Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning - matematyka - poziom podstawowy

Geometria analityczna

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

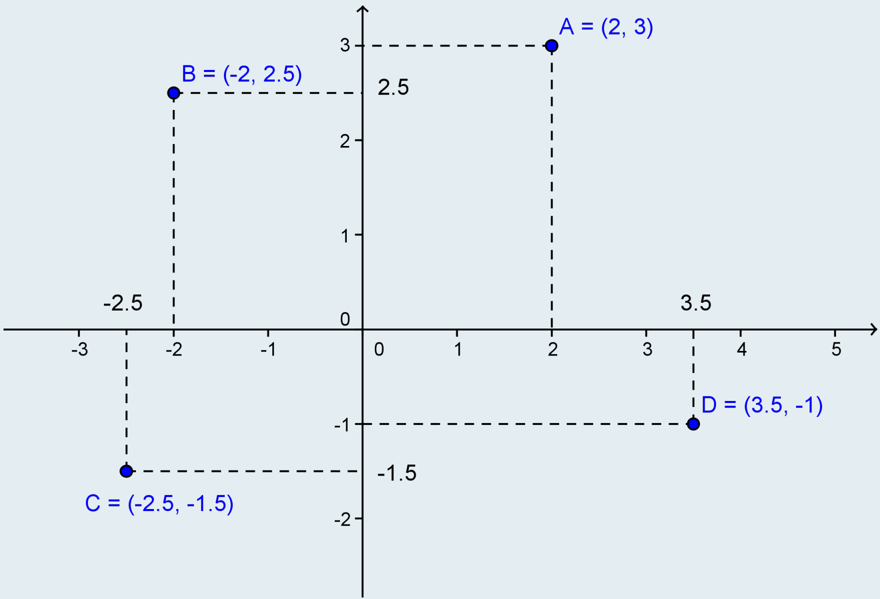
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Powstanie i rozwój geometrii analitycznej zawdzięczamy pracom Fermata, Pascala i Kartezjuszowi, którzy zaproponował przypisanie każdemu punktowi płaszczyzny pary liczb zwanej współrzędnymi tego punktu. Takie przyporządkowanie umożliwiło powiązanie tworów geometrycznych takich jak proste, okręgi i krzywe z odpowiadającymi im zależnościami między współrzędnymi punktów tych tworów. Mimo, iż pomysł wprowadzenia układu współrzędnych przypisuje się Kartezjuszowi, to prekursorem metody współrzędnych w geometrii był Fermat, który pierwszy opisał równaniami algebraicznymi proste i krzywe stożkowe powstałe z przecięcia płaszczyznami powierzchni stożka.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie


A = (2, 3)
B = (-2, 2.5)
C = (-2.5, -1.5)
D = (3.5, -1)
2.5
-2.5
3.5
-1.5
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

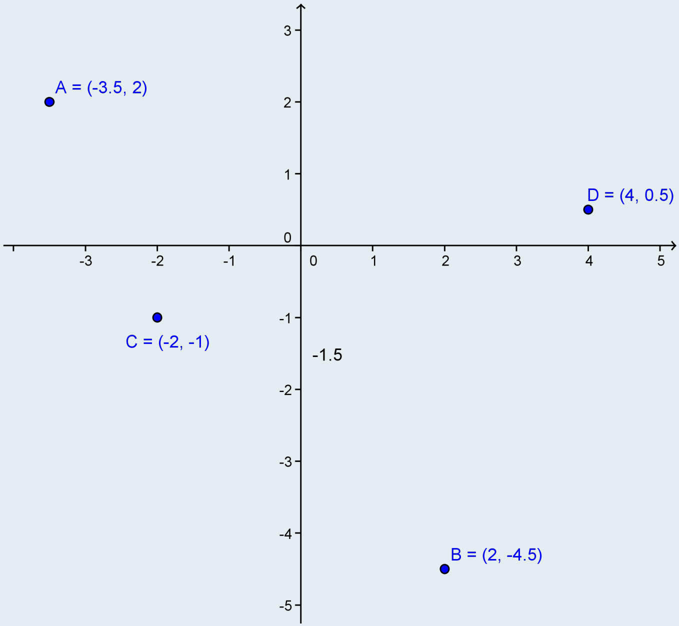
Ćwiczenie 1. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $A = (-3,5; 2)$, $B = (2; -4,5)$, $C = (-2, -1)$, $D = (4; 0,5)$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Punkty z tego ćwiczenia zaznaczono w układzie współrzędnych zobrazowanym na rysunku.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.



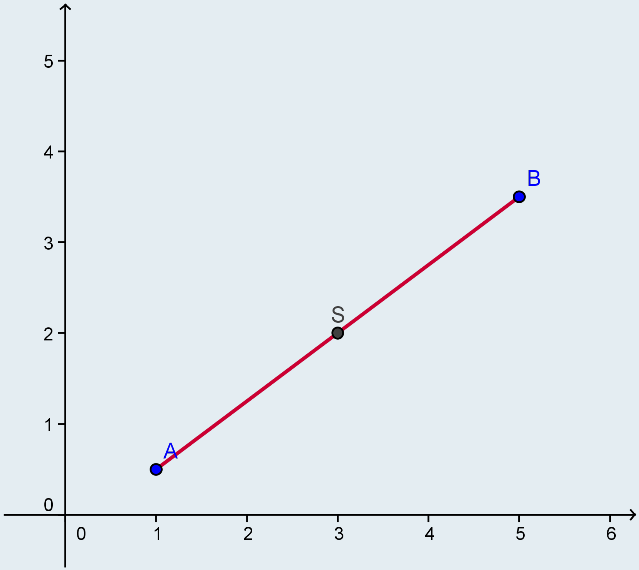
Wyjdziemy od wyznaczenia środka odcinka o zadanych końcach.

Problem 1. Wyznaczyć środek odcinka o końcach $A = (1; 0,5)$ oraz $B = (5; 3,5)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spróbujmy na początek wykonać rysunek.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie


5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
A
S
B

Oczywiście z rysunku wynika natychmiastowa odpowiedź

Odp. Środkiem odcinka AB jest punkt $S = (3, 2)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Czy potrafisz na podstawie tego zadania powiedzieć, jak wyznaczać środek odcinka o dowolnych końcach?

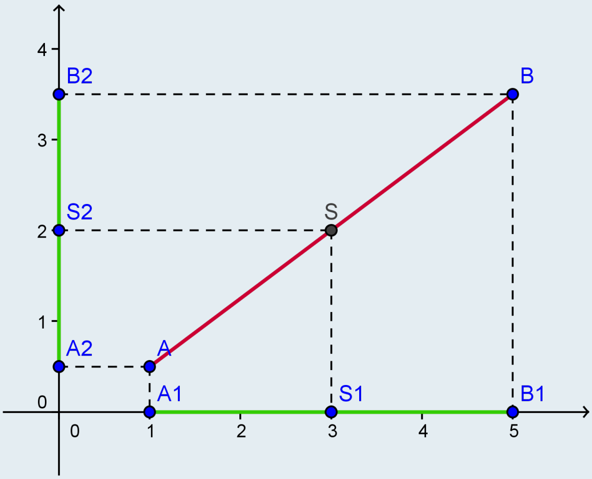
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Problem 2. Wyznaczyć środek odcinka o końcach $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tutaj odpowiedź już nie jest taka prosta. Spróbujmy przeanalizować ponownie poprzedni, szczególny problem, próbując uzasadnić otrzymane rozwiązanie. Wykreślmy dodatkowo rzuty odcinka AB na osie układu współrzędnych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

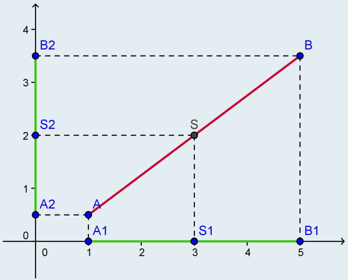

B2
B
S2
S
A2
A
A1
S1
B1
0
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4

Obserwując ten rysunek można przeprowadzić następujące rozumowanie:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uzasadnienie.

Niech $S = (a, b)$ będzie środkiem odcinka AB o końcach $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$. Rozważmy rzuty tego odcinka na osie układu współrzędnych. Otrzymamy odcinki A_1B_1, A_2B_2 o końcach, odpowiednio $A_1 = (x_1, 0)$, $B_1 = (x_2, 0)$ oraz $A_2 = (0, y_1)$, $B_2 = (0, y_2)$.



Z twierdzenia Talesa wynika, że rzuty $S_1 = (a, 0)$, $S_2 = (0, b)$ środka $S = (a, b)$ odcinka AB są środkami rzutów A_1B_1 oraz A_2B_2. Zatem

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Możemy więc sformułować następujące twierdzenie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 1. *Środkiem odcinka* AB *o końcach* $A = (x_1, y_1)$ *oraz* $B = (x_2, y_2)$ *jest punkt*

$$S = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 2. Wyznaczyć punkt będący środkiem odcinka o końcach $(-3, 4)$ oraz $(2, 1)$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Do wyznaczenia środka odcinka wykorzystać należy twierdzenie ??.
Po podstawieniu do wzoru otrzymamy następującą odpowiedź:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp . Środkiem odcinka o końcach $(-3,4)$ oraz $(2,1)$ jest punkt $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

Powiemy teraz, jak będziemy mierzyć odległość punktów w kartezjańskim układzie współrzędnych.

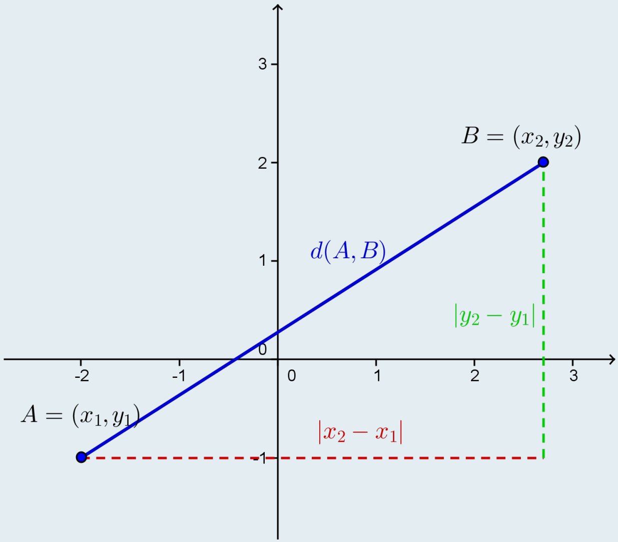
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 2. *Odległość* $d(A, B)$ *punktów* $A = (x_1, y_1)$ *oraz* $B = (x_2, y_2)$ *jest równa*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

W celu uzasadnienia tego twierdzenia wykonajmy na początek odpowiedni rysunek.


$B = (x_2, y_2)$
$d(A, B)$
$|y_2 - y_1|$
$A = (x_1, y_1)$
$|x_2 - x_1|$
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3

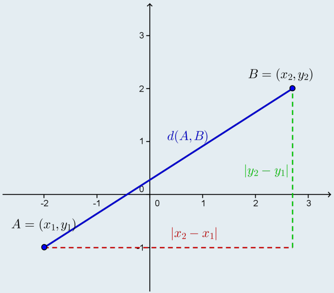
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykorzystując tak wykonany rysunek można już przystąpić do uzasadnienia tego twierdzenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uzasadnienie.

Niech $A = (x_1, y_1)$ oraz $B = (x_2, y_2)$ będą dane. Wówczas przyprostokątne otrzymanego trójkąta prostokątnego (por. rysunek) mają długości, odpowiednio, $|x_2 - x_1|$ oraz $|y_2 - y_1|$. Wówczas, na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymamy



$$d(A,B)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Ponieważ zaś $d(A,B) > 0$, więc

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 3. Obliczyć odległości podanych par punktów:

a) $A_1 = (-3, 2)$, $B_1 = (2, 3)$,

b) $A_2 = (1, 3)$, $B_1 = (-2, -1)$,

c) $A_3 = (-1, 4)$, $B_1 = (3, -2)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odpowiedzi do tego ćwiczenia podane są na kolejnym slajdzie.

Odp.

a) $d(A_1, B_1) = \sqrt{26}$,

b) $d(A_2, B_2) = 5$,

c) $d(A_3, B_3) = 2\sqrt{13}$.

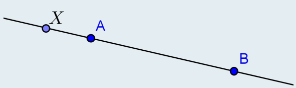
W dalszej kolejności przejdziemy do opisania równaniem prostych na płaszczyźnie. W matematyce szkolnej pojęcie prostej jest pojęciem pierwotnym. Euklides definiował prostą jako "długość bez szerokości". Prostą na płaszczyźnie można zdefiniować używając odległości.

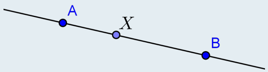
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

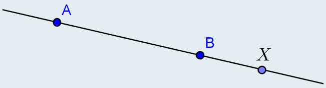
Definicja 1. Mówimy, że punkt X **leży pomiędzy** różnymi punktami A oraz B, jeśli

$$|AX| + |XB| = |AB|.$$

Definicja 2. **Prostą na płaszczyźnie** przechodzącą przez różne punkty A oraz B nazywamy zbiór wszystkich takich punktów płaszczyzny X, że $X = A$ lub $X = B$ lub A leży pomiędzy punktami X oraz B lub X leży pomiędzy punktami A oraz B lub B leży pomiędzy punktami A oraz X.







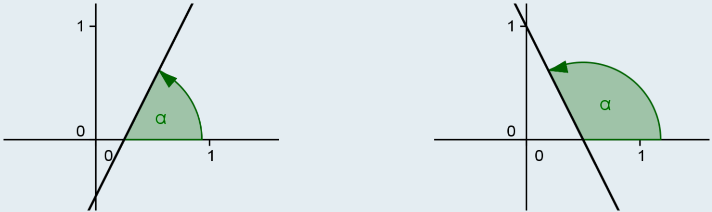
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przejdziemy teraz do analitycznego opisu prostej na płaszczyźnie. Rozpoczniemy od równania kierunkowego prostej.

Twierdzenie 3. *Równanie prostej l nachylonej pod kątem $\alpha \neq 90^\circ$ do osi OX i przecinającej oś OY w punkcie $B(0, b)$ ma postać*

$$l : y = ax + b, \tag{1}$$

gdzie $a = \operatorname{tg} \alpha$.

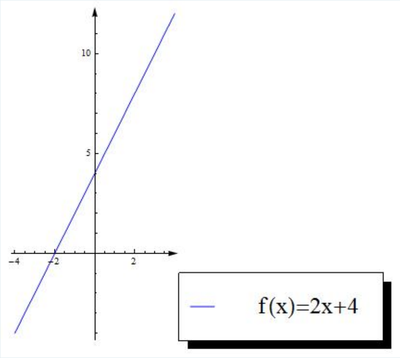


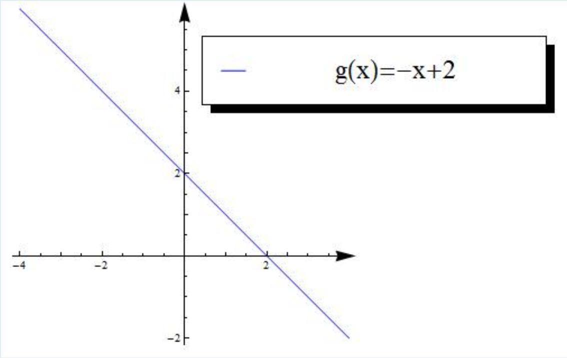
Na odwrót, dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz b, równanie $(??)$ opisuje prostą nachyloną pod kątem $\alpha \neq 90^\circ$ do osi OX i przecinającą oś OY w punkcie $B(0, b)$.

Analizując twierdzenie ?? można zauważyć, że nie każdą prostą na płaszczyźnie można opisać równaniem kierunkowym.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 1. Współczynnik a w równaniu kierunkowym prostej (??) nazywamy **współczynnikiem kierunkowym prostej**.





Geometryczna interpretacja współczynnika kierunkowego jako tangensa kąta nachylenia do osi OX zawarta jest również w symulacji .

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Współczynniki pojawiające się w równaniu kierunkowym prostej opisują daną prostą jednoznacznie, tzn. prawdziwy jest następujący wniosek.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 1. *Dwie proste k oraz l opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \; y = a_1x + b_1,$$
$$l: \; y = a_2x + b_2,$$

są identyczne (pokrywają się) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 = a_2 \quad \textit{oraz } b_1 = b_2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykorzystamy teraz wniosek ?? do wyznaczenia równania prostej przechodzącej przez dwa różne punkty.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 1. Napisać równanie prostej l, która przechodzi przez punkty $(-1, 1)$ i $(2, -3)$.

Rozwiązanie. Zaznaczając punkty $(-1,1)$ i $(2,-3)$ w układzie współrzędnych można się przekonać, że poszukiwana prosta nie jest prostopadła do osi OX, więc możemy wyznaczyć jej równanie kierunkowe. Szukamy zatem takich liczb rzeczywistych a oraz b, dla których punkty $(-1,1)$ i $(2,-3)$ spełniają równanie

$$y = ax + b. \tag{2}$$

Podstawiając współrzędne punktów $(-1,1)$ i $(2,-3)$ do równania (??) otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 1 &= -a + b \\ -3 &= 2a + b, \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest para liczb $a = -\frac{4}{3}$ oraz $b = -\frac{1}{3}$.

Odp. Prosta przechodząca przez punkty $(-1, 1)$ oraz $(2, -3)$ ma równanie $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$.

W celu utrwalenia poznanej metody proponujemy wykonać następujące ćwiczenie.

Ćwiczenie 4. Napisać równania prostych przechodzących przez podane pary punktów:

a) $(2, 0)$ oraz $(0, -2)$,

b) $(3, -1)$ oraz $(-2, -1)$,

c) $(0, 0)$ oraz $(1, 4)$,

d) $(-2, 3)$ oraz $(1, -3)$,

e) $(1, -2)$ oraz $(-2, -4)$,

f) $(-3, -5)$ oraz $(2, 6)$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ponieważ rozwiązanie ćwiczenia ?? nie wymaga żadnych modyfikacji metody pokazanej w rozwiązaniu przykładu ??, podamy jedynie odpowiedzi do ćwiczenia ??.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) $y = x - 2$,

b) $y = -1$,

c) $y = 4x$,

d) $y = -2x - 1$,

e) $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$,

f) $y = \frac{11}{5}x + \frac{8}{5}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spróbujmy teraz rozważyć przypadek prostej przechodzącej przez dwa punkty mające tą samą pierwszą współrzędną.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Problem 3. Co można powiedzieć o współrzędnych punktów leżących na prostej przechodzącej przez dwa punkty mające tą samą pierwszą współrzędną?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jeśli nie potrafisz odpowiedzieć na to pytanie, spróbuj zbadać następujący przykład.

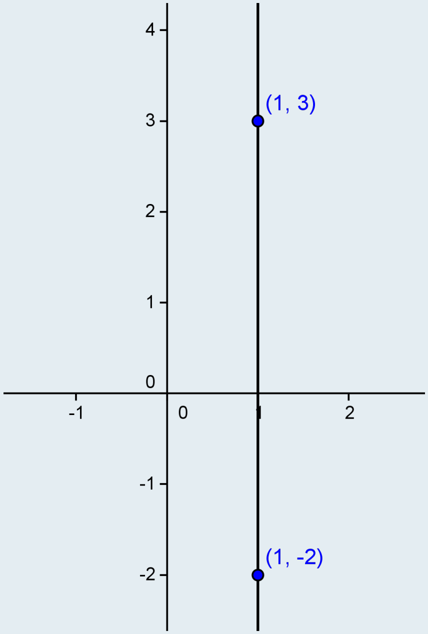
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 2. Zaznacz w układzie współrzędnych punkty $(1, -2)$ oraz $(1, 3)$ a następnie narysuj prostą przechodzącą przez te punkty. Wybierz trzy dowolne (ale inne od wyjściowych) punkty leżące na tej prostej (najlepiej takie, które mają współrzędne całkowite). Wypisz współrzędne tych punktów. Jaką prawidłowość możesz zaobserwować?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rysunek do przykładu ?? znajduje się na kolejnym slajdzie.


4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
(1, 3)
(1, -2)

Można tu oczywiście zaobserwować, że wszystkie punkty na prostej przechodzącej przez punkty $(1, -2)$ oraz $(1, 3)$ mają pierwszą współrzędną równą 1. Poczyniona obserwacja prowadzi do następującego wniosku.

Wniosek 2. *Prosta poprowadzona przez dwa różne punkty o współrzędnych* (x_0, y_1) *oraz* (x_0, y_2) *ma równanie*

$$x = x_0.$$

Ćwiczenie 5. Napisać równania prostych przechodzących przez podane pary punktów:

a) $(2, 0)$ oraz $(2, -2)$,

b) $(0, -1)$ oraz $(0, 3)$,

c) $(-1, 0)$ oraz $(-1, 4)$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odpowiedzi do ćwiczenia ?? są następujące:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp.

a) $x = 2$,

b) $x = 0$,

c) $x = -1$.

Wprost z interpretacji geometrycznej współczynników równania kierunkowego prostej wynika następujący wniosek dotyczący równoległości prostych opisanych tym równaniem.

Wniosek 3. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \ y = a_1 x + b_1,$$
$$l: \ y = a_2 x + b_2,$$

są równoległe (co zapisujemy $k \parallel l$) wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki kierunkowe są równe, tzn.

$$a_1 = a_2.$$

Przytoczoną własność wykorzystamy do rozwiązania następującego zadania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 3. Napisać równanie prostej k, która przechodzi przez punkt $(-2, 1)$ i jest równoległa do prostej nachylonej do osi OX pod kątem $60°$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

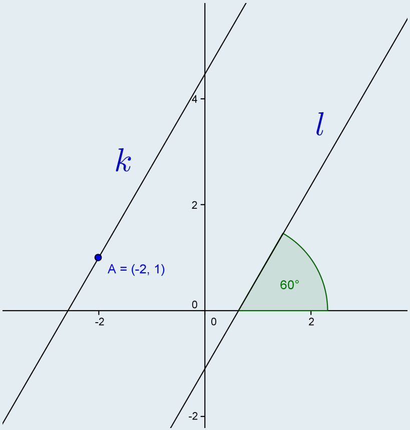
Na początku wypiszmy co jest w zadaniu dane, a co szukane oraz wykonajmy rysunek.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A=(-2,1)$
prosta l nachylona pod kątem $\alpha=60^\circ$ do osi OX,

Sz: równanie prostej
$k: y=ax+b$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Możemy teraz rozwiązać to przykładowe zadanie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wiemy, że każda prosta l nachylona pod kątem $\alpha = 60^\circ$ do osi OX ma współczynnik kierunkowy $a' = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. Stąd, z Wniosku ?? poszukiwana prosta k będzie miała taki współczynnik kierunkowy, tzn. $a = \sqrt{3}$. Poszukujemy więc prostej k o równaniu

$$k : y = \sqrt{3} \cdot x + b.$$

Współczynnik b wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej k. Otrzymamy zatem

$$1 = \sqrt{3} \cdot (-2) + b,$$

skąd wyznaczymy $b = 1 + 2\sqrt{3}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Poszukiwana prosta k ma równanie $y = \sqrt{3} \cdot x + 1 + 2\sqrt{3}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiążemy kolejne przykładowe zadanie.

Przykład 4. Napisać równanie prostej l, która przechodzi przez punkt $(1, -2)$ i jest równoległa do prostej p zadanej równaniem $x + 2y - 3 = 0$.

Jak poprzednio, wypiszemy co jest w zadaniu dane, co szukane. Przed wykonaniem rysunku należy jeszcze zauważyć, że:

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 2. Równanie $x+2y-3=0$ opisuje prostą, gdyż wykonując kolejno następujące przekształcenia:

$$x + 2y - 3 = 0$$

$$2y = -x + 3$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}$$

otrzymamy równanie kierunkowe prostej.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

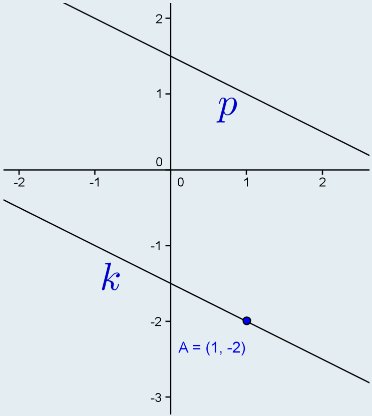
Wykonajmy zatem jeszcze rysunek i otrzymamy:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (3, -2)$
prosta p o równaniu
$p : x + 2y - 3 = 0$,

Sz: równanie prostej
$l : y = ax + b$.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Możemy teraz rozwiązać to zadanie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wiemy już, że prostą p możemy zapisać równaniem kierunkowym

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

stąd jej współczynnik kierunkowy jest równy $a' = -\frac{1}{2}$. Zatem poszukiwana prosta l będzie miała taki współczynnik kierunkowy, tzn. $a = -\frac{1}{2}$. Poszukujemy więc prostej l o równaniu

$$l : y = -\frac{1}{2}x + b.$$

Współczynnik b, jak poprzednio, wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej l. Otrzymamy zatem

$$-2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + b,$$

więc $b = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Poszukiwana prosta l ma równanie $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

W celu utrwalenia nabytych umiejętności proponujemy wykonać następujące ćwiczenie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 6. Napisać równania prostej

a) przechodzącej przez punkt $(-3, -1)$ i nachylonej pod kątem 45° do osi OX,

b) przechodzącej przez punkt $(2, -3)$ i nachylonej pod kątem 120° do osi OX,

c) przechodzącej przez punkt $(-5, 0)$ i równoległej do prostej o równaniu $-2x - y + 4 = 0$,

c) przechodzącej przez punkt $(2, 3)$ i równoległej do prostej o równaniu $3x + 2y - 4 = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odpowiedzi do ćwiczenia ?? są następujące:

Odp.

a) $y = x + 2$,

b) $y = -\sqrt{3} \cdot x - 3 + 2\sqrt{3}$,

c) $y = -2x - 10$,

d) $y = -\frac{3}{2}x + 6$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zastanówmy się teraz, jak zbadać, czy proste opisane zadanymi równaniami kierunkowymi są prostopadłe. Wyjdźmy na początek od prostszego przypadku.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Problem 4. Napisać równanie wybranej prostej prostopadłej do prostej $y = 2$. Np. takiej, która przechodzi przez punkt $(-1, 1)$.

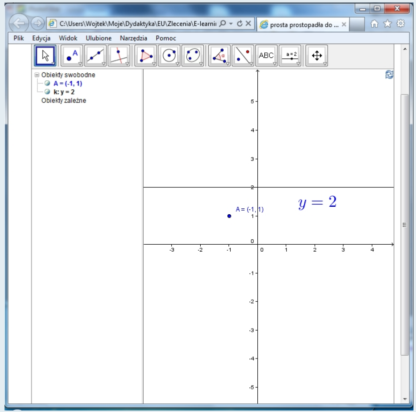
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie tego problemu będzie prostsze po wykonaniu rysunku.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Problem ten możesz rozwiązać graficznie w programie Geogebra następująco: po uruchomieniu okna



w przeglądarce internetowej (z obsługą Java) należy wykreślić prostą prostopadłą do $y = 2$ poprowadzoną przez punkt $A = (-1, 1)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

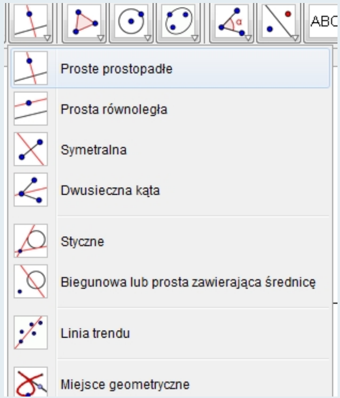
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Sposób wykonania tej konstrukcji pokazano na kolejnym slajdzie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

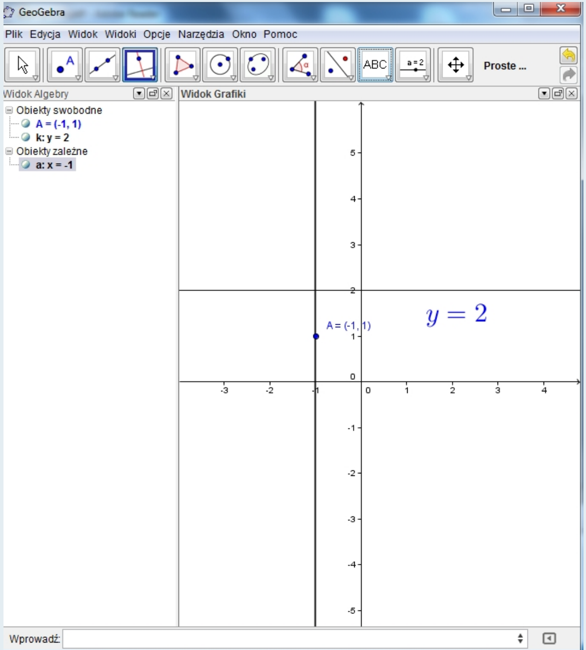
Po "kliknięciu" na ikonę  z listy wybrać "proste prostopadłe"



i myszką wskazać prostą $y = 2$ (do której konstruujemy prostą prostopadłą) oraz punkt $A = (-1, 1)$ (przez który prowadzimy prostą prostopadłą).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

W wyniku tej konstrukcji otrzymamy:


GeoGebra
Plik Edycja Widok Widoki Opcje Narzędzia Okno Pomoc
Proste ...
Widok Algebry
Obiekty swobodne
A = (-1, 1)
k: y = 2
Obiekty zależne
a: x = -1
Widok Grafiki
A = (-1, 1)
y = 2
Wprowadź:

Odp. Poszukiwana prosta ma równanie $x = -1$.

Przejdziemy teraz do analizy bardziej skomplikowanego przypadku prostopadłości prostych opisanych równaniami kierunkowymi. Konsekwencją prostopadłości wektorów równoległych do prostych jest następujący wniosek podający warunek równoważny na prostopadłość prostych opisanych równaniami kierunkowymi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 4. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \; y = a_1 x + b_1,$$
$$l: \; y = a_2 x + b_2,$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 a_2 = -1.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykorzystamy poznaną własność do rozwiązania następującego zadania.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

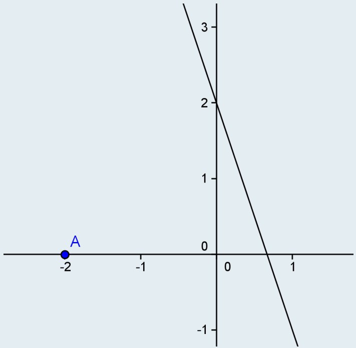
Przykład 5. Napisać równanie prostej k przechodzącej przez punkt $(-2, 0)$ i jest prostopadłej do prostej l o równaniu $y = -3x + 2$.

Na początku wypiszemy dane, szukane oraz wykonany rysunek.

Rozwiązanie.

D: $A = (-2, 0)$
prosta l o równaniu
$l : y = -3x + 2$,

Sz: równanie prostej
prostopadłej $k : y = ax + b$.



Zadana prosta l ma równanie $y = -3x + 2$, więc jej współczynnik kierunkowy jest równy $a' = -3$. Stąd współczynnik kierunkowy poszukiwanej prostej k będzie równy $a = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$. Zatem prosta l ma równanie

$$l : y = \frac{1}{3}x + b.$$

Współczynnik b w tym równaniu wyliczymy, podobnie jak w poprzednich zadaniach, podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej l. Otrzymujemy

$$0 = \frac{1}{3} \cdot (-2) + b,$$

więc $b = \frac{2}{3}$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Poszukiwana prosta l ma równanie $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

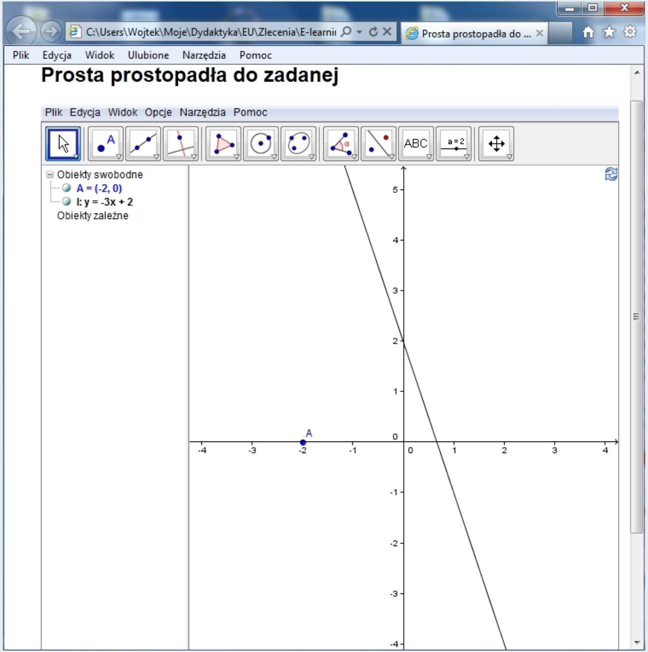
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spróbuj wykonać to zadanie w programie Geogebra i porównaj otrzymany wynik z podaną wcześniej odpowiedzią.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

W celu osiągnięcia większej wprawy proponujemy rozwiązać następujące zadanie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 7. Napisać równanie prostej

a) przechodzącej przez punkt $(-2,-1)$ i prostopadłej do prostej danej równaniem $y=-\frac{3}{5}x-1$,

b) przechodzącej przez punkt $(1,-4)$ i prostopadłej do prostej danej równaniem $2x-y=4$,

c) przechodzącej przez punkt $(-4,1)$ i prostopadłej do prostej nachylonej pod kątem 30° do osi OX,

d) przechodzącej przez punkt $(1,2)$ i prostopadłej do prostej danej równaniem $-2y+3x-4=0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Do zadania tego podamy jedynie odpowiedzi.

Odp.

a) $y = \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}$,

b) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$,

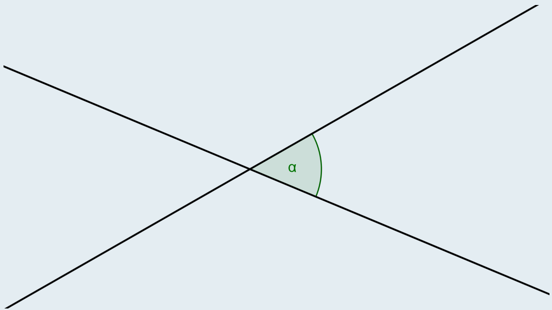
c) $y = -\sqrt{3} \cdot x + 1 - 4\sqrt{3}$,

d) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Okazuje się, że mając dwie proste opisane równaniami kierunkowymi potrafimy wyznaczyć kąt przecięcia między tymi prostymi. Wiemy już, kiedy proste opisane równaniami kierunkowymi są prostopadłe. Nim sformułujemy stosowną własność przypomnimy, jak rozumieć należy kąt pomiędzy dwoma przecinającymi się prostymi.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 3. Dwie przecinające się na płaszczyźnie proste tworzą dwie pary kątów wierzchołkowych, z których nie większy nazywamy **kątem pomiędzy dwoma przecinającymi się prostymi**.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wniosek 5. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k:\ \ y = a_1x + b_1,$$
$$l:\ \ y = a_2x + b_2,$$

które nie są prostopadłe, przecinają się pod takim kątem α*, że*

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2}\right|.$$

Własność opisaną we wniosku ?? zobrazujemy następującym przykładem.

Przykład 6. Wyznaczyć kąt pomiędzy prostymi $y = 2x + 7$ oraz $y = -3x - 2$.

Rozwiązanie.

D: prosta $k : y = 2x + 7$
prosta $l : y = -3x - 2$

Sz: kąt α przecięcia się prostych k oraz l.

Z danych wynika, że $a_1 = 2$ oraz $a_2 = -4$. Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{5}{5} \right| = 1,$$

więc $\alpha = 45^\circ$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Proste w zadaniu przecinają się pod kątem 45°.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Jako podsumowanie zdobytych wiadomości rozwiążemy następujące zadania.

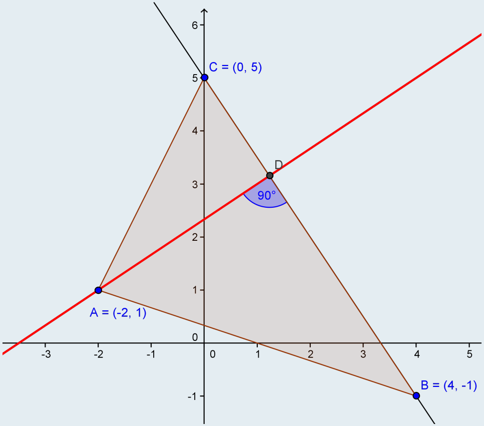
Zadanie 1. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, 1)$, $B = (4, -1)$, $C = (0, 5)$ wyznaczyć równanie prostej zawierającej wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka A.

Spróbuj na początek wypisać dane, szukane oraz wykonaj stosowny rysunek.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (-2, 1)$ Sz: równanie prostej zawierającej
$B = (4, -1)$ wysokość trójkąta ABC
$C = (0, 5)$ opuszczona z wierzchołka A.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Możemy teraz przystąpić do rozwiązania zadania. W tym celu należy stworzyć plan rozwiązania, tzn. musimy określić, co, i w jakiej kolejności musimy wyznaczyć lub obliczyć. Musimy tu wyznaczyć równanie prostej zaznaczonej na rysunku kolorem czerwonym. Jest ona, zawierając wysokość trójkąta, prostopadła do odcinka BC.

Plan rozwiązania:

1. wyznaczyć równanie prostej k zawierającej bok BC,
2. wyznaczyć równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A.

Krok 1. Wyznaczymy równanie prostej k przechodzącej przez punkty B oraz C. Zauważmy, że prosta ta nie jest prostopadła do osi OX więc możemy zapisać

$$k : y = ax + b.$$

Podstawiając współrzędne punktów B i C do równania poszukiwanej prostej k otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} -1 = a \cdot 4 + b, \\ 5 = a \cdot 0 + b \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest para $a = -\frac{3}{2}$, $b = -5$. Zatem

$$k : y = -\frac{3}{2}x + 5.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 2. Wyznaczymy równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A. Ponieważ

$$k : y = -\frac{3}{2}x + 5,$$

więc współczynnik kierunkowy prostej l prostopadłej do k jest równy $a = \frac{2}{3}$. Stąd

$$l : y = \frac{2}{3}x + b.$$

Niewiadomy parametr b w tym równaniu wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu A do równania prostej l. Otrzymamy

$$1 = \frac{2}{3} \cdot (-2) + 5,$$

więc $b = \frac{7}{3}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp . Prosta zawierająca wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A ma równanie $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

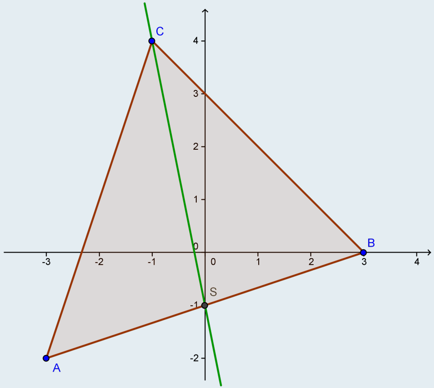
Rozwiążmy kolejne zadanie.

Zadanie 2. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-3, -2)$, $B = (3, 0)$, $C = (-1, 4)$ wyznaczyć równanie prostej zawierającej środkową tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C.

Wypiszemy dane, szukane oraz wykonamy stosowny rysunek.

Rozwiązanie.

D: $A = (-3, -2)$ Sz: równanie prostej zawierającej
$B = (3, 0)$ środkową trójkąta ABC
$C = (-1, 4)$ opuszczoną z wierzchołka C.



Stworzymy plan rozwiązania tego zadania. Określimy co, i w jakiej kolejności musimy wyznaczyć lub obliczyć. Na początek wyznaczymy środek boku AB otrzymując punkt D. Następnie napiszemy równanie prostej zaznaczonej na rysunku kolorem zielonym, która przechodzi przez punkty C oraz D.

Plan rozwiązania:

1. wyznaczyć środek S odcinka AB,
2. napisać równanie prostej k przechodzącej przez punkty C oraz S.

Krok 1. Wyznaczymy współrzędne środka S odcinka AB. Wykorzystując Twierdzenie ?? otrzymamy

$$S = \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-2+0}{2} \right) = (0, -1).$$

Krok 2. Wyznaczymy teraz równanie prostej k przechodzącej przez punkty C oraz S. Prosta ta (por. rysunek) nie jest prostopadła do osi OX, więc można przyjąć

$$k : y = ax + b.$$

Nieznane parametry a oraz b wyznaczymy podstawiając współrzędne punktów C oraz S do równania prostej k. Otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 4 = a \cdot (-1) + b \\ -1 = a \cdot 0 + b, \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest para $a = -5$ oraz $b = -1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp . Prosta zawierająca środkową trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C ma równanie $y = -5x - 1$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

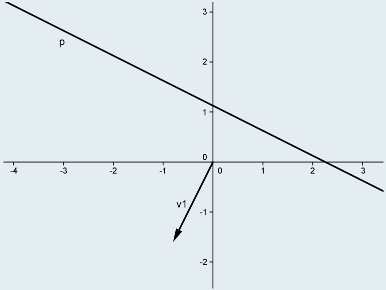
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przeanalizujemy dalej inny typ równań opisujących proste w układzie współrzędnych. Jak dobrze pamiętasz, równaniem kierunkowym nie można było opisać prostych równoległych do osi OX. Równanie ogólne prostej nie będzie miało takiego defektu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Twierdzenie 4. *Każdą prostą p na płaszczyźnie można opisać równaniem*

$$p : Ax + By + C = 0. \tag{3}$$



Na odwrót, dla dowolnych takich liczb rzeczywistych A, B, C, że $A^2 + B^2 > 0$, równanie (??) przedstawia prostą prostopadłą do niezerowego wektora $[A, B]$.

Jak już to zostało wspomniane, równaniem ogólnym można opisać każdą prostą na płaszczyźnie. Tej zalety nie miało równanie ogólne prostej. Niestety, mankamentem równania ogólnego prostej jest brak jednoznaczności opisu, tzn. dla każdej prostej na płaszczyźnie można napisać nieskończenie wiele równań w postaci ogólnej.

Przykład 7. Narysować w układzie współrzędnych proste

$$k : x - 2y + 4 = 0,$$
$$l : 2x - 4y + 8 = 0.$$

Możesz w tym celu wykorzystać program *Geogebra*.

Zauważmy, że wyznaczając z obu równań zmienną y, proste te można opisać jednym równaniem kierunkowym

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

Wniosek 6. *Dwie proste opisane równaniami ogólnymi*

$$k: \; A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l: \; A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

pokrywają się wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}, \tag{4}$$

przy czym warunek (??) *oznacza* ***proporcję***.

Przejdziemy teraz do analizy przypadku prostych równoległych.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 3. Z interpretacji geometrycznej współczynników równania ogólnego prostej wynika, że prosta

$$p : Ax + By + C = 0$$

jest prostopadła do wektora $[A, B]$. Ponieważ zaś wektory proporcjonalne są równoległe, więc prosta p będzie prostopadła do każdego wektora $[tA, tB] = t \cdot [A, B]$, gdzie $t \neq 0$. Z kolei, do wektora $[tA, tB]$ prostopadłą jest prosta o równaniu

$$k : tAx + tBy + C' = 0.$$

Zatem proste p i k są równoległe (jako prostopadłe do dwóch współliniowych wektorów). Poczyniona obserwacja prowadzi do następującego:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wniosek 7. *Dwie proste opisane równaniami ogólnymi*

$$k: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad \textbf{(proporcja)}$$

co oczywiście równoważne jest warunkowi

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0.$$

Wykorzystamy ten wniosek do rozwiązania następującego przykładu.

Przykład 8. Napisać równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkt $(-3, 2)$ i równoległej do prostej o równaniu $x - 4y + 7 = 0$.

Wypiszemy dane i szukane, a następnie rozwiążemy to zadanie wykorzystując Wniosek ??.

Rozwiązanie.

D: $A = (-3, 2)$
prosta $k : x - 4y + 7 = 0$

Sz: równanie ogólne prostej $l : Ax + By + C = 0$ równoległej do k

Ponieważ prosta l jest równoległa do k, więc możemy przyjąć $A = 1$ oraz $B = -4$. Stąd mamy

$$l : x - 4y + C = 0.$$

Nieznany parametr C wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu A do otrzymanego równania prostej l. Mamy więc

$$-3 - 4 \cdot 2 + C = 0.$$

Zatem $C = 11$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Prosta równoległa do prostej k i przechodząca przez punkt $(-3, 2)$ ma równanie

$$l : x - 4y + 11 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

W celu utrwalenia nabytych umiejętności proponujemy wykonać następujące ćwiczenia.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 8. Napisać równanie prostej:

a) przechodzącej przez punkt $A = (3, -1)$ i równoległej do prostej $k : -2x + 3y - 1 = 0$,

b) przechodzącej przez punkt $B = (-1, -1)$ i równoległej do prostej $l : x + 2y - 5 = 0$,

c) przechodzącej przez punkt $C = (-1, 2)$ i równoległej do prostej $p : \frac{1}{3}x + 2y - \frac{1}{2} = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Podamy jedynie odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) $-2x + 3y + 9 = 0$,

b) $x + 2y + 3 = 0$,

c) $\frac{1}{3}x + 2y - \frac{11}{3} = 0$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zastanówmy się teraz, jak napisać równanie prostej prostopadłej do zadanej. Wiadomo, że

Uwaga 4. Równanie ogólne prostej (niech to będzie prosta k) wyznacza jeden z wielu wektorów prostopadłych do tej prostej. Oznaczmy go przez $v = [A, B]$. Naturalnym się więc staje, że aby napisać równanie rodziny prostych prostopadłych do zadanej należy wyznaczyć wektor prostopadły do v. Oznaczmy do przez w. Można oczywiście sprawdzić, że takim wektorem jest dla przykładu $w = [B, -A]$. Wektor ten jest równoległy do prostej k. Wówczas każda prosta l prostopadła do wektora v (a ich równania potrafimy napisać) będzie też prostopadła do prostej k. Opisaną procedurę można prześledzić na następującej prezentacji wykonanej w programie *Geogebra* (po wywołaniu okna przeglądarki należy odtworzyć prezentację przyciskiem *Odtwórz*).

Z przeprowadzonego rozumowania wynika następujący wniosek.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wniosek 8. *Dwie proste opisane równaniami kierunkowymi*

$$k: \; A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$l: \; A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

W szczególności prosta

$$k: \; Ax + By + C_1 = 0$$

jest prostopadła do każdej z prostych

$$l_1: \; Bx - Ay + C_2 = 0$$
$$l_2: \; -Bx + Ay + C_3 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Sformułowaną we wniosku własność wykorzystamy do wykonania następującego ćwiczenia.

Przykład 9. Napisać równanie prostej prostopadłej do prostej $2x - 3y - 5 = 0$ i przechodzącej przez punkt $(0, 2)$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $A = (0, 2)$
prosta $k : 2x - 3y - 5 = 0$

Sz: równanie ogólne prostej
$l : Ax + By + C = 0$
prostopadłej do k

Z Wniosku ?? wynika, że prostą l prostopadła do k można opisać równaniem

$$l : 3x + 2y + C = 0.$$

zaś poszukiwany parametr C wyznaczymy podstawiając współrzędne punktu A do otrzymanego równania prostej l. Mamy zatem

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + C = 0.$$

Stąd $C = -4$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Prosta prostopadła do prostej k i przechodząca przez punkt $(0,2)$ ma równanie

$$l : 3x + 2y - 4 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dla utrwalenia wiadomości proponujemy wykonać następujące

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 9. Napisać równanie prostej:

a) przechodzącej przez punkt $A = (1, -1)$ i prostopadłej do prostej $k : -x + 2y - 4 = 0$,

b) przechodzącej przez punkt $B = (3, -1)$ i prostopadłej do prostej $l : -3x - 4y + 7 = 0$,

c) przechodzącej przez punkt $C = (-1, 0)$ i prostopadłej do prostej $p : \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{2} = 0$.

Podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Odp.

a) $2x + y - 1 = 0$,

b) $4x - 3y - 15 = 0$,

c) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{3} = 0$.

Czas na następne zadanie.

Zadanie 3. Przeanalizować wzajemne położenie prostych

$$\begin{cases} k: \ \ y = -x + 3, \\ l: \ 2x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

ma płaszczyźnie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wypiszemy dane w zadaniu. Wykonanie rysunku zasugeruje odpowiedź, ale należy ją właściwie uzasadnić!

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

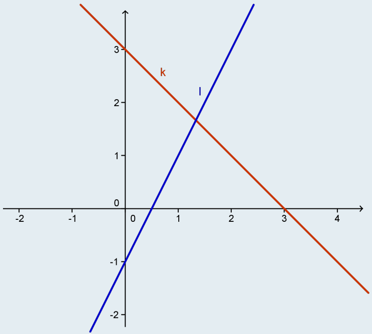
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $k: \ y = -x + 3$

$l: \ 2x - y - 1 = 0$

Sz: wzajemne położenie prostych k i l.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Stworzymy plan rozwiązania tego zadania. Musimy po kolei przeanalizować możliwe przypadki. W tym celu musimy obie proste opisać tym samym typem równania. Prosta k opisana jest równaniem kierunkowy, zaś prosta l – równaniem ogólnym, ale możliwe jest opisanie również tej prostej równaniem kierunkowym. Potem należy przeanalizować możliwości dotyczące współczynników w obu równaniach.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan rozwiązania:

1. zapisać prostą l równaniem kierunkowym,
2. zbadać współczynniki kierunkowe obu prostych rozważając następujące możliwości:
   a) są równe, a wtedy zbadać, czy proste się pokrywają, czy są rozłączne (a więc równoległe),
   b) ich iloczyn jest równy -1,
   c) żadna z powyższych dwu możliwości.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 1. Przekształcając równanie ogólne prostej l na równanie kierunkowe otrzymamy

$$\begin{cases} k: \ y = -x + 3, \\ l: \ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Krok 2. Widzimy, że współczynniki kierunkowe prostych k i l są różne, zaś ich iloczyn (równy -2) jest różny od -1, więc proste przecinają się pod kątem ostrym.

Odp. Proste w zadaniu przecinają się pod kątem ostrym.

Kolejne zadanie o wzajemnym położeniu prostych rozwiążemy sprowadzając problem do analizy równań ogólnych badanych prostych.

Zadanie 4. Przeanalizować wzajemne położenie prostych

$$\begin{cases} k: \; x - 3y + 2 = 0, \\ l: \; x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

ma płaszczyźnie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wypiszemy dane w zadaniu i wykonajmy stosowny rysunek. Wykonanie rysunku nie jest konieczne, ale zasugeruje odpowiedź, którą należy poprawnie uzasadnić!

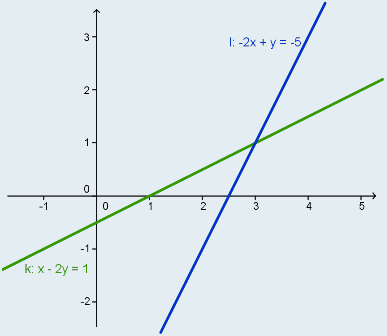
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $k: \ x - 3y + 2 = 0$ Sz: wzajemne położenie

$l: \ x + 3y - 1 = 0$ prostych k i l.



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Stworzymy teraz plan rozwiązania zadania. Przeanalizujemy możliwe przypadki. Obie proste zapisane sę równaniami ogólnymi. Potem należy przeanalizować możliwości dotyczące współczynników w obu równaniach.

Plan rozwiązania:

1. zbadać, czy proste k i l są równoległe (patrz Wniosek ??), i jeśli tak, to należy zbadać:
   a) czy proste pokrywają się (patrz Wniosek ??),
   b) czy też nie (patrz Wniosek ??), tzn. czy są rozłączne,
2. jeśli proste nie są równoległe, to zbadać, czy są one prostopadłe (patrz Wniosek ??); w tym przypadku, bez względu na odpowiedź nasze proste przecinają się w dokładnie jednym punkcie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Krok 1. Dla prostych

$$\begin{cases} k: \; x - 3y + 2 = 0 \\ l: \; x + 3y - 1 = 0, \end{cases}$$

wykorzystując Wniosek ??, obliczamy $1 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) = -6 \neq 0$, więc proste nie są równoległe (tym bardziej więc nie pokrywają się!).
Krok 2. Na podstawie Wniosku ?? obliczamy $1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 = -8$, więc proste k oraz l nie są też prostopadłe. Stąd przecinają się pod kątem ostrym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp. Proste w zadaniu przecinają się pod kątem ostrym.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Dla utrwalenia tego schematu proponujemy rozwiązać następujące ćwiczenie.

Ćwiczenie 10. Zbadać wzajemne położenie następujących par prostych

a) $\begin{cases} k_1: \ y = 3x - 2, \\ l_1: \ 6x - 2y - 4 = 0, \end{cases}$

b) $\begin{cases} k_2: \ 2x - 4y + 8 = 0, \\ l_2: \ y = \frac{1}{2}x + 8, \end{cases}$

c) $\begin{cases} k_3: \ 3x - 4y + 7 = 0, \\ l_3: \ 4x + 3y - 1 = 0, \end{cases}$

d) $\begin{cases} k_4: \ x - 2y = 0, \\ l_4: \ 3x + y - 5 = 0. \end{cases}$

Do zadania tego podamy jedynie odpowiedzi.

Odp.

a) proste pokrywają się,

b) proste są równoległe, ale nie pokrywają się,

c) proste są prostopadłe,

d) proste przecinają się pod kątem ostrym.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Znając już procedurę badania wzajemnego położenia prostych opisanych równaniami, zajmiemy się geometryczną interpretacją układu równań liniowych oraz istnieniem i liczbą jego rozwiązań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 5. Rozwiązać graficznie układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -5. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Musimy powiedzieć, jak należy rozumieć rozwiązywanie układu rów-
nań metodą graficzną.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 5. Rozwiązując graficzne układu równań należy:

1. zbadać czy układ posiada rozwiązanie i określić liczbę rozwiązań (wynika ze wzajemnego położenia prostych opisanych równaniami układu równań):
   a) proste są równoległe i nie pokrywają się – układ **sprzeczny**,
   b) proste pokrywają się – układ **nieoznaczony**,
   c) proste przecinają się – układ **oznaczony**,
2. wykreślić proste i wyznaczyć rozwiązanie (o ile jest to możliwe),
3. sprawdzić, czy wyznaczona para liczb spełnia układ równań.

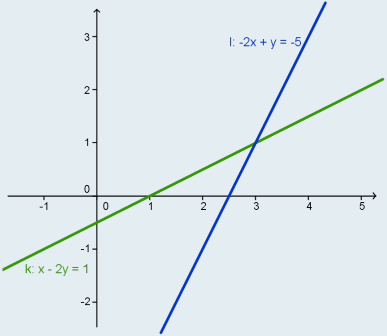
Wracając do naszego problemu, wypiszemy dane w zadaniu:

Rozwiązanie.

D: układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -5. \end{cases}$$

Sz: rozwiązanie układu.



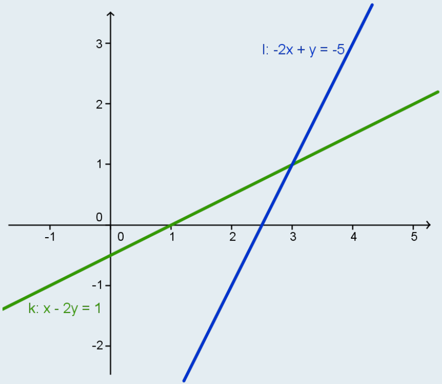
Rozwiążemy teraz graficznie ten układ równań.

Krok 1. Zapisujemy równania układu tak, aby opisywały proste dane równaniami ogólnymi. Mamy zatem

$$\begin{cases} k: \;\; x - 2y - 1 = 0 \\ l: \;\; -2x + y + 5 = 0, \end{cases}$$

Wykorzystując Wniosek ??, obliczamy $1 \cdot 1 - (-2) \cdot (-2) = -3 \neq 0$, więc proste opisane równaniami naszego układu równań nie są równoległe (tym bardziej więc nie pokrywają się!). Stąd układ równań jest oznaczony i wyznaczymy jego jedyne rozwiązanie.

Krok 2. Z rysunku



można odczytać, że rozwiązaniem jest para

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Krok 3. Pozostaje sprawdzić, czy para ta spełnia równania układu (proste sprawdzenie pozostawiamy do samodzielnego przeliczenia).

Odp. Układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + y = -5, \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Rozwiążemy jeszcze jeden przykład.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przykład 10. Rozwiązać graficznie układ równań

$$\begin{cases} -3x + 2y = 1, \\ 6x - 4y = -3. \end{cases}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Wypiszemy dane w zadaniu:

Rozwiązanie.

D: układ równań Sz: rozwiązanie układu.

$$\begin{cases} -3x + 2y = 1, \\ 6x - 4y = -3. \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ równań graficznie.

Zapiszemy równania naszego układu tak, aby opisywały proste równaniami ogólnymi. Mamy więc

$$\begin{cases} k: \quad -3x+2y-1=0 \\ l: \; 6x-4y+3=0 \end{cases}$$

Na podstawie Wniosku ??, obliczamy $-3\cdot(-4)-6\cdot 2=0$, więc proste opisane równaniami naszego układu równań są równoległe. Sprawdzimy teraz, czy te proste pokrywają się. Wykorzystując Wniosek ?? mamy

$$\frac{-3}{6}=\frac{2}{-4}\neq\frac{-1}{3}$$

więc proste nie pokrywają się. Stąd układ równań nie posiada rozwiązania.

Odp. Układ równań

$$\begin{cases} -3x + 2y - 1 = 0 \\ 6x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

nie posiada rozwiązania.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jako ćwiczenie pozostawiamy do rozwiązania metodą graficzną następujące układy równań.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 11. Rozwiązać graficznie następujące układy równań:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 3, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 3, \\ -2x + 2y = -6, \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 2y = 3, \\ -2x + y = 1, \end{cases}$

d) $\begin{cases} k_4 : \quad -3x - y = 1, \\ l_4 : \; x + 2y = 3. \end{cases}$

Do zadania tego podamy teraz odpowiedzi.

Odp.

a) układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = 7, \end{cases}$$

b) układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań i wszystkie leżą na prostej $y = x - 3$,

c) układ równań nie ma rozwiązania,

d) układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

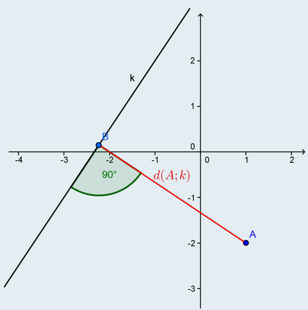
W przypadku ogólnego równania prostej podać można wzór na odległość punktu od prostej zadanej takim równaniem.

Twierdzenie 5. *Odległość punktu* (x_0, y_0) *od prostej*

$$l: \; Ax + By + C = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 > 0$ *wyraża się wzorem*

$$d((x_0, y_0); l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykorzystamy poznany wzór do rozwiązania kolejnego przykładu.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Przykład 11. Wyznaczyć odległość punktu $(3, -5)$ od prostej k opisanej równaniem

$$k : y = 4x - 2.$$

Rozpoczniemy od wypisania danych i szukanych w tym ćwiczeniu.

Rozwiązanie.

D: $A = (3, -5)$ prosta $k : y = 4x - 2$

Sz: odległość punktu A od prostej k

Aby skorzystać z Twierdzenia ?? musimy prostą k zapisać jej równaniem w postaci ogólnej. Mamy zatem

$$k : 4x - y - 2 = 0.$$

Stąd

$$d((3, -5); k) = \frac{|4 \cdot 3 - (-5) - 2|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{15}{\sqrt{17}} = \frac{15}{17}\sqrt{17}.$$

Odp. Odległość punktu A od prostej k wynosi $\frac{15}{17}\sqrt{17}$.

Aby utrwalić poznane wiadomości proponujemy rozwiązać następujące ćwiczenie.

Ćwiczenie 12. Wyznaczyć odległość:

a) punktu $A = (-1, 3)$ od prostej $k : -x + 2y = 4$,

b) punktu $B = (2, -2)$ od prostej $l : y = -3x - 4$,

c) punktu $C = (4, -2)$ od prostej $p : \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$.

Podobnie, jak poprzednio, podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Odp.

a) $d(A;k) = \frac{3}{5}\sqrt{5}$,

b) $d(B;l) = \frac{4}{5}\sqrt{10}$,

c) $d(C;p) = 1$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

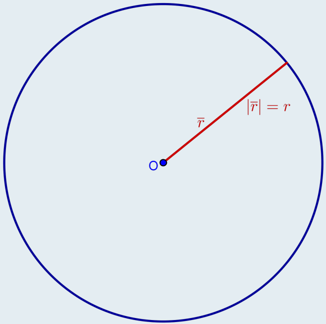
Zajmiemy się teraz analitycznym opisem okręgu i koła na płaszczyźnie. W tym celu przypomnimy ich geometryczne definicje.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 4. Okręgiem o środku S i promieniu $\overline{r}$ długości $r > 0$ nazywamy zbiór $O(S;r)$ wszystkich punktów X na płaszczyźnie, których odległość od punktu S jest równa r, tzn.

$$O(S;r) = \{X : |SX| = r\}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

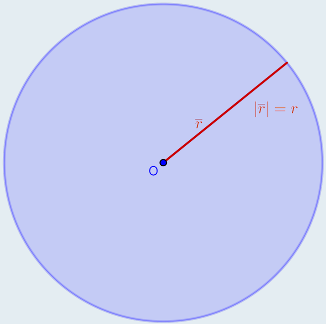
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Definicja 5. Kołem o środku S i promieniu $\overline{r}$ długości $r > 0$ nazywamy zbiór $K(S;r)$ wszystkich punktów X na płaszczyźnie, których odległość od punktu S jest nie większa od r, tzn.

$$K(S;r) = \{X : |SX| \leqslant r\}.$$



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na podstawie tych definicji spróbujemy podać analityczny opis okręgu i koła w układzie współrzędnych.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Problem 6. Zapisać równanie okręgu o środku w punkcie $S = (2, -1)$ i promieniu długości $r = 3$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skorzystajmy z definicji okręgu i ze sposobu mierzenia odległości na płaszczyźnie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Niech punkt X należący do okręgu ma współrzędne (x, y). Wówczas, z definicji okręgu, odległość X od środka $S = (2, -1)$ równa jest długości promienia $r = 3$. Stąd

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2} = 3,$$

i po podniesieniu stronami do kwadratu otrzymamy

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9.$$

Możemy jeszcze wykonać działania (choć nie jest to najkorzystniejsze) i otrzymamy

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y - 4 = 0.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Okrąg o środku w punkcie $S = (2, -1)$ i promieniu długości $r = 3$ ma równanie

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9.$$

Wzorując się na tym rozwiązaniu można uzasadnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6. *Okrąg o środku w punkcie* $S = (a, b)$ *i promieniu długości* r *ma równanie*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga 6. Równanie okręgu zapisane w postaci

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

nazywamy **równaniem kanonicznym okręgu**. Z tej postaci łatwo można odczytać współrzędne środka $S=(a,b)$ okręgu oraz długość promienia r.

Okrąg można w sposób równoważny opisać **równaniem ogólnym**

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0,$$

przy czym musi zachodzić $A^2+B^2-4C>0$. W tym przypadku współrzędne środka $S=(a,b)$ okręgu oraz długość r jego promienia wyrażają się następującymi zależnościami:

$$a=-\frac{A}{2},\quad b=-\frac{B}{2},\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Proponujemy wykonać teraz następujące ćwiczenia.

Ćwiczenie 13.

1. Napisać równanie okręgu

   a) o środku $S_1 = (0, 0)$ i promieniu długości $r_1 = 1$,

   b) o środku $S_2 = (-2, 1)$ i promieniu długości $r_2 = \frac{2}{3}$,

   c) o środku $S_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ i promieniu długości $r_3 = \frac{4}{3}$.

2. Sprawdzić, czy podane równania opisują okrąg. Jeśli tak, to wyznaczyć jego środek i długość promienia:

   a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$,

   b) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 12 = 0$,

   c) $x^2 + y^2 + x - 3y - 2 = 0$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Podobnie jak poprzednio, podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

1.

a) $x^2 + y^2 = 1$,

b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{4}{9}$,

c) $(x - \frac{1}{3}))^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{16}{9}$,

2.

a) $S_1 = (2, -1)$, $r_1 = \sqrt{5}$,

b) równanie nie przedstawia okręgu,

c) $S_3 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $r_3 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zastanówmy się teraz, jak analitycznie można opisać na płaszczyźnie koło o zadanym środku i promieniu.

Problem 7. Opisać analitycznie koło o środku w punkcie $S = (1, 2)$ i promieniu długości $r = 2$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Podobnie jak to było z równaniem okręgu, skorzystamy z definicji koła i sposobu mierzenia odległości na płaszczyźnie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie. Niech punkt X należący do koła ma współrzędne (x, y). Z definicji koła, odległość X od środka $S = (1, 2)$ nie przekracza długości promienia $r = 2$. Zatem

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \leqslant 2.$$

Podnosząc stronami do kwadratu otrzymamy

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Odp. Koło o środku w punkcie $S = (1, 2)$ i promieniu długości $r = 2$ można opisać nierównością

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4.$$

Wzorując się na tym rozwiązaniu można uzasadnić następujące twierdzenie.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 7. *Koło o środku w punkcie* $S = (a, b)$ *i promieniu długości* r *ma analityczny opis w postaci nierówności:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Uwaga 7. Podobnie, jak w przypadku okręgu, również koło można w sposób równoważny opisać nierównością

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C \leqslant 0,$$

przy dodatkowym założeniu $A^2+B^2-4C > 0$. Wtedy współrzędne środka $S = (a, b)$ koła oraz długość r jego promienia wyrażają się zależnościami (jak w przypadku okręgu):

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Proponujemy wykonać teraz następujące ćwiczenia.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ćwiczenie 14. Napisać nierówność opisującą koło

a) o środku $S_1 = (-1, 3)$ i promieniu długości $r_1 = \frac{2}{5}$,

b) o środku $S_2 = (0, 1)$ i promieniu długości $r_2 = \frac{7}{2}$,

c) o środku $S_3 = (-\frac{5}{2}, 2)$ i promieniu długości $r_3 = 2,5$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odpowiedzi do tego ćwiczenia są następujące:

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odp.

a) $(x+1)^2+(y-3)^2 \leqslant \frac{4}{25}$,

b) $x^2+(y-1)^2 \leqslant \frac{49}{4}$,

c) $(x+\frac{5}{2}))^2+(y-2)^2 \leqslant 6,25$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Rozwiążemy jeszcze następujące zadanie.

Zadanie 5. Napisać równanie okręgu o środku w punkcie $S = (-2, -1)$ stycznego do prostej $k : y = -3x + 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na początku wypiszemy dane, szukane oraz wykonamy stosowny rysunek.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwiązanie.

D: $S = (-2, -1)$
prosta $k : y = -3x + 1$

Sz: równanie okręgu
o środku $S = (-2, -1)$
stycznego do prostej k.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Stworzymy plan rozwiązania tego zadania określając co, i w jakiej kolejności musimy obliczyć. Wiadomo, że w celu napisania równania okręgu musimy znać jego środek i długość promienia. Środek poszukiwanego okręgu jest dany, więc musimy jedynie wyznaczyć długość promienia tego okręgu. Jak widać z rysunku, długość promienia równa będzie odległości środka okręgu od zadanej prostej k.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan rozwiązania:

1. wyznaczyć odległość środka S okręgu od prostej k,
2. napisać równanie okręgu $O(S;r)$ o środku S i promieniu długości r.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 1. Wyznaczymy długość r promienia poszukiwanego okręgu. Aby skorzystać z Twierdzenia ?? musimy napisać równanie ogólne prostej k. Przenosząc w równaniu opisującym tę prostą wszystkie zmienne i stałe na jedną stronę otrzymamy

$$k : 3x + y - 1 = 0.$$

Wówczas

$$d((-2,-1);k) = \frac{|3 \cdot (-2) + (-1) - 1|}{3^2 + 1^2} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4}{5}\sqrt{10}.$$

Krok 2. Napiszemy teraz równanie okręgu o środku $S = (-2, -1)$ i promieniu długości $r = \frac{4}{5}\sqrt{10}$. Otrzymamy więc

$$(x - (-2))^2 + (y - (-1))^2 = \left(\frac{4}{5}\sqrt{10}\right)^2,$$

czyli

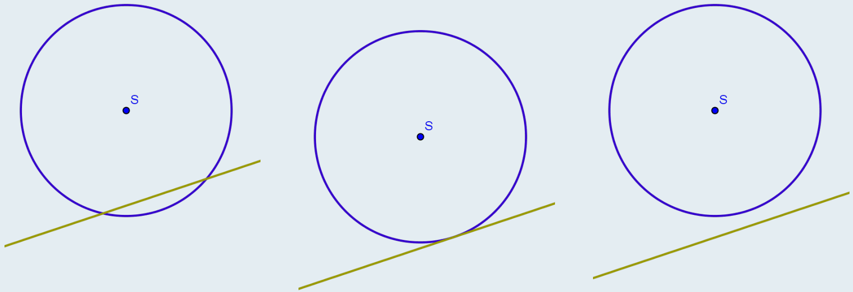
$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = \frac{32}{5}.$$

Odp. Okrąg o środku w punkcie A i styczny do prostej k ma równanie

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = \frac{32}{5}.$$

Zbadamy teraz wzajemne położenie prostych i okręgów na płaszczyźnie. Zastanówmy się więc, jak względem siebie mogą być na płaszczyźnie położone prosta i okrąg. Spróbuj wykonać odpowiednie rysunki.

Problem 8. Wykonując odpowiednie rysunki wskaż wszystkie możliwe położenia na płaszczyźnie okręgu względem prostej.

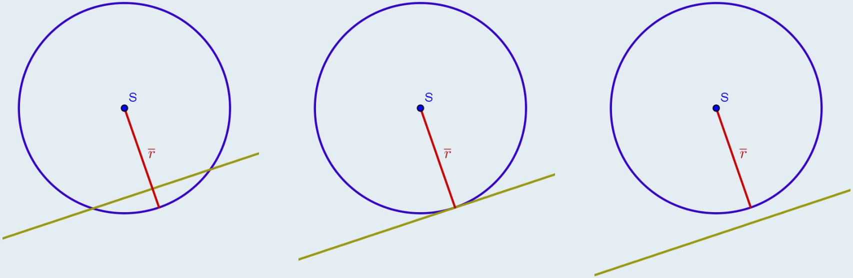

S
S
S

Problem 9. W jaki sposób można zbadać wzajemne położenie prostej i okręgu?

Jeśli nie potrafisz odpowiedzieć na to pytanie, zastanów się nad odległością środka S okręgu od prostej. Z jaką wielkością należy tę odległość porównać?

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Problem 10. W jaki sposób można zbadać wzajemne położenie prostej i okręgu? Jaka jest zależność pomiędzy odległością środka od prostej a długością promienia okręgu na kolejnych rysunkach



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

poczynione obserwacje można zsumować w następującym twierdzeniu.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Twierdzenie 8. *Niech będzie dany okrąg* $O(S;r)$ *o środku* S *i promieniu długości* r *oraz niech* k *będzie prostą.*

(i) *Jeśli* $d(S;k) > r$, *to okrąg* $O(S;r)$ *i prosta* k *nie mają punktów wspólnych (są rozłączne).*

(ii) *Jeśli* $d(S;k) = r$, *to okrąg* $O(S;r)$ *i prosta* k *mają dokładnie jeden punkt wspólny (są styczne).*

(iii) *Jeśli* $d(S;k) < r$, *to okrąg* $O(S;r)$ *i prosta* k *mają dokładnie dwa punkty wspólne (przecinają się).*

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Zadanie 6. Określić wzajemne położenie okręgu

$$O : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

i prostej

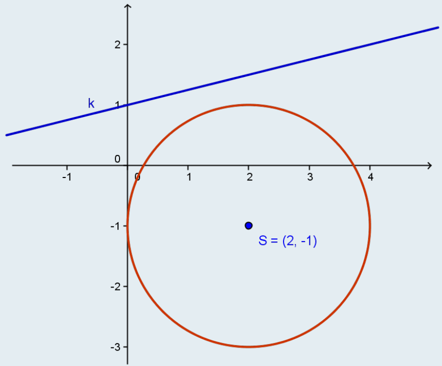
$$k : y = \frac{1}{4}x + 1.$$

Wypiszemy dane, szukane i wykonamy stosowny rysunek. W celu wyrysowania okręgu, z jego równania odczytać należy współrzędne środka i długość promienia. Wykonany rysunek będzie sugerował odpowiedź, którą należy poprawnie uzasadnić.

Rozwiązanie.

D: okrąg o równaniu
$O : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$
prosta $k : y = \frac{1}{4}x + 1$

Sz: wzajemne położenie okręgu O i prostej k.



W celu zbadania wzajemnego położenia okręgu i prostej wyznaczymy:

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Plan rozwiązania:

1. wyznaczyć środek S okręgu,
2. obliczyć odległość środka S okręgu od prostej k,
3. porównać obliczoną odległość środka S okręgu z długością jego promienia r.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Krok 1. Z równania okręgu odczytujemy $S = (2, -1)$ oraz $r = 2$.
Krok 2. Obliczamy odległość punktu $S = (2, -1)$ od prostej k. W tym celu przekształcamy równanie kierunkowe tej prostej do następującego równania ogólnego

$$k : \; x - 4y + 4 = 0.$$

Wtedy

$$d(S; k) = \frac{|2 - 4 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{10}{17}\sqrt{17}.$$

Na koniec mamy

$$d(S; k) = \frac{10}{17}\sqrt{17} > 2.$$

Odp. Okrąg $O : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ i prosta $k : y = \frac{1}{4}x + 1$ nie mają punktów wspólnych.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W celu utrwalenia tych umiejętności proponujemy wykonanie następującego ćwiczenia.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Ćwiczenie 15. Zbadać wzajemne położenia podanych par prostych o okręgów:

a) $k_1 : y = -5x - 2, \quad O_1 : x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0,$

b) $k_2 : y = \frac{2}{3}x + 4, \quad O_2 : x^2 + y^2 - 3x - 2y - 5 = 0,$

c) $k_3 : x = -2, \quad O_3 : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0,$

d) $k_4 : y = -2, \quad O_4 : x^2 + y^2 + 7x - 4y = 0,$

e) $k_5 : y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{2}, \quad O_3 : x^2 + y^2 + 5x + 3y - 3 = 0,$

Podamy tu tylko odpowiedzi do tego ćwiczenia.

Odp.

a) prosta k_1 i okrąg O_1 mają dwa punkty wspólne,

b) prosta k_2 i okrąg O_2 są rozłączne,

c) prosta k_3 jest styczna do okręgu O_3,

d) prosta k_4 i okrąg O_4 mają dwa punkty wspólne,

e) prosta k_5 i okrąg O_5 są rozłączne.

Na koniec proponujemy sprawdzenie swoich wiadomości w następującym teście.

Pytanie 1. Środek odcinka o końcach $(1, 2)$ i $(3, -6)$ ma współrzędne

(a) $(4, -4)$,

(b) $(2, -8)$,

(c) $(-2, 8)$,

(d) $(2, -2)$.

Pytanie 2. Odległość punktów $(1,-2)$ oraz $(-3,1)$ na płaszczyźnie wynosi

(a) 4,

(b) $\sqrt{7}$,

(c) 5

(d) 7.

Pytanie 3. Prosta o równaniu $x - y + 1 = 0$ jest nachylona pod kątem

(a) 30°,

(b) 45°,

(c) 60°,

(d) 90°,

do osi OX.

Pytanie 4. Proste k oraz l zadane równaniami

$$\begin{cases} k: \; y = 2x - 1, \\ l: \; y = \frac{1}{2}x + 1, \end{cases}$$

(a) przecinają się pod kątem prostym,

(b) są równoległe, ale nie pokrywają się,

(c) przecinają się pod kątem ostrym,

(d) pokrywają się.

Pytanie 5. Spośród prostych o równaniu $y = 2x + b$ przez punkt $(-2, 2)$ przechodzi prosta

(a) $y = 2x + 6$,

(b) $y = 2x - 2$,

(c) $y = 2x + 2$,

(d) $y = 2x$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pytanie 6. Prosta o równaniu $2x - 3y + 1 = 0$ jest

(a) prostopadła do wektora $[2, -3]$,

(b) prostopadła do wektora $[2, 3]$,

(c) równoległa do wektora $[2, -3]$,

(d) równoległa do wektora $[2, 3]$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie

Pytanie 7. Proste k i l zadane równaniami

$$\begin{cases} k: & 2x - y + 1 = 0, \\ l: & -2x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

(a) przecinają się pod kątem prostym,

(b) są równoległe, ale nie pokrywają się,

(c) przecinają się pod kątem prostym,

(d) pokrywają się.

Pytanie 8. Jedna z prostych prostopadłych do prostej

$$-3x + 2y - 5 = 0$$

jest opisana równaniem

(a) $3x + 2y - 1 = 0$,

(b) $3x - 2y - 3 = 0$,

(c) $2x + 3y = 0$,

(d) $2x - 3y - 2 = 0$.

Pytanie 9. Okrąg o środku w punkcie $(1, -3)$ i promieniu długości $r = 2$ opisany jest równaniem

(a) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$,

(b) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$,

(c) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$,

(d) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

Pytanie 10. Okrąg opisany równaniem $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 11$

(a) ma środek w punkcie $(2, -1)$ i promień o długości $r = 4$,

(b) ma środek w punkcie $(2, -1)$ i promień o długości $r = \sqrt{11}$,

(c) ma środek w punkcie $(-2, 1)$ i promień o długości $r = \sqrt{11}$,

(d) ma środek w punkcie $(-2, 1)$ i promień o długości $r = 4$.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Klucz odpowiedzi:

1(d), 2(c), 3(b), 4(c), 5(a), 6(a), 7(d), 8(c), 9(d), 10(a).

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz PWSZ w Chełmie