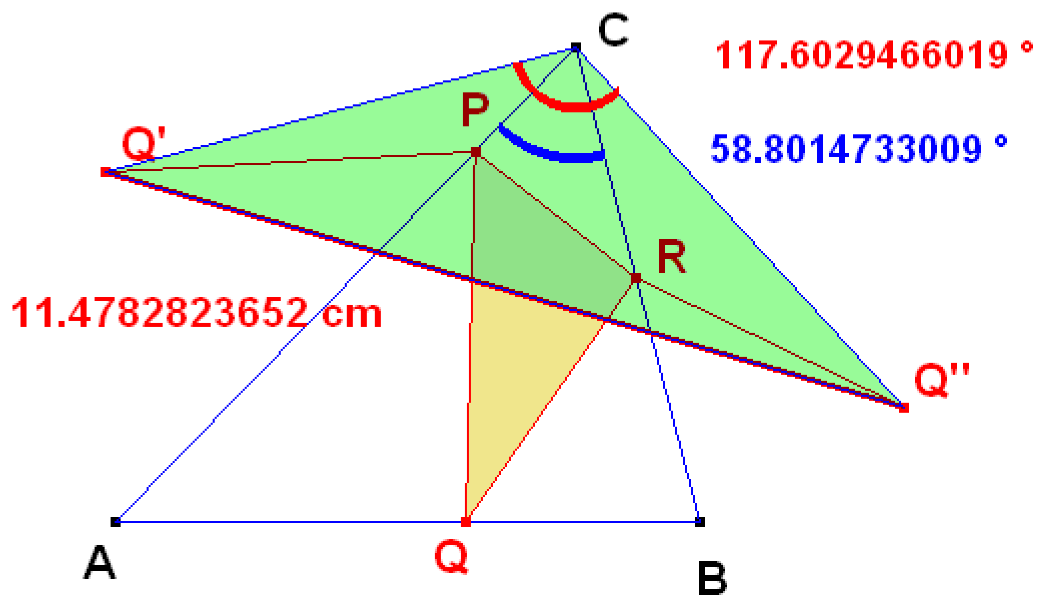
Ponieważ podstawy tych wszystkich trójkątów są poszukiwanym obwodem trójkąta ***PQR***, więc obwód trójkąta będzie wtedy najkrótszy, gdy trójkąt ***Q'Q''C*** będzie miał najkrótszą podstawę ***Q'Q''***.



Z kolei ten z wszystkich trójkątów ***Q'Q''C*** będzie miał najkrótszą podstawę, którego bok np. ***Q'C*** będzie najkrótszy (bo trójkąty były podobne).

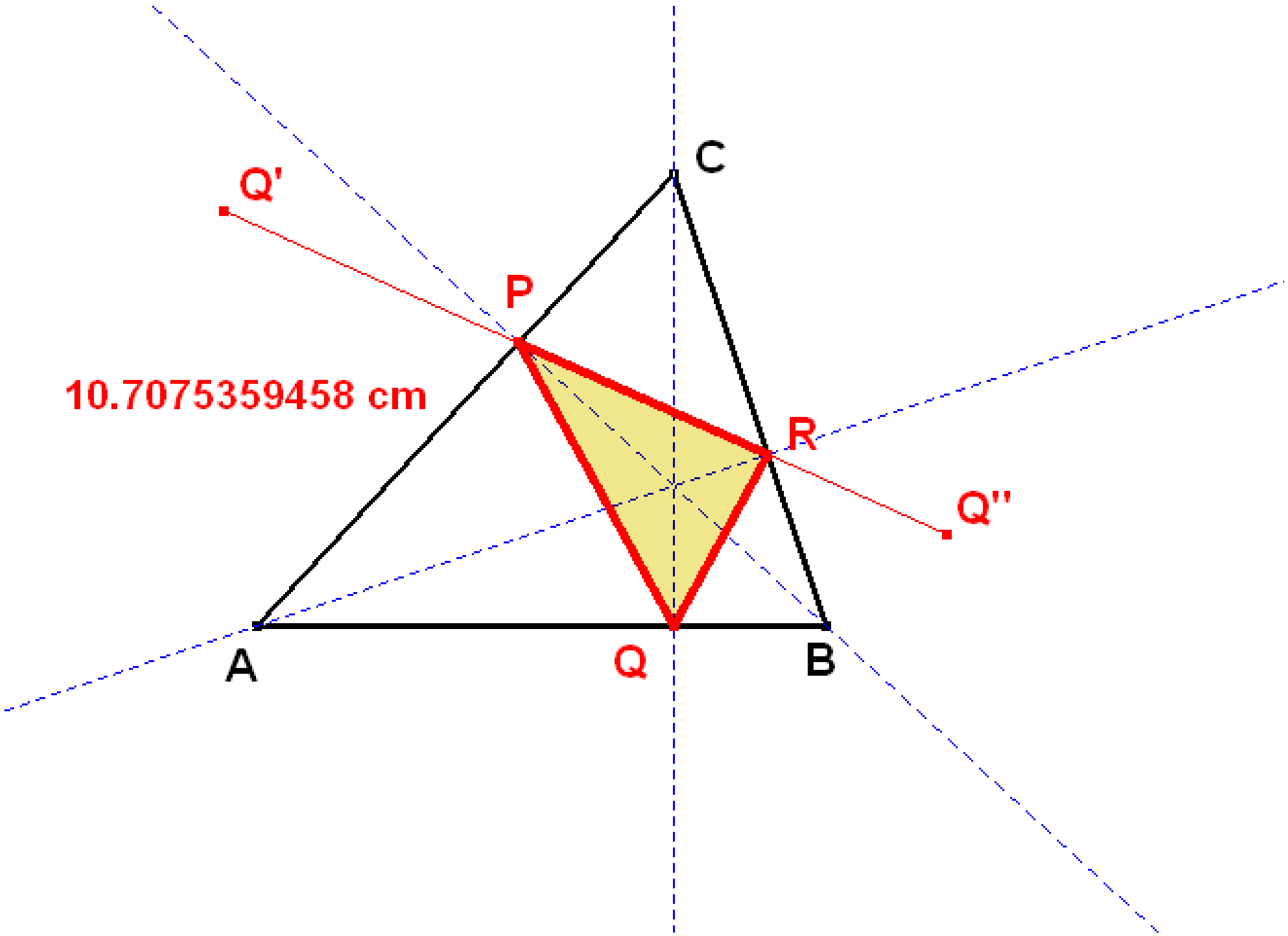


Ale ***Q'C*** = ***QC***. ***QC*** jest najkrótsze, gdyż jest wysokością trójkąta (dlaczego?) **(33)**, a zatem punkt ***Q*** powinien zająć pozycję spodku tej wysokości.

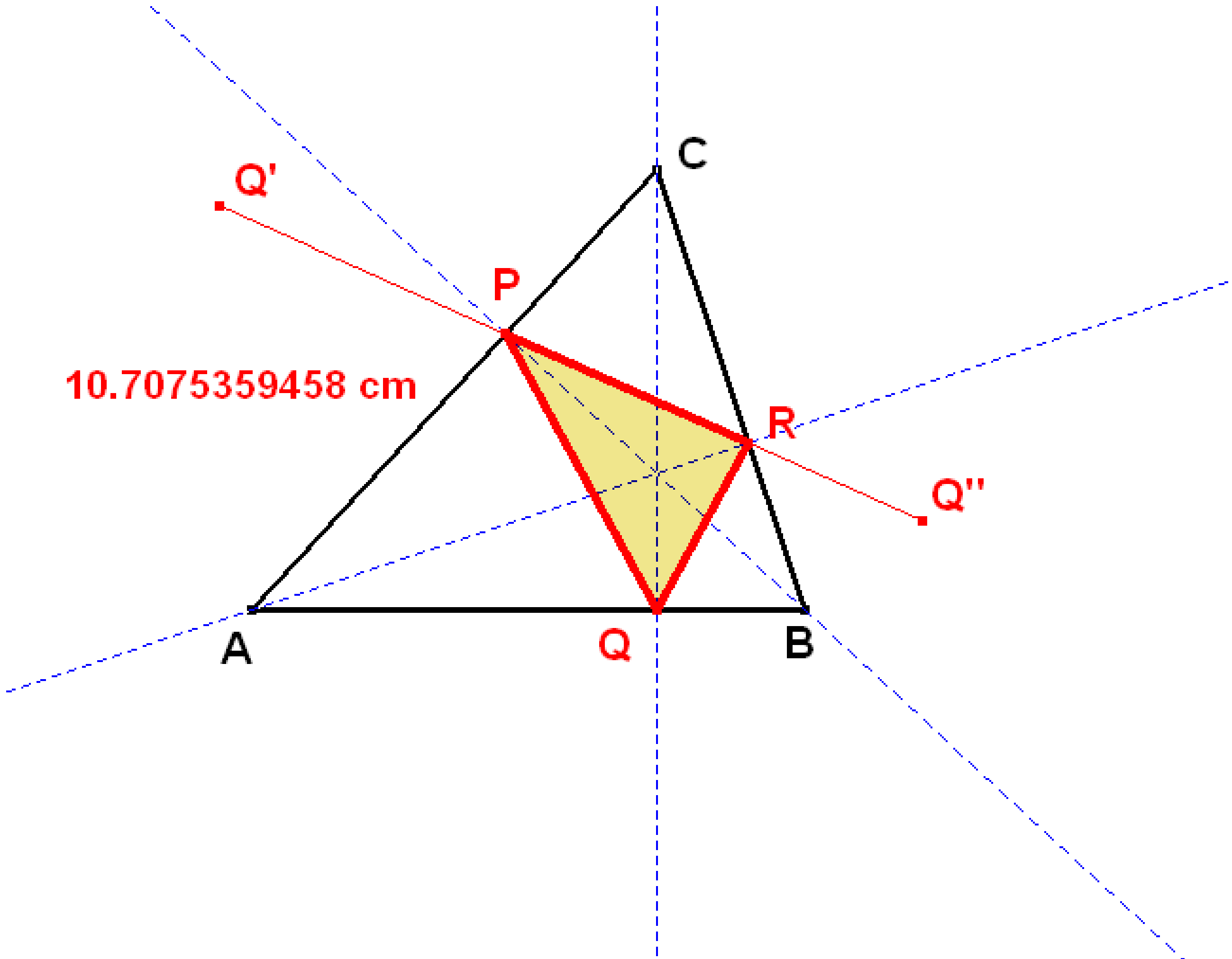


Ze względu na symetrię punkty ***P*** i ***R*** też muszą zająć pozycje spodków pozostałych wysokości. Zatem jedynym rozwiązaniem jest takie położenie trójkąta ***PQR***, którego wierzchołki sa spodkami jego wysokości.

Trójkąt ten nazywamy ***trójkątem spodkowym.***



Przy okazji możesz odkryć jeszcze jedną ciekawą własność. Popatrz czym są wysokości trójkąta ***ABC*** w jego trójkącie spodkowym ***PQR***. **(34)**

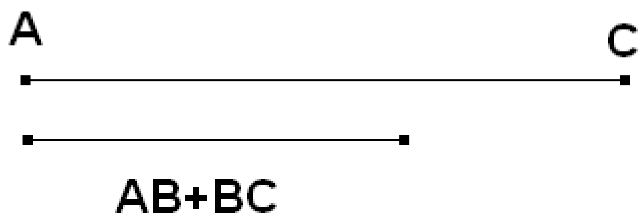


Zadanie 6

Skonstruować trójkąt prostokątny mając dany odcinek jego przeciwprostokątnej i odcinek, który jest sumą przyprostokątnych

tego trójkąta.

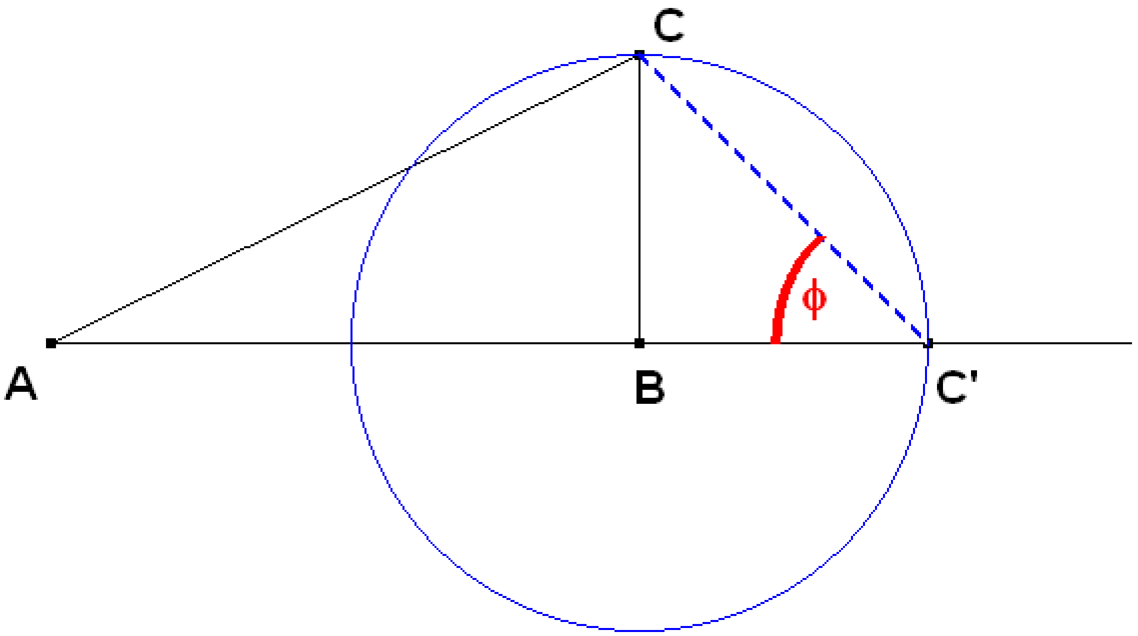
Sporządź rysunek.
Czy długości odcinków mogą być dowolne? **(35)**
Co musisz skonstruować i na którym odcinku, by uzyskać konstrukcję trójkąta prostokątnego? **(36)**



Załóżmy że zadanie jest już rozwiązane. Odcinek ***AC'*** jest sumą przyprostokątnych ***a+b*** tego trójkąta. Nie znasz punktu ***B***.

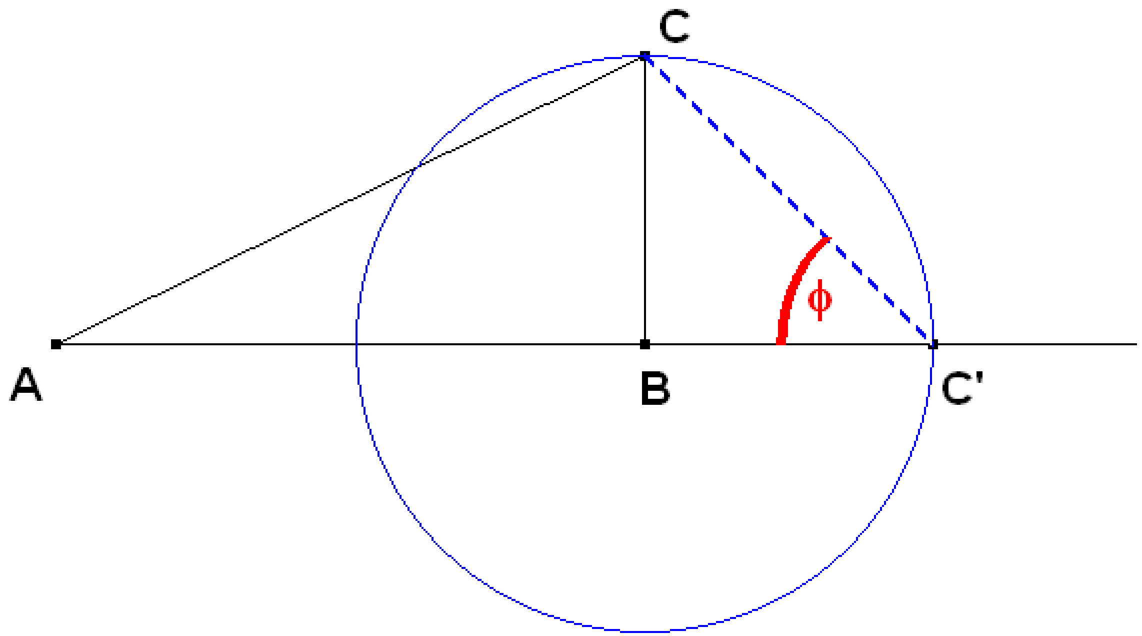
Jaką miarę ma kąt ***φ = CC'B****?* **(37)**

Może to jest klucz do rozwiązania zadania?

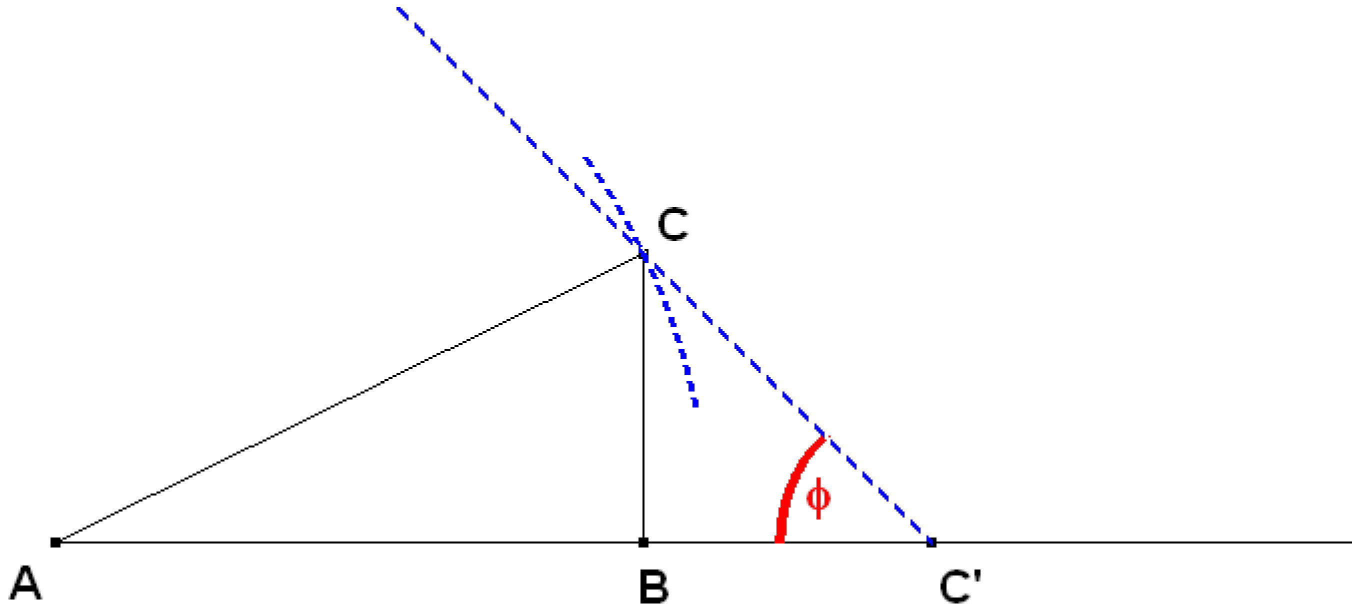


Jeśli nie wiesz, jaka jest miara kąta ***φ = CC'B*** to zastanów się, co wiesz o odcinkach ***BC'*** i ***BC***? **(38)**

Czy masz już pomysł na rozwiązanie zadania?



Zauważ, że punkt ***C*** jest przecięciem półprostej ***C'C*** i okręgu o środku ***A*** i promieniu ***AC.***



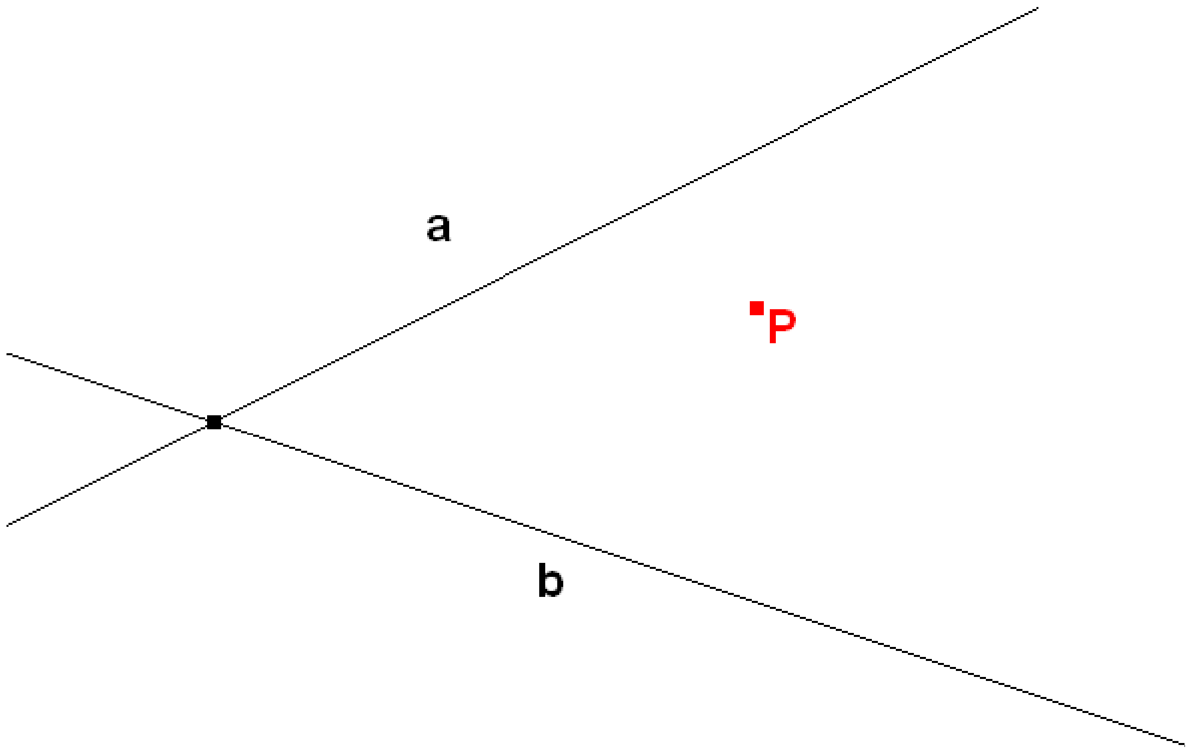
Myślę, że teraz już wiesz, jak rozwiązać to zadanie.
Prześlij jego pełne rozwiązanie. **(39)**

Zadanie 7

Dane są dwie proste przecinające się a i b oraz punkt ***P*** nie leżący wewnątrz tego kąta.

Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego wierzchołkiem jest punkt ***P*** a pozostałe wierzchołki leżą każdy na innej prostej.

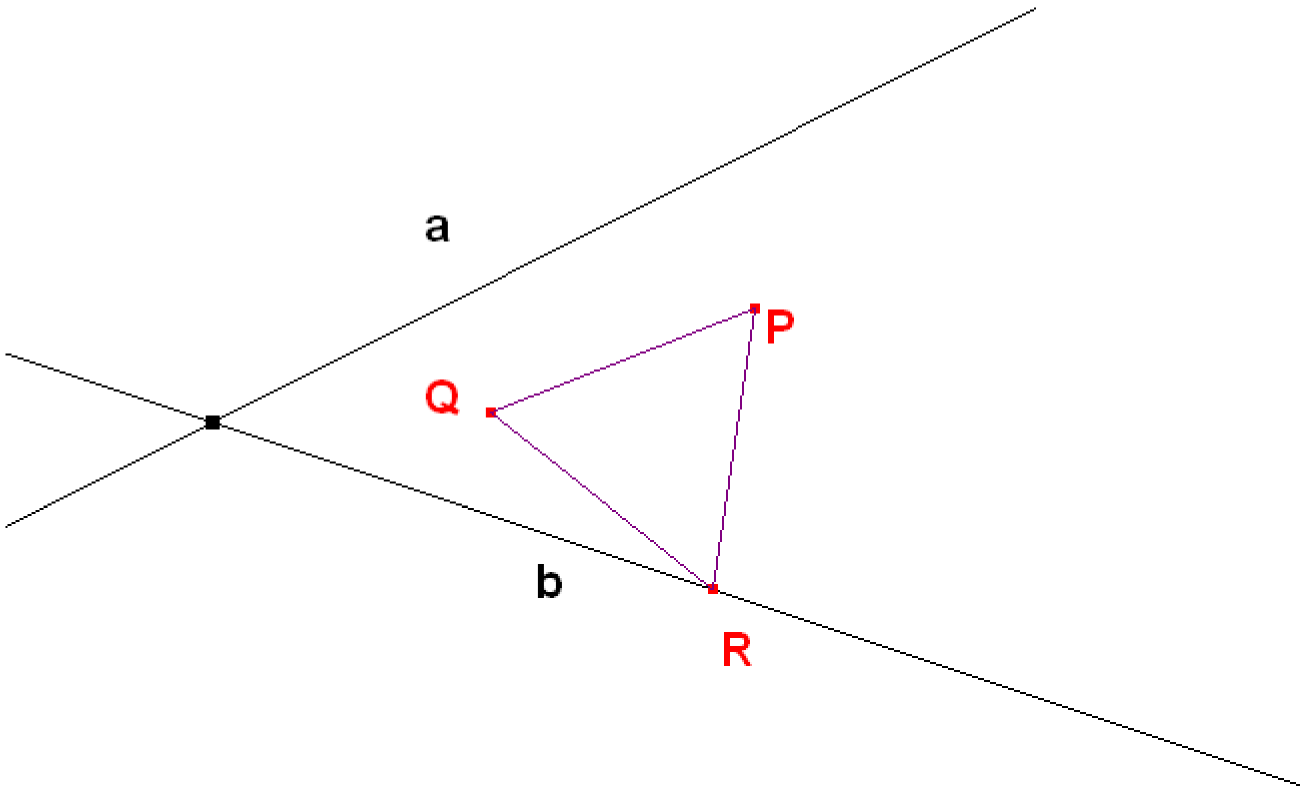
Sporządź rysunek do tego zadania. Czy masz jakiś pomysł na jego rozwiązanie? **(40)**



Rozwiązując to zadanie skorzystamy znowu ze wskazówki Georga Poly, która mówi, że jeśli występują jakieś warunki w zadaniu to obniż je, zrezygnuj z jednego z nich i rozwiązuj zadanie tak, jakby nie było tego warunku.

W naszym przypadku poszukujemy trójkąta równobocznego, którego dwa wierzchołki leżą na ramionach kąta (prostych). Może na chwilę zrezygnujmy z przynależności jednego z nich do ramiona kąta.
Połóżmy tylko jeden, np. ***R*** na jednej z prostych.

Skonstruuj na bazie tych dwóch punktów trójkąt równoboczny. Niestety punkt ***Q*** jeszcze nie spełnia warunku zadania, to znaczy nie leży na drugiej prostej. Co powinieneś uczynić, by warunek dla punktu ***Q*** był spełniony?

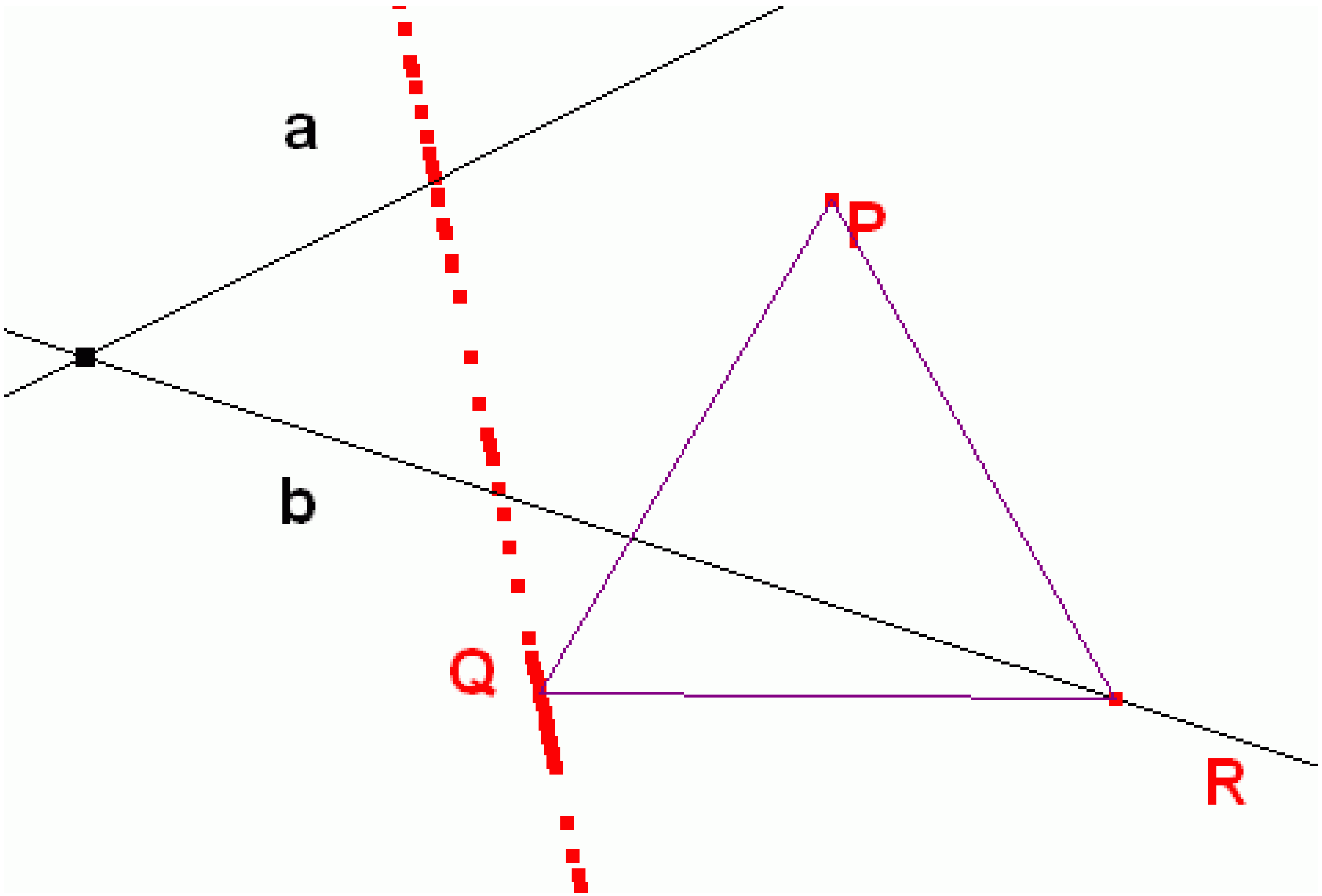


Chwyć punkt ***R*** i poruszaj go po prostej ***b***. Czy znalazłeś rozwiązanie zadania? Czy coś jeszcze zauważyłeś? **(41)**

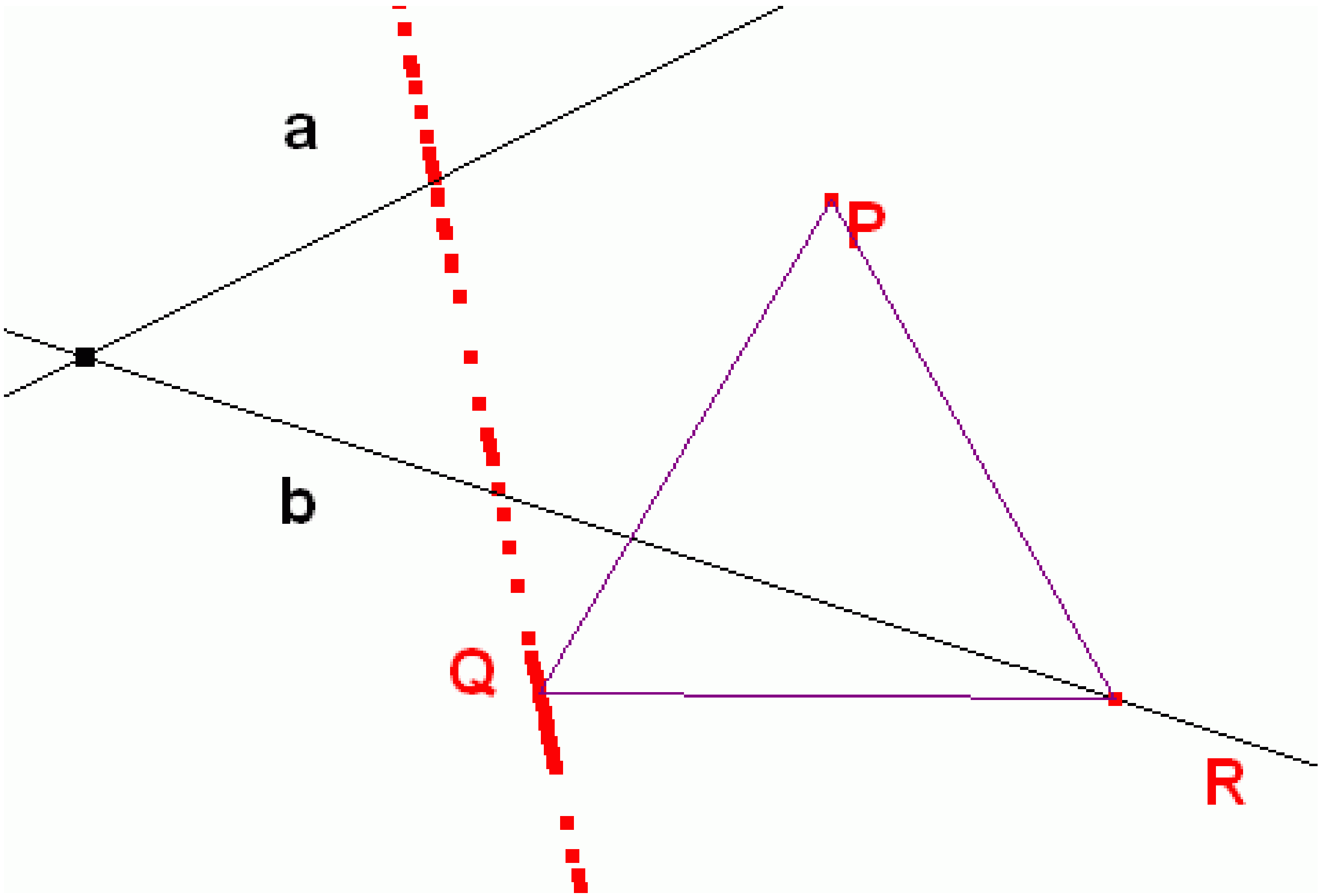
Jeżeli nic dodatkowego nie zauważyłeś, to teraz możesz to samo powtórzyć, ale z pozostawieniem przez punkt ***Q*** śladu?

Co teraz zauważyłeś? **(42)**

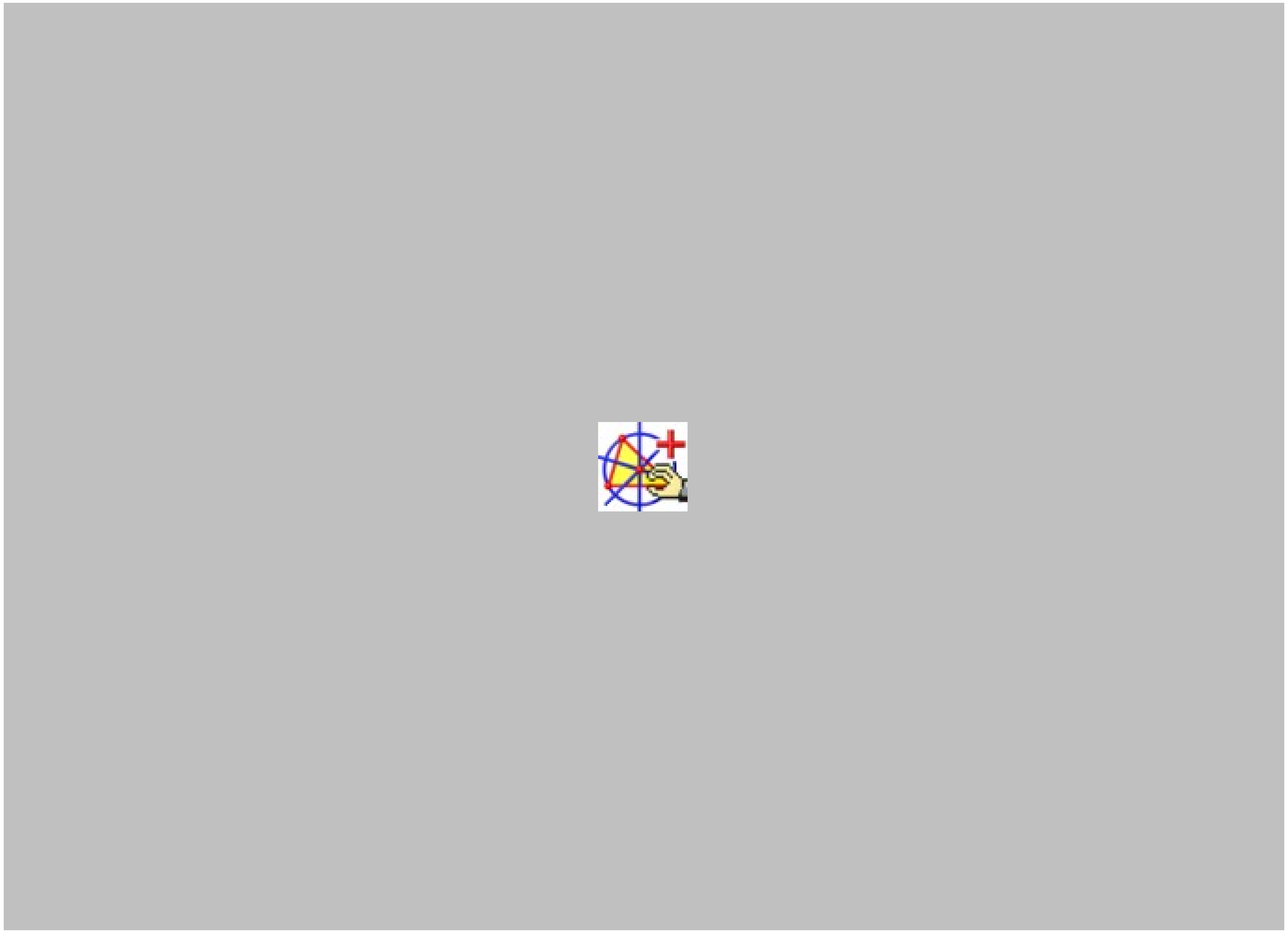
Jak widzisz, ślad punktu ***Q*** to pewna prosta.
Co można o niej powiedzieć? Jaki kąt tworzy z prostą po której porusza się punkt ***Q***? **(43)**



Punkt ***R*** zajmuje różne położenia na prostej ***b***. Czy prostą którą wykreśla ***Q*** można wykreślić na kartce papieru bez użycia jego śladu? **(44)**



Jest to oczywiście możliwe. Wystarczy wykreślić dwa trójkąty dla dwóch różnych położeń punktu ***R*** **(45)**



Tak więc już wiesz, jak rozwiązać zadanie. Dokonaj pełnego opisu jego konstrukcji i prześlij na platformę e-learningową **(44)**.

Po skończeniu każdego zadania powinniśmy dokonać dyskusji ilości jego rozwiązań.

Wydaje się, że dla tak obranego punktu ***P*** istnieje tylko jedno rozwiązanie.

A jak przedstawia się sytuacja, gdy proste ***a*** i ***b*** są równoległe? **(45)**

Zadanie 8

Dane są dwa okręgi ***o(A,a)*** i ***o(B,b)*** oraz punkt ***P*** nie leżący na żadnym z nich. Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego jednym z wierzchołków jest punkt ***P*** a dwa pozostałe leżą każde na innym okręgu.

Czy zadanie to wydaje Ci się trudne?
Czy może spotkałeś się już z zadaniem podobnym? **(46)**
Jeśli wiesz, jak go rozwiązać, prześlij od razu rozwiązanie na platformę. **(47)**

Jeśli nie potrafisz go rozwiązać, przeanalizuj jeszcze raz dokładnie rozwiązanie zadania poprzedniego i przenieś heurystykę jego rozwiązania na to zadanie.

Dokonaj dokładnego przeglądu ilości rozwiązań tego zadania. **(48)**

Zadanie 9
Dane są trzy proste ***a***, ***b*** i ***c***, Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą każdy na innej prostej.

Myślę, że zadanie nie powinno Ci sprawić kłopotów. Połóż jeden z punktów na wybranej przez Ciebie prostej.

Pozostała część konstrukcji powinna przebiegać w podobny sposób.

Opisz dokładnie konstrukcję tego zadania. **(49)**

Co sądzisz o poniższych zadaniach: **(50)**

a/ Dane są trzy okręgi ***o(A,a)***, ***o(B,b)*** i ***o(C,c)*.** Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą każdy na innym okręgu.

b/ Dane są dwie proste i okrąg. Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą każdy na innej figurze.

c/ Dane są dwa okręgi i prosta. Skonstruuj trójkąt równoboczny, którego wierzchołki leżą każdy na innej figurze.

Opisz dokładnie rozwiązania tych zadań a przede wszystkim przeprowadź dyskusję ilości ich rozwiązań. **(51)**

Proponuję teraz zadanie konstrukcyjne ze stereometrii.
Będzie ono rozwiązane do końca. Chodzi o to, być zapoznał się z takim sposobem rozwiązywania zadań, w których rolę linijki odgrywa prosta w przestrzeni a cyrklem jest sfera o zadanym środku i promieniu.

Zadanie 10

Wiadomo, jak w koło o promieniu r wpisać kwadrat.
Ale jak wpisać w kulę sześcian?

Zadanie to nie jest wcale proste. Konstruujemy je oczywiście za pomocą linijki (prostej w przestrzeni) i cyrkla (sfery o zadanym środku i promieniu).

W zadaniu dany jest:

/ środek ***S*** kuli,
/ punkt ***A*** na sferze tej kuli, który jest jednym z wierzchołków poszukiwanego sześcianu.

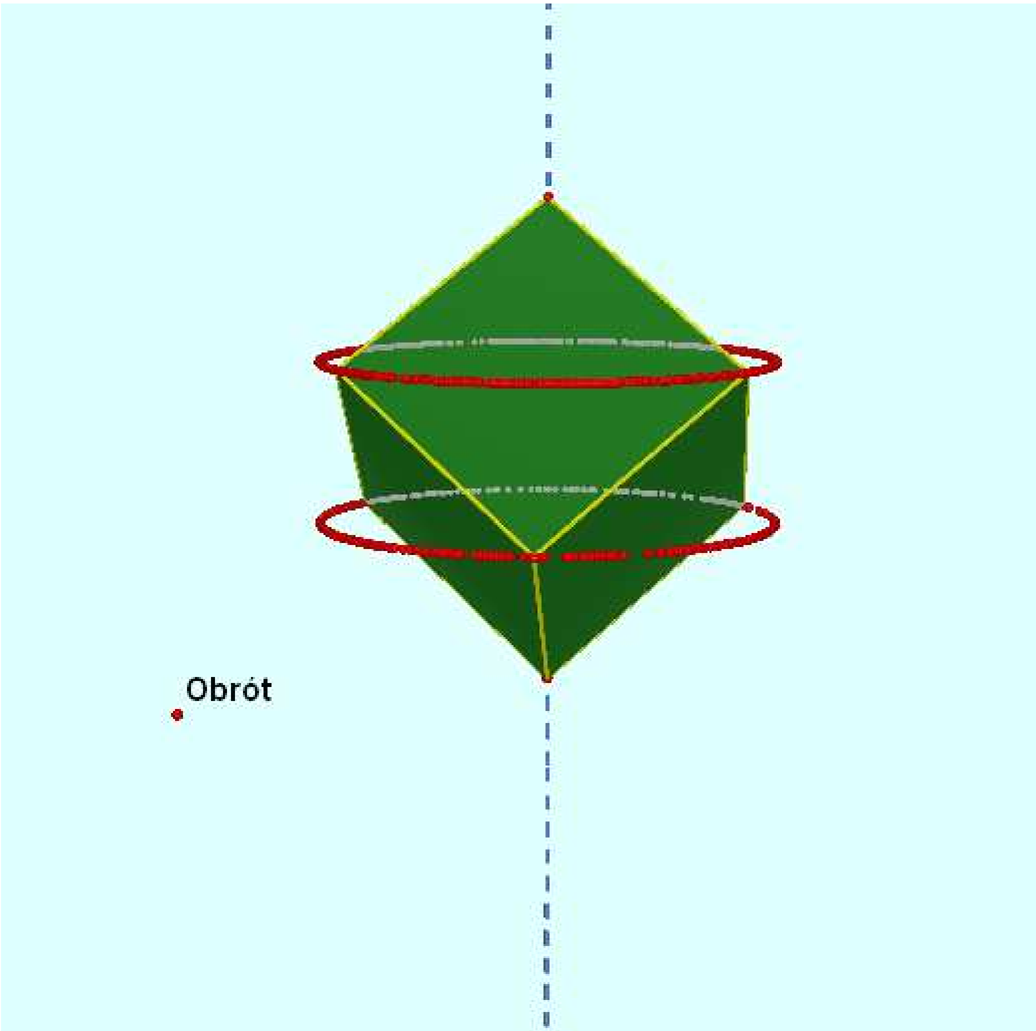
Zadanie nie da się rozwiązać, jeśli nie poznamy kilka ważnych informacji o sześcianie.

Rozwiązując zadanie z kwadratem wpisanym w okrąg rozpoczynało się konstrukcję od wykreślenia jednej z przekątnych kwadratu. Potem dzieliło się ją na połowę, kreśląc symetralną jej końców i w przecięciu tej symetralnej z okręgiem utworzyły się pozostałe dwa wierzchołki kwadratu.

Teraz dzielenie przekątnej sześcianu na pół nic nie daje.

Przypatrzmy się sześcianowi ułożonemu tak, by jego przekątna była pionowa. Nazwijmy go ***sześcianem diagonalnym***.

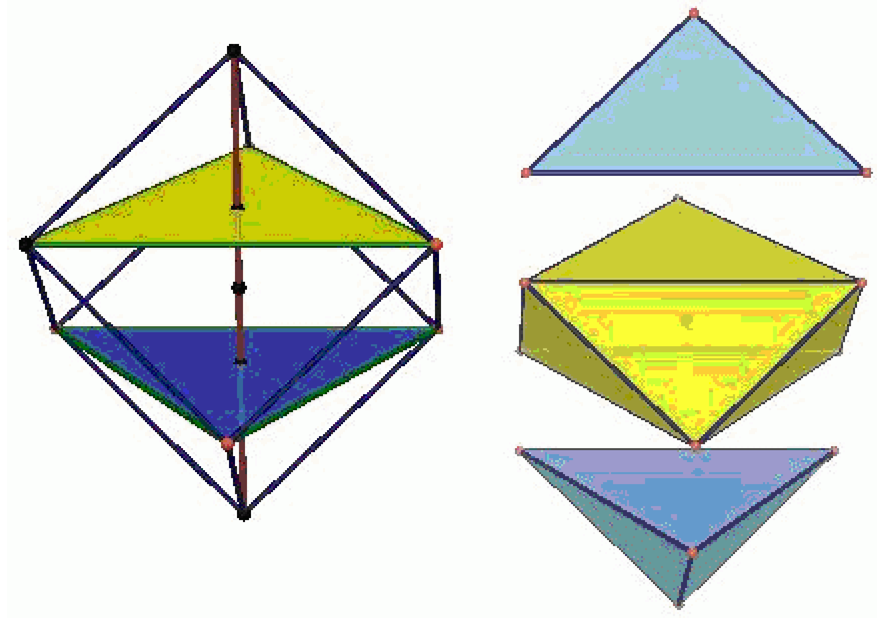
Ile okręgów wykreśli sześć wierzchołków sześcianu, jeśli będziemy go obracać wokół głównej jego przekątnej?
obracać wokół głównej jego przekątnej?
Poniższy aplet ułatwi Ci odpowiedź na to pytanie.



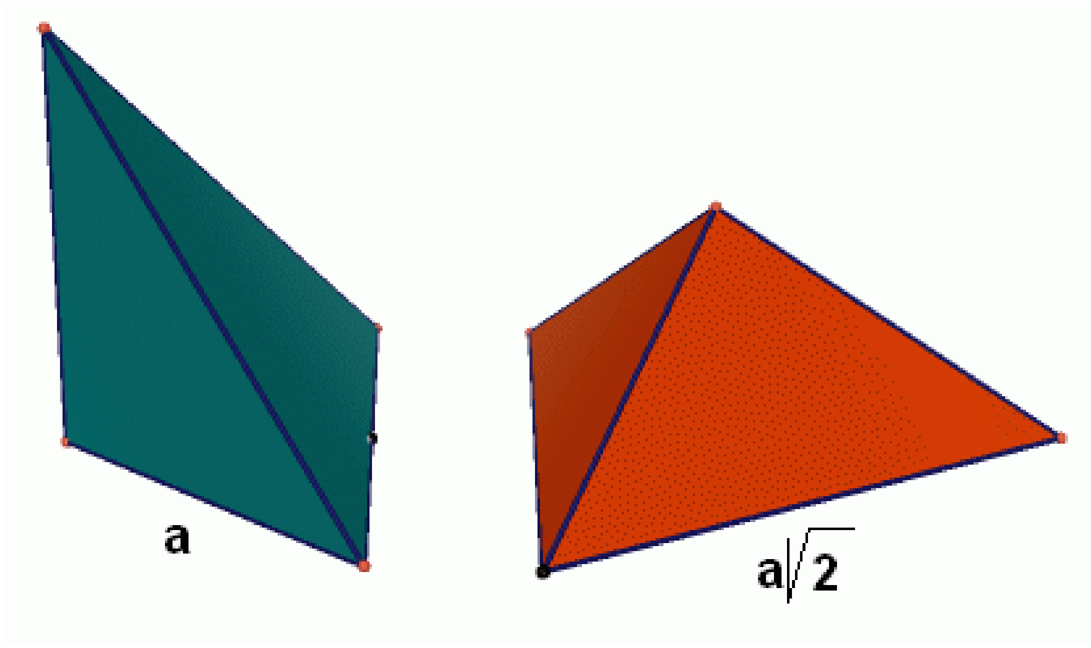
Zauważ, że dwa okręgi, które wyznacza sześć wierzchołków obracającego się sześcianu dzielą jego przekątną na trzy przystające odcinki.

Skąd wiadomo, że są one równe?
Łatwo wykazać, że wysokość każdego z dwóch czworościanów, na które sześcian rozcinają obracające się koła wynosi 1/3 przekątnej sześcianu.

Dowód w następnym aplecie.



Przyjmijmy krawędź sześcianu za ***a***.
Popatrzmy na ten sam czworościan na dwa sposoby.
Raz, gdy jego podstawą jest trójkąt prostokątny o krawędzi ***a***, a drugi raz gdy jego podstawą jest trójkąt równoboczny o długości boku $a\sqrt{2}$



W pierwszym przypadku:

$$V_{czwor} = \frac{1}{6} \cdot a^3$$

w drugim wynosi:

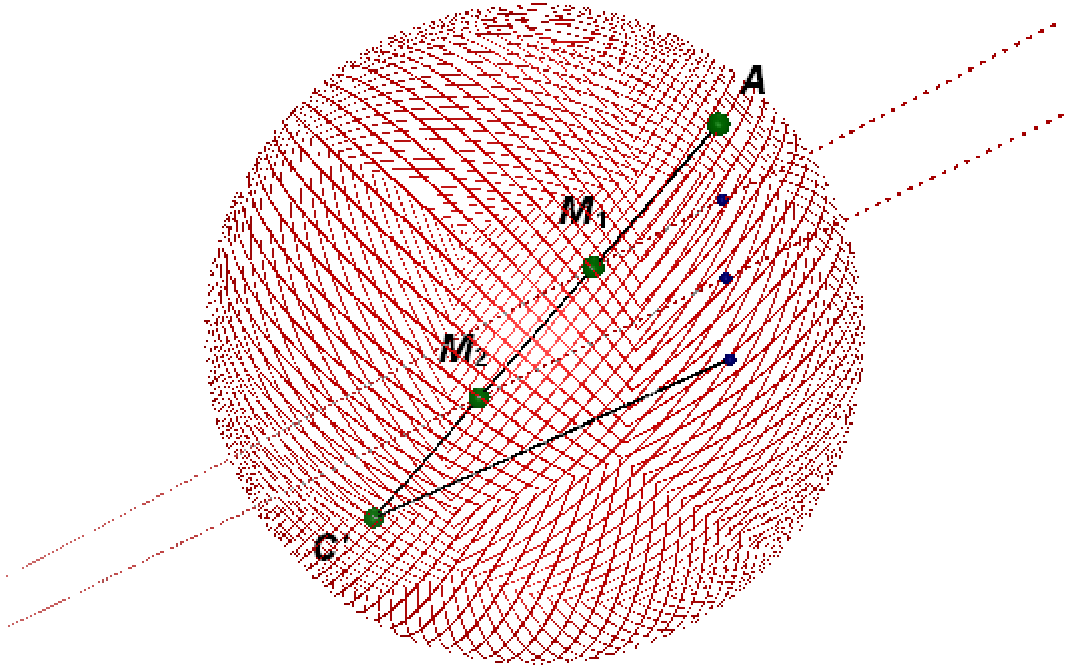
$$V_{czwor} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{ah\sqrt{3}}{6}$$

Stąd:

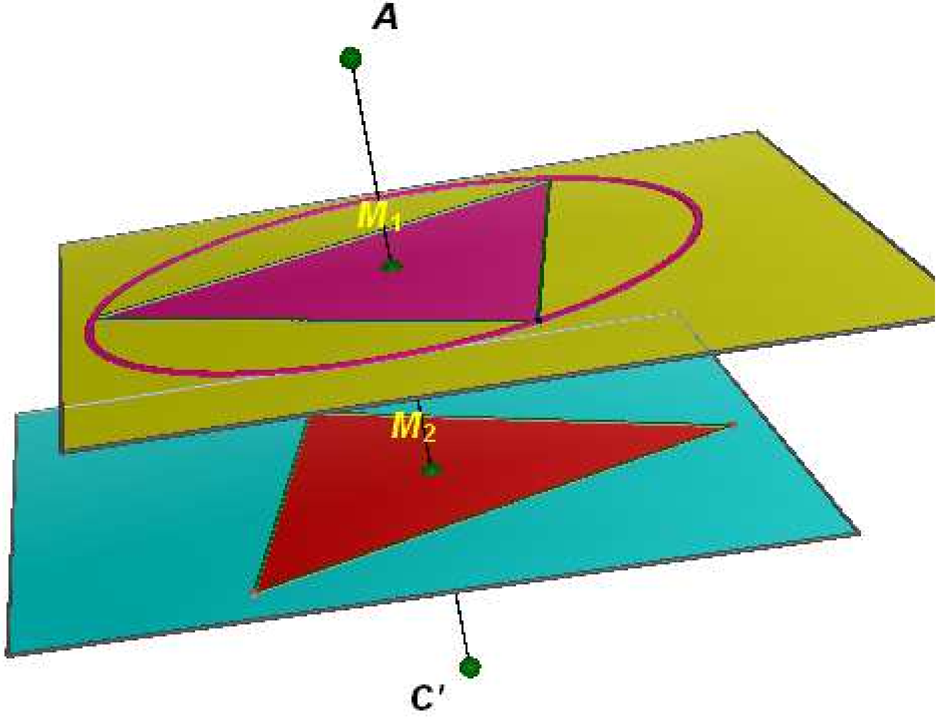
$$h = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Czyli h = 1/3 przekątnej sześcianu

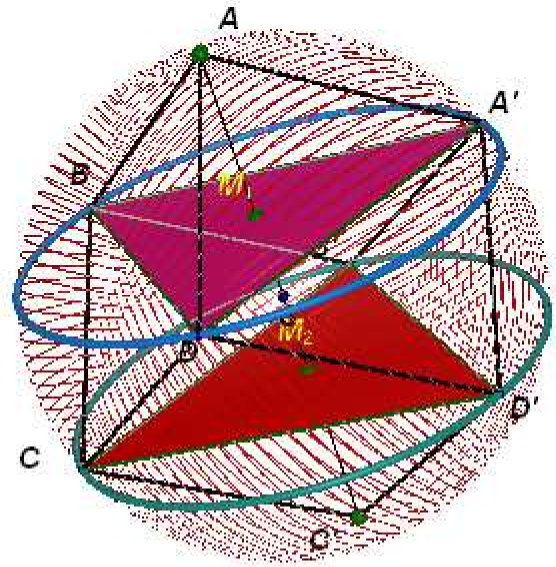
Teraz już można wykonać konstrukcję.
Wystarczy podzielić przekątną na trzy równe części,
np. na podstawie twierdzenia Talesa.



Następnie konstruujemy dwie płaszczyzny prostopadłe do przekątnej przechodzące przez punkty M_1 i M_2 jej podziału,

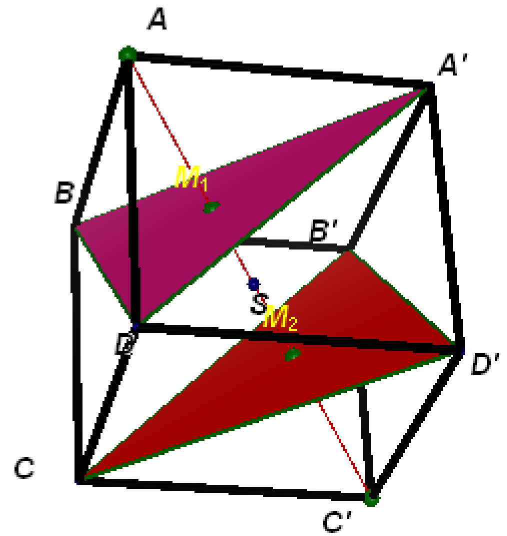


W każdej z nich kreślimy okrąg będący przekrojem sfery z daną płaszczyzną i wpisujemy w nich trójkąt równoboczny



Otrzymaliśmy komplet wierzchołków poszukiwanego sześcianu. Należy je odpowiednio połączyć i sześcian jest już wpisany w kulę.

Całą tę konstrukcję wykonuje się za pomocą programu CABRI 3D, w którym mamy wspomniane narzędzia typu p-o.



PYTANIA I ODPOWIEDZI DO „KONSTRUKCJI”

1. Uzupełnij zapis: długość ***PA*** jest zawsze …………..od długości ***PP’***. **(01)**

2. Opisz konstrukcję, w wyniku której powstał punkt ***P’***. **(02)**

3. Odległością punktu od prostej jest jego odległość od ………………– uzupełnij ten zapis **(03)**

4. Który to punkt? Opisz dokładnie jego położenie **(04).**

5. Opisz dokładnie położenie tych dwóch punktów **(05).**

6. Czy wiesz, jak nazywa się zbiór punktów ***P***, które są tak samo odległe do dwóch ustalonych punktów ***F*** i ***P***’ ? **(06)**

7. Dokonaj opisu tej konstrukcji i prześlij go na platformę. **(07)**

8. Co się dzieje z krzywą, gdy zmieniamy położenie punktu ***F*** względem prostej ***k***? **(08)**

9. Jak i czym to zrobić na kartce papieru? **(09)**

10. Czy te okręgi przecięły się? Czy zawsze przetną się ze sobą? Od czego to zależy? **(10)**

11. Ile teraz widzisz punktów spełniających rozwiązanie? Co one tworzą? **(11)**

12. Czy elipsa ta może być okręgiem? Jakie warunki początkowe musisz wówczas zmienić w konstrukcji tej elipsy? **(12)**

13. Włączmy dodatkowo ślad tej prostopadłej. Czym jest ta prostopadła do dwusiecznej kąta ***F1PF2***? **(13).**

14. Na podstawie obserwacji uzupełnij zapis:
PC = ………
BP = ………
BC’ = ……... **(14)**

15. Jakim trójkątem jest trójkąt ***BP’P***? **(15)**

16. Czym teraz można zastąpić sumę odcinków **AP + BP +CP**? **(16)**

17. Kiedy łamana ***APP”C”*** będzie najkrótsza? Gdzie musisz umieścić punkt ***P***, by ta łamana była najkrótsza? **(17)**

18. Gdzie znalazłby się wówczas obraz punktu ***P*** po obrocie? **(18)**

19. Czy ***P*** leżałby na odcinku ***CPP’’***? **(19)**

20. Przypatrz się uważnie na punkt Torricelliego i popatrz pod jakim kątem przecinają się ze sobą odcinki ***AA'***, ***BB"*** i ***CC'***? **(20)**

21, A co widzisz, gdy prosta ***m*** przechodzi przez środek **B** mniejszego okręgu? **(21)**

22. Czy nie przypomina Ci to konstrukcji stycznej z punktu do jakiegoś okręgu? Jaki byłby jego promień? **(22)**

23. Czy już wiesz, jaka jest długość promienia okręgu wykreślonego linią przerywaną? Prześlij swoją odpowiedź na platformę e-learningową. **(23)**

24. Na podstawie obserwacji kolejnych kroków konstrukcji wykonaj dokładny jej opis wyjaśniając cele każdego z nich. **(24).**

25. Ile stycznych mają dwa okręgi o różnych promieniach? **(25)**

26. Napisz dokładny opis tej konstrukcji i prześlij go swojemu nauczycielowi. **(26)**

27**. Pająk** spacerujący po takiej wstędze pokona dwukrotnie dłuższą drogę niż długość wstęgi Mőbiusa. Dlaczego – spróbuj to wyjaśnić. **(27)**

28. Czy już wiesz, dlaczego rolnicy używają pas transmisyjny
w kształcie wstęgi Mőbiusa? Wyjaśnij to **(28)**.

29.Ustal na chwilę położenie punktów ***P*** i ***R*** i przesuwaj punkt ***Q*** po odcinku ***AB***. Czy zmienia się obwód trójkąta ***PQR*** **(29)**?

30. Czy jest takie położenie punktu Q, w którym obwód trójkąta jest minimalny? **(30)**

31. Poruszaj punktem ***Q*** po odcinku ***AB***. Co interesującego zauważyłeś? **(31**)

32. A teraz jeszcze przyjrzyj się temu trójkątowi w trakcie zmiany położenia punktów ***P*** i ***R***. Co teraz zauważyłeś? **(32**)

33. Ale ***Q'C*** = ***QC. QC*** jest najkrótsze, gdyż jest wysokością trójkąta (dlaczego?) **(33)**,

34. Popatrz czym są wysokości trójkąta ***ABC*** w jego trójkącie spodkowym ***PQR***. **(34)**

35. Czy długości odcinków mogą być dowolne? **(35)**

36. Co musisz skonstruować i na którym odcinku, by uzyskać konstrukcję trójkąta prostokątnego? **(36)**

37. Jaką miarę ma kąt ***φ = CC'B****?* **(37)**

38. Jeśli nie wiesz, jaka jest miara kąta ***φ = CC'B*** to zastanów się, co wiesz o odcinkach ***BC'*** i ***BC***? **(38)**

39. Myślę, że teraz już wiesz, jak rozwiązać to zadanie. Prześlij jego pełne rozwiązanie. **(39)**

40. Czy masz jakiś pomysł na jego rozwiązanie? **(40)**

41. Czy znalazłeś rozwiązanie zadania? Czy coś jeszcze zauważyłeś? **(41)**

42. Jeżeli nic dodatkowego nie zauważyłeś, to teraz możesz to samo powtórzyć, ale z pozostawieniem przez punkt ***Q*** śladu?
Co teraz zauważyłeś? **(42)**

43. Co można o niej powiedzieć? Jaki kąt tworzy z prostą po której porusza się punkt ***Q***? **(43)**

44.Dokonaj pełnego opisu jego konstrukcji i prześlij na platformę e-learningową **(44).**

45. A jak przedstawia się sytuacja, gdy proste ***a*** i ***b*** są równoległe? **(45)**

46. Czy może spotkałeś się już z zadaniem podobnym? **(46)**

47**.** Jeśli wiesz, jak go rozwiązać, prześlij od razu rozwiązanie na platformę. **(47)**

48. Dokonaj dokładnego przeglądu ilości rozwiązań tego zadania. **(48)**

49. Opisz dokładnie konstrukcję tego zadania. **(49)**.

50. Co sądzisz o poniższych zadaniach: **(50)**

51. Opisz dokładnie rozwiązania tych zadań a przede wszystkim przeprowadź dyskusję ilości ich rozwiązań. **(51)**

52.