E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat: Planimetria I

Materiały merytoryczne do kursu

1 Wstęp

Rysunek 1: Euklides

Geometria jest nauką podstawową. Jej historia sięga czasów starożytnych. Przekonujemy się o tym czytając nazwy twierdzeń Pitagotrasa, Talesa. Wszyscy Ci starożytni filozofowie badali i poznawali piękno geometrii. W jedną całość Starożytną wiedzę z geometrii zebrał Euklides w swoim dziele "Stoicheia geometrias" (w Polsce nazywanym "Elementy"). Do XIX wieku było to dzieło niedoścignione. Zresztą i dzisiaj geometria nauczana w szkole niewiele wykracza poza euklidesowe elementy.

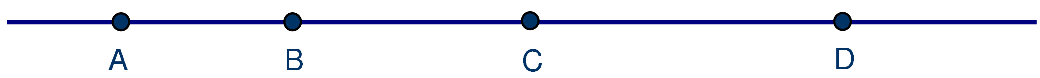
W czasie tej prezentacji przekażemy Ci podstawową wiedzę z geometrii, której znajomość powinna ułatwić zdanie matury. Jednocześnie chcemy, abyś zuważył(ła) piękno geometrii w rozumieniu siły metody dedukcyjnej i siły rozumowania formalnego opartego na logice. Po zdefiniowaniu pojęć drogą ścisłego rozumowania wyprowadzane są kolejne twierdzenia. Jest to cecha charakterystyczna dojrzałych teorii matematycznych.

Zatem nie pozostaje nam nic innego jak życzyć przyjemnej lektury.

2 Pojęcia wstępne

Planimetria jest działem geometrii elementarnej, który zajmuje się badaniem figur zawartych w płaszczyźnie i przekształceń tej płaszczyzny. Do jej podstawowych pojęć należą punkt, prosta i odległość.

Definicja. **Punkty nazywamy współliniowymi (kolinearnymi), gdy istnieje prosta, do której te punkty należą.**



Na płaszczyźnie jest określona odległość, która każdej parze punktów A i B przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $|AB|$ i przyporządkowanie to ma następujące własności:

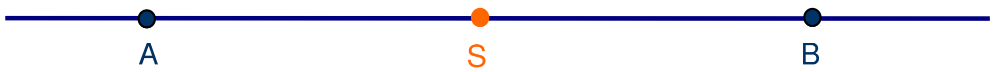
1. $|AB| \geqslant 0$,
2. $|AB| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$,
3. $|AB| = |BA|$,
4. dla każdych punktów A, B, C zachodzi $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$,
5. dla każdych punktów A, B i C punkty te są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| = |AC| + |CB|$ lub $|AC| = |AB| + |BC|$ lub $|BC| = |BA| + |AC|$.

Definicja. **Niech punkty A, B, C będą różne. Mówimy, że punkt C leży między punktami A i B , gdy $|AB| = |AC| + |CB|$.**

Definicja. **Odcinkiem AB, gdzie $A \neq B$, nazywamy zbiór utworzony ze wszystkich punktów leżących między punktami A i B oraz punktów A i B. Odcinek AB będziemy oznaczać symbolem $\overline{AB}$.**

Uwaga. Jeżeli $A = B$, to zbiór $\overline{AA} = \{A\}$ będziemy nazywali odcinkiem zerowym (trywialnym).

Definicja. **Punkt S nazywamy środkiem odcinka AB, gdy $|AS| = |SB| = \frac{1}{2}|AB|$.**



Łatwo wykazać (ćwiczenie), że punkt S jest środkiem odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $|AS| = |SB|$ i $|AS| + |SB| = |AB|$.

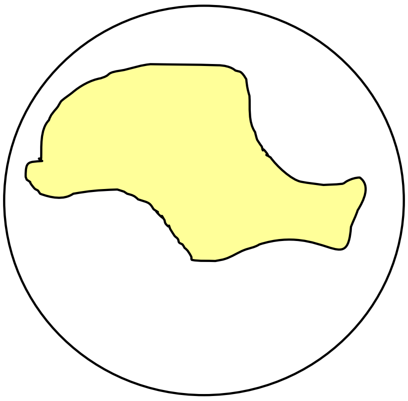
Twierdzenie. **Każdy odcinek ma dokładnie jeden środek.**

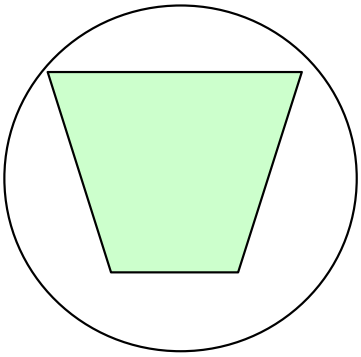
Każdy punkt prostej dzieli prostą na dwa zbiory rozłączne i niepuste. Zbiory te nazywamy stronami punktu na prostej.

Definicja. **Stronę punktu A wraz z tym punktem nazywamy półprostą. Punkt A nazywamy początkiem tej półprostej.**

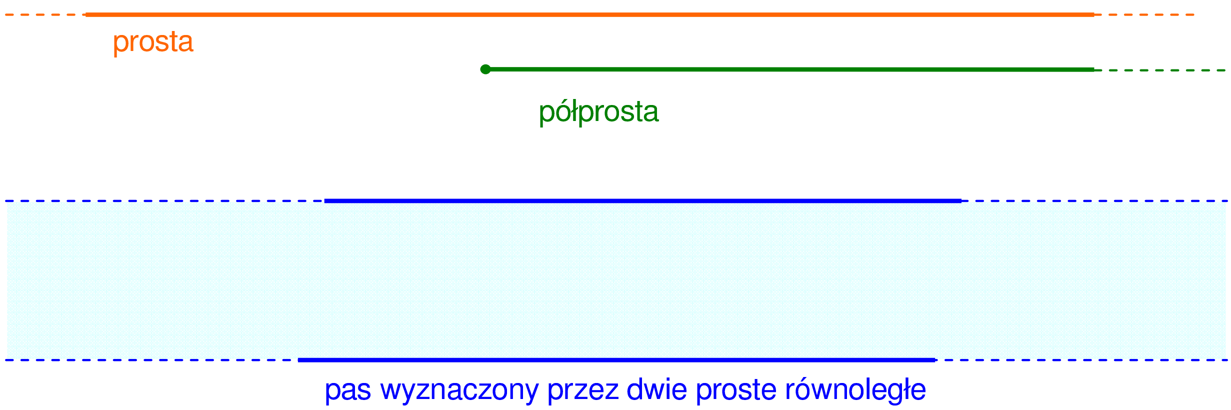
Twierdzenie. **Jeżeli punkty A i B należą do różnych stron punktu P, to punkt P leży między punktami A i B.**

Definicja. **Figurę nazywamy ograniczoną, gdy istnieje koło zawierające tę figurę.**





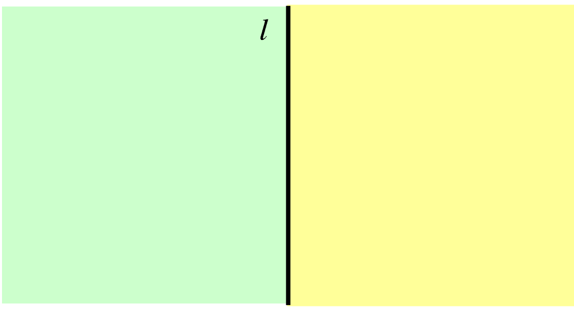
Figurami nieograniczonymi są na przykład:



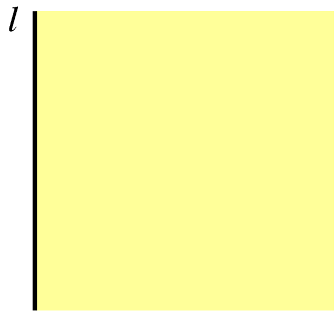
Pytanie. *Półprosta jest figurą nieograniczoną. Czy każda figura zawierająca co najmniej jedną półprostą jest nieograniczona?*

3 Półpłaszczyzny, kąty, wielokąty, figury wypukłe

Prosta dzieli (rozcina) płaszczyznę na dwa zbiory rozłączne i niepuste. Każdy z tych zbiorów nazywamy stroną prostej.

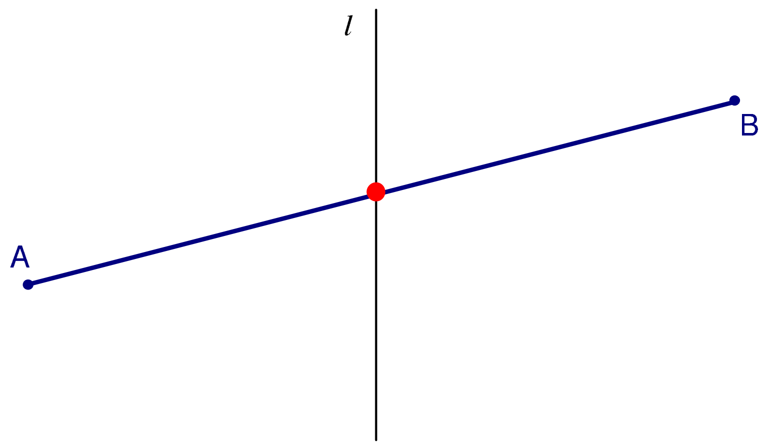


Definicja. **Półpłaszczyzną o krawędzi l nazywamy sumę prostej l i jednej strony tej prostej.**

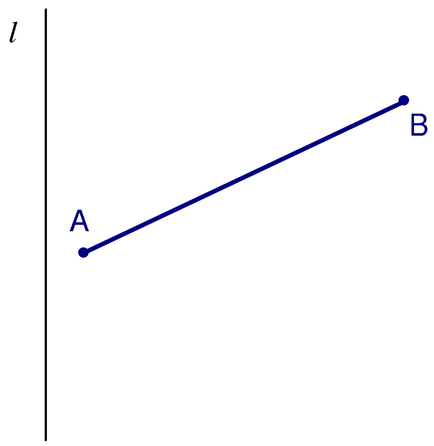


Wnioski:

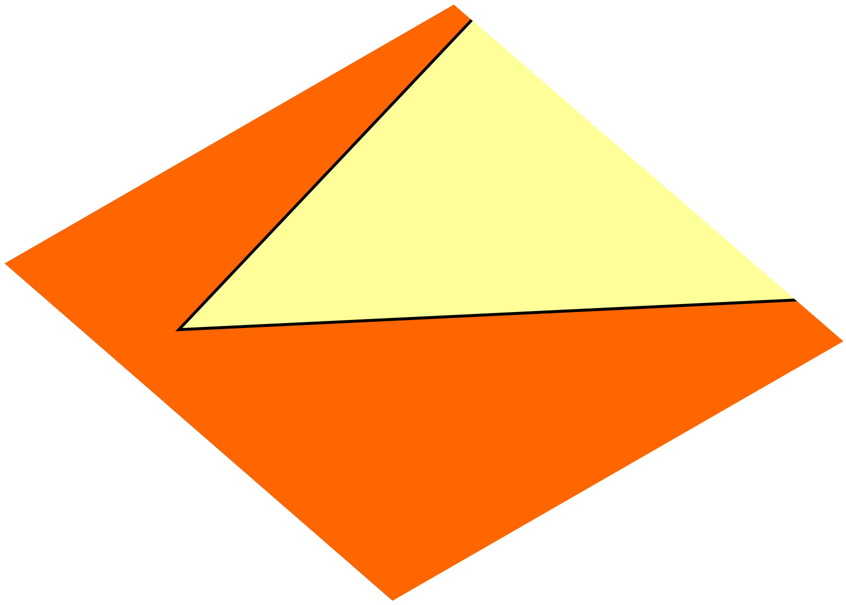
1. Każda prosta jest wspólną krawędzią dokładnie dwóch półpłaszczyzn.
2. Odcinek łączący punkty należące do różnych stron prostej ma z tą prostą dokładnie jeden punkt wspólny.



3. Odcinek łączący punkty należące do jednej strony prostej zawiera się w tej stronie.



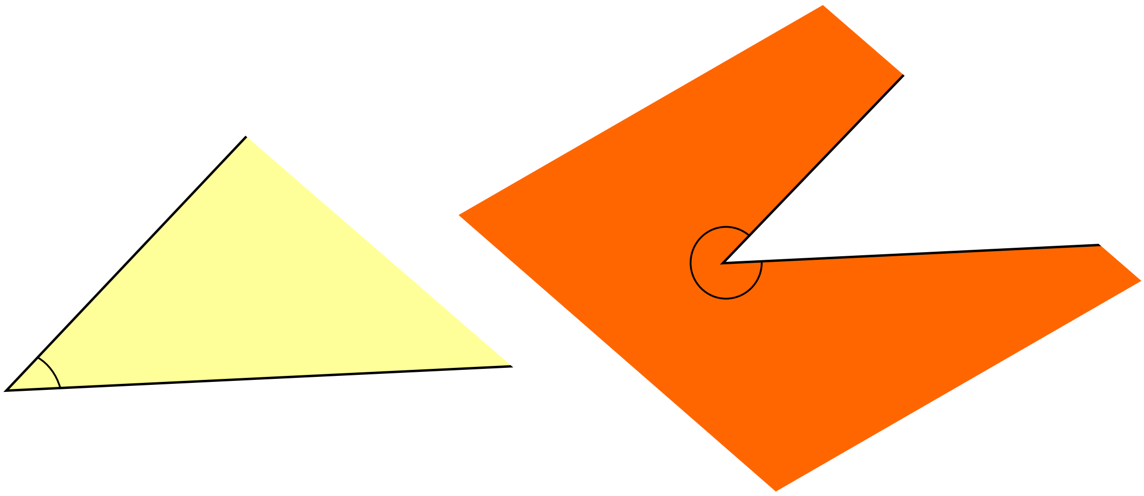
Dwie różne półproste o wspólnym początku dzielą (rozcinają) płaszczyznę na dwa niepuste podzbiory.



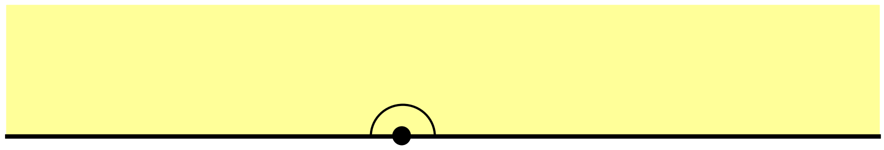
Definicja . Kątem nazywamy każdy z podzbiorów na jakie dwie różne półproste o wspólnym początku rozcinają płaszczyznę wraz z tymi półprostymi.

Półproste nazywamy ramionami kąta, a ich wspólny początek wierzchołkiem kąta.

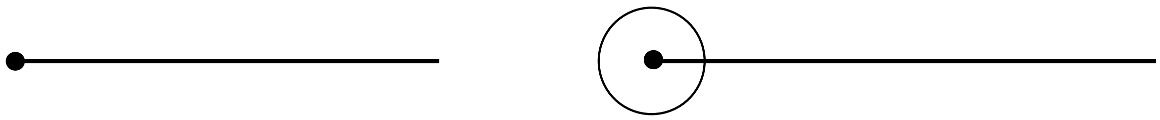
Kąt zawierający się w pewnej półpłaszczyźnie nazywamy kątem wypukłym. W przeciwnym razie mówimy, że kąt jest kątem wklęsłym.



Definicja. **Kąt, którego ramiona dopełniają się do prostej nazywamy kątem półpełnym.**



Do rodziny kątów dołączamy półprostą (jako kąt zerowy, którego ramiona pokrywają się) oraz płaszczyznę (jako kąt pełny, którego ramiona też pokrywają się).

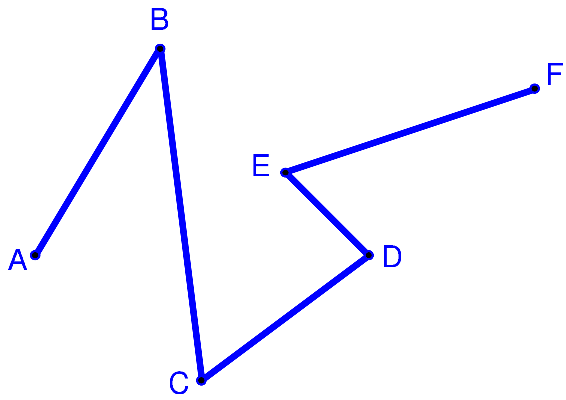


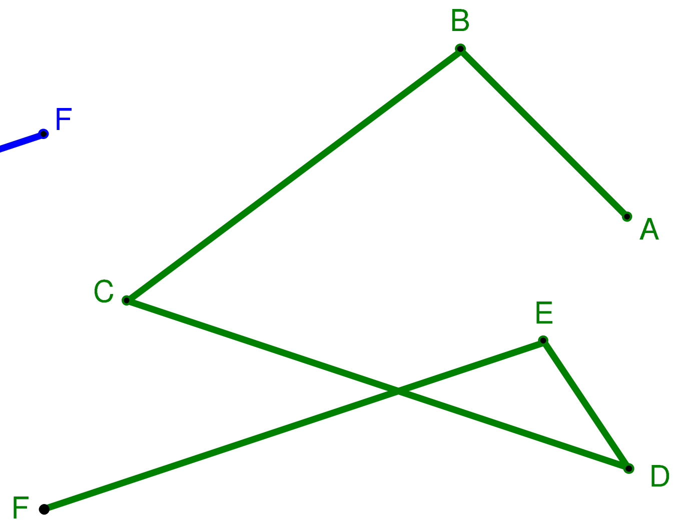
Weź teraz ołówek i kartkę papieru i wykonaj następujące czynności:

1. Narysuj na płaszczyźnie dowolny niezerowy odcinek AB .
2. Wybierz punkt C nie leżący na prostej AB i narysuj odcinek BC.
3. Wybierz punkt D nie leżący na prostej BC i narysuj odcinek CD.
4. Wybierz punkt E nie leżący na prostej CD i narysuj odcinek DE.
5. Wybierz punkt F nie leżący na prostej DE i narysuj odcinek EF.

Otrzymałeś w ten sposób łamaną $ABCDEF$.

Odcinki AB, BC, CD, DE i EF to jej boki, a punkty A, B, C, D, E, F to wierzchołki tej łamanej.

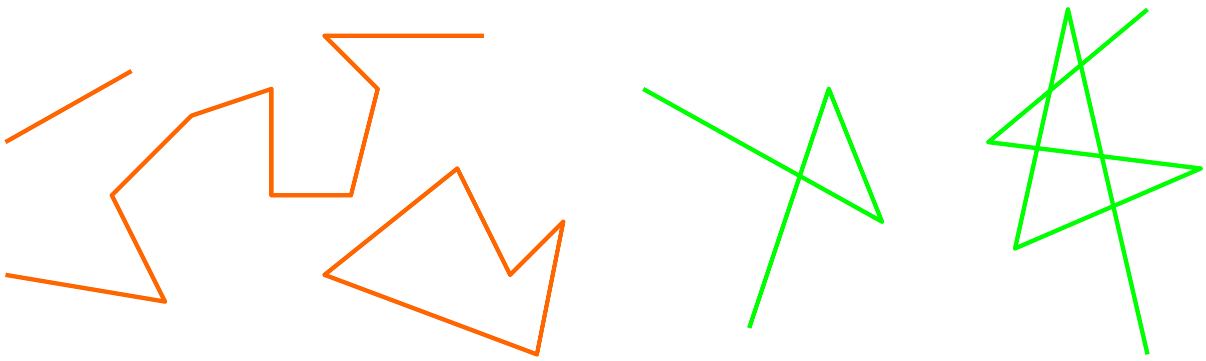




Narysuj łamane o dwóch, trzech, czterech, sześciu, siedmiu bokach.

Niezerowy odcinek to też łamana - o jednym boku. Pierwszy wierzchołek to początek łamanej, a ostatni wierzchołek to koniec łamanej.

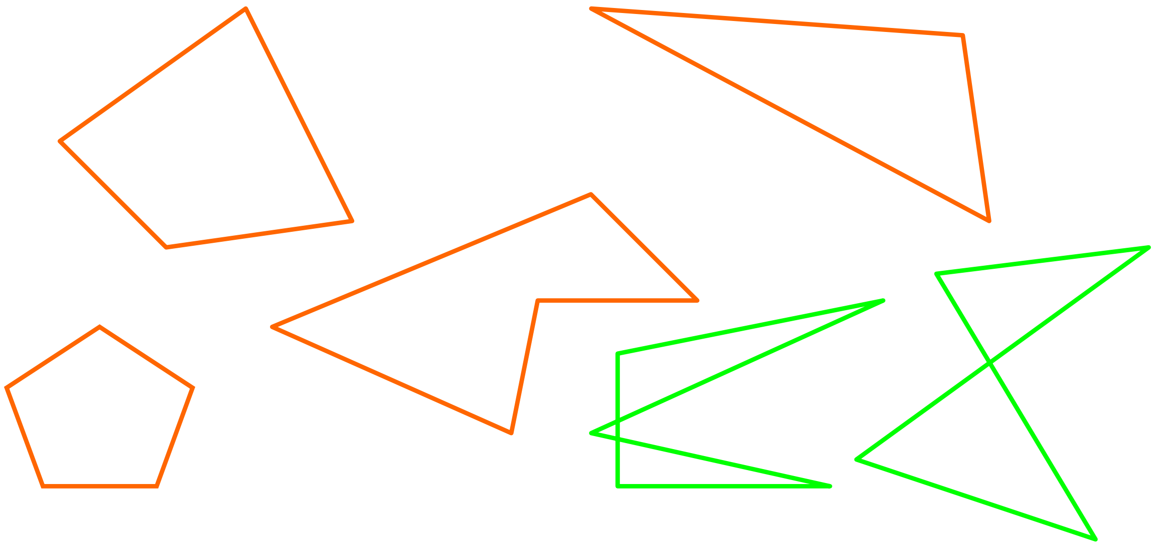
Wśród łamanych wyróżniamy łamane zwyczajne i takie, które nie są zwyczajne.



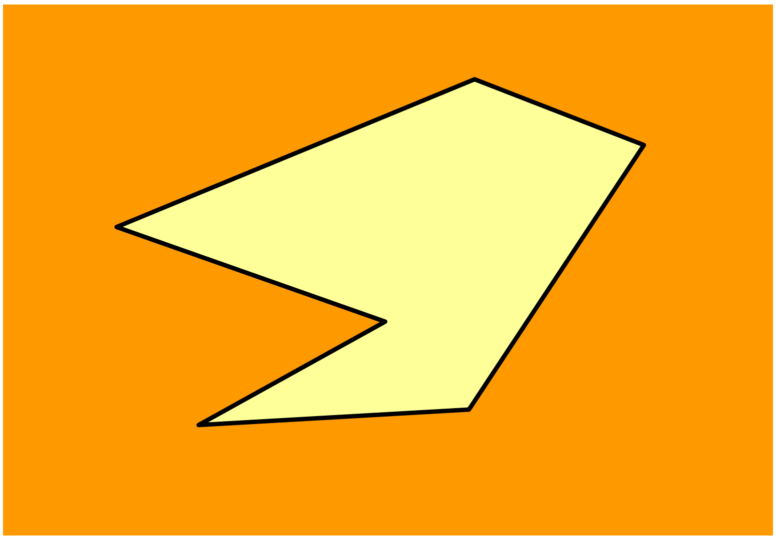
ŁAMANE ZWYCZAJNE

ŁAMANE, KTÓRE NIE SĄ ZWYCZAJNE

Definicja. Łamaną nazywamy zamkniętą, gdy jej początek i koniec pokrywają się.

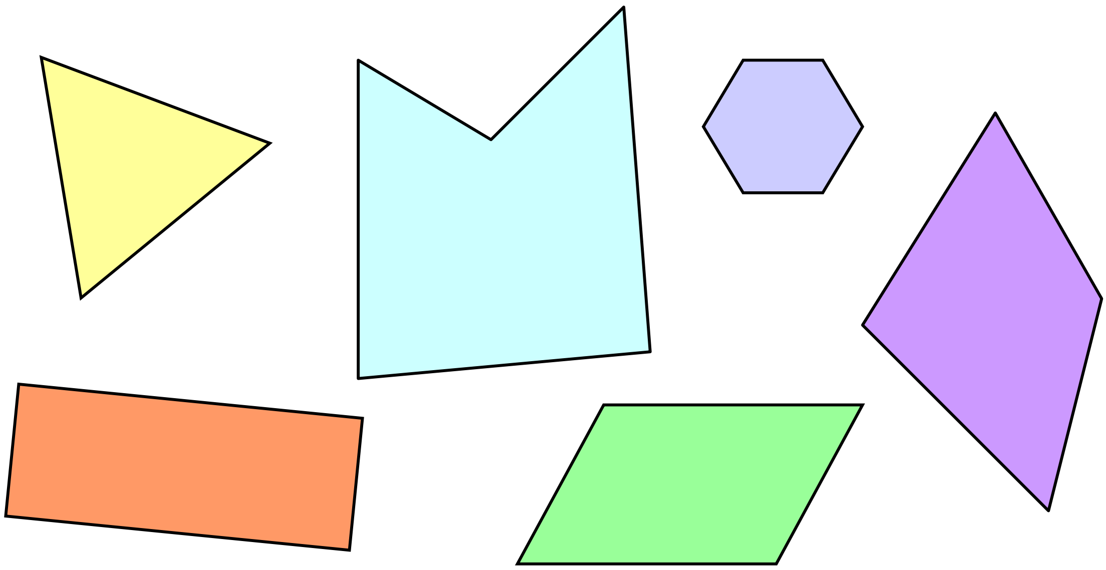


Łamana zwyczajna zamknięta dzieli (rozcina) płaszczyznę na dwa niepuste podzbiory.



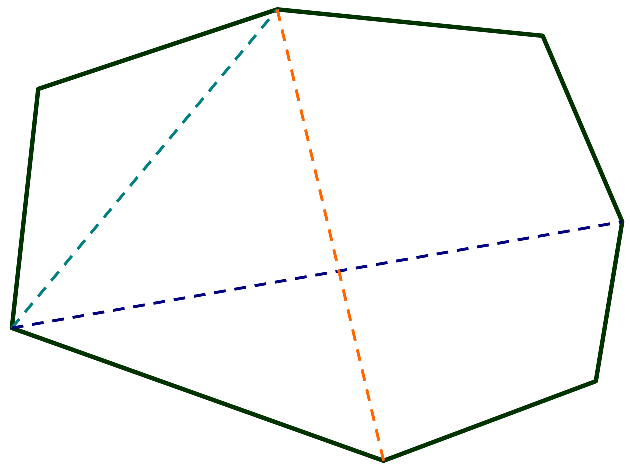
Definicja. **Wielokątem nazywamy ograniczony podzbiór wycięty z płaszczyzny przez łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.**

Tę łamaną nazywamy brzegiem wielokąta, a pozostałą część wnętrzem wielokąta.



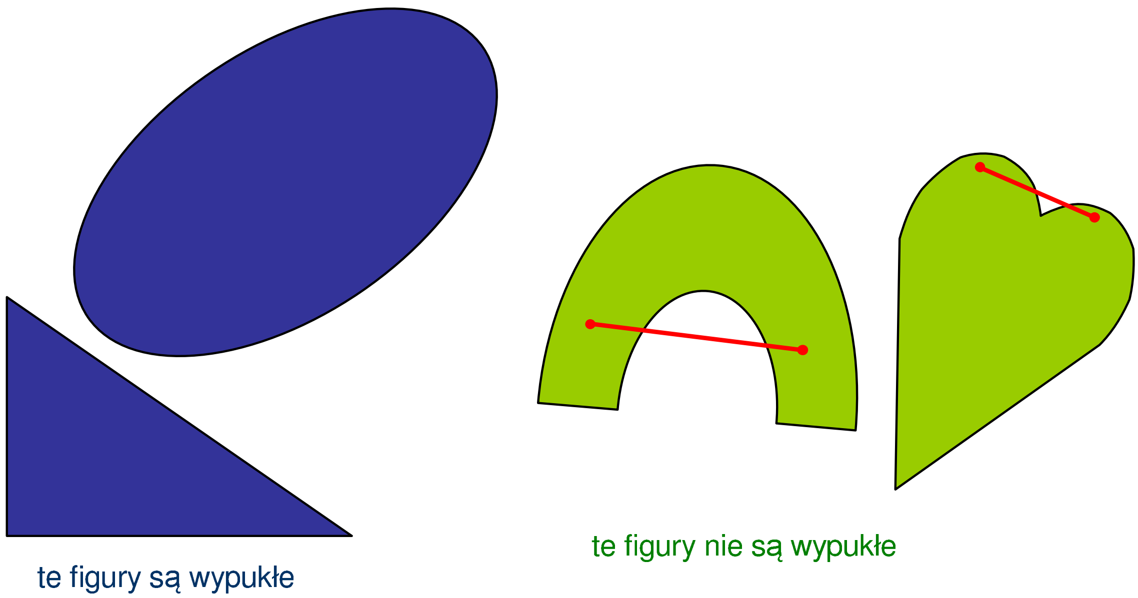
Boki łamanej nazywamy bokami wielokąta, wierzchołki łamanej (wspólne końce boków) wierzchołkami wielokąta.

Odcinek, który łączy dwa wierzchołki wielokąta i nie jest bokiem nazywamy przekątną wielokąta.



Definicja. Kątem wewnętrznym wielokąta nazywamy kąt, którego ramiona zawierają sąsiednie boki wielokąta i który ma punkty wspólne z wnętrzem wielokąta.

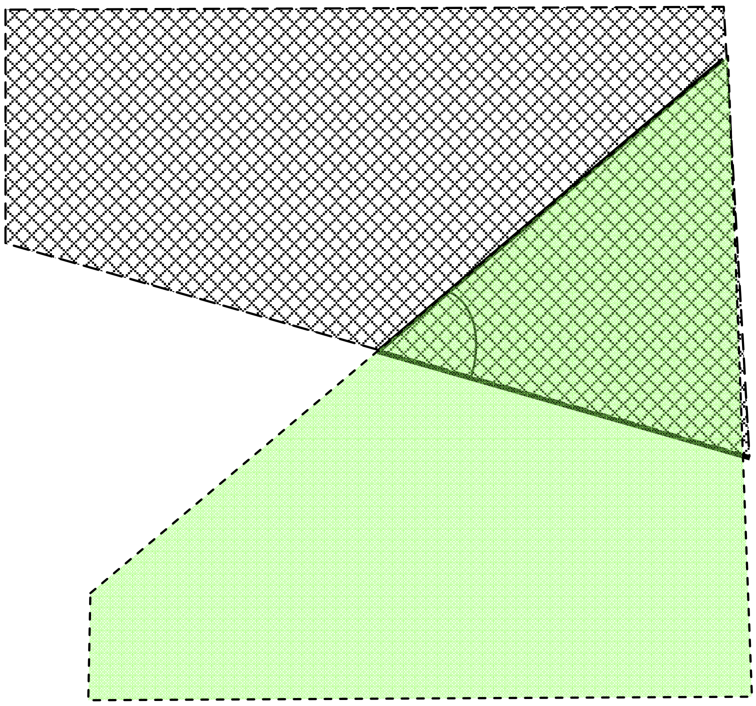
Definicja. **Figurę geometryczną nazywamy wypukłą, gdy wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek, którego końcami są te punkty.**



Wniosek. Każda półpłaszczyzna jest figurą wypukłą.

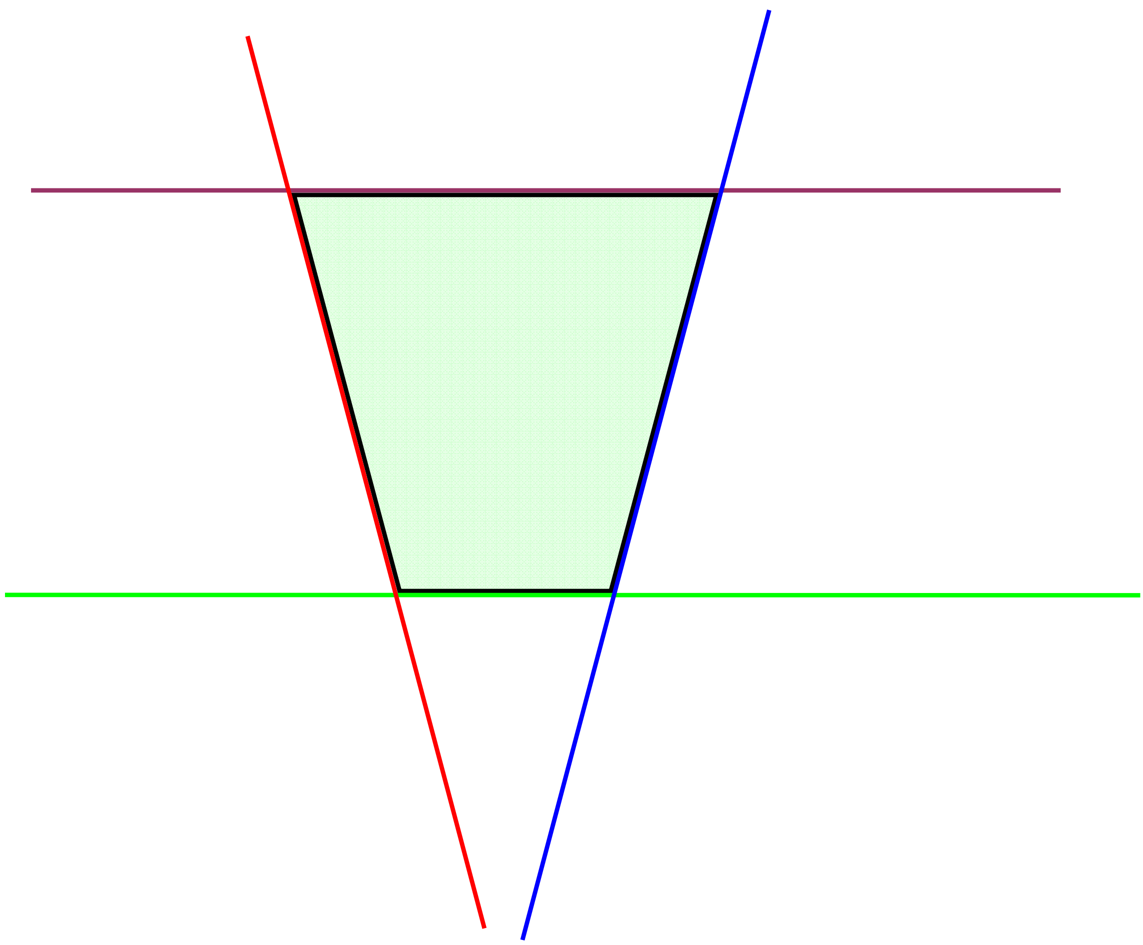
Twierdzenie. **Część wspólna figur wypukłych jest figurą wypukłą.**

Twierdzenie. **Kąt wypukły jest zbiorem wypukłym.**



Uwaga. Kąt wypukły jest częścią wspólną dwóch półpłaszczyzn.

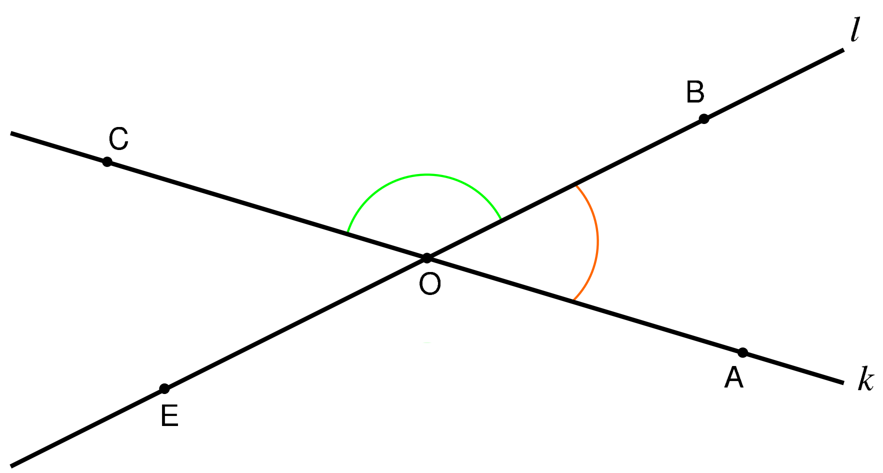
Twierdzenie . Wielokąt jest zbiorem wypukłym wtedy i tylko wtedy, gdy leży po jednej stronie każdej prostej zawierającej bok tego wielokąta.



Definicja. Wielokąt nazywamy foremnym, gdy ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty wewnętrzne równe.

4 Kąty przy dwóch przecinających się prostych

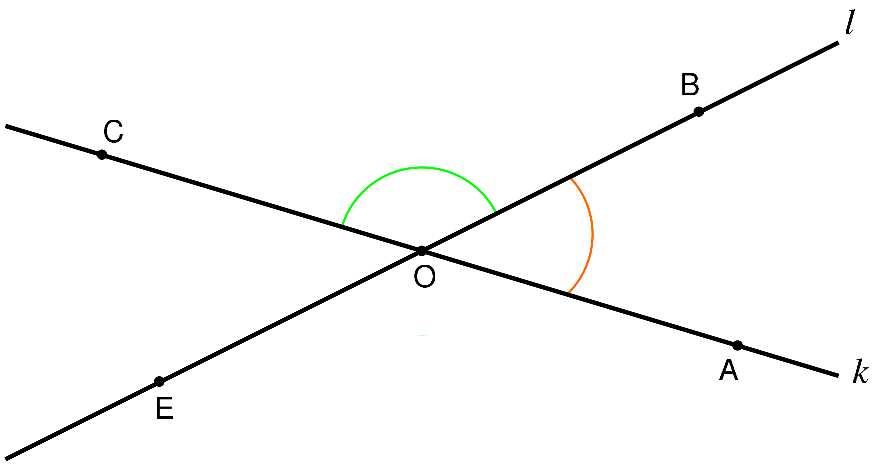
Załóżmy, że prosta k przecina prostą l.



Definicja. **Kątem dwóch przecinających się prostych nazywamy każdy z kątów wypukłych, których ramiona zawierają się w tych prostych, a wierzchołkiem jest punkt ich przecięcia.**

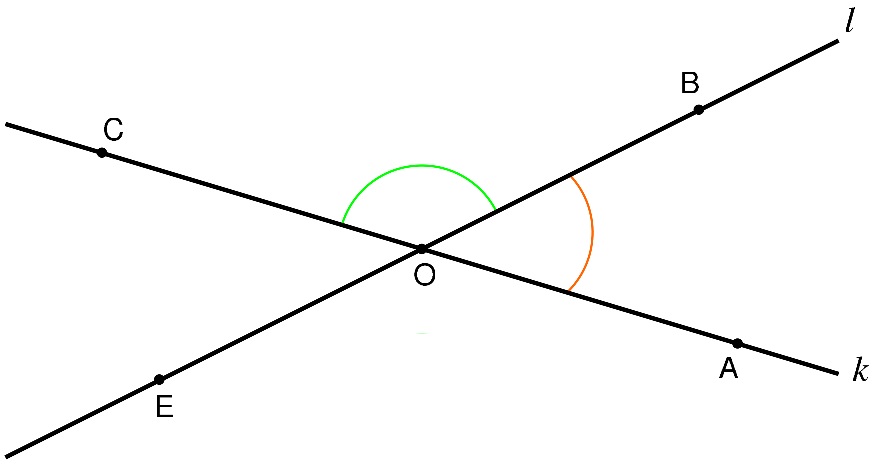
Definicja. **Kąty przyległe to takie dwa kąty wypukłe, które mają jedno ramię wspólne, a pozostałe dwa ramiona uzupełniają się do prostej.**

Kąty $\measuredangle AOB$ i $\measuredangle BOC$ są kątami przyległymi.



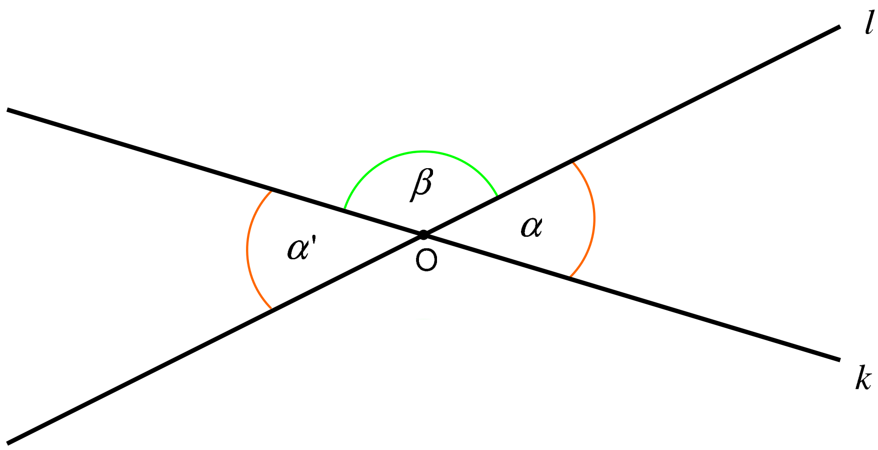
Definicja. **Kąt przyległy do kąta wewnętrznego wielokąta nazywamy kątem zewnętrznym tego wielokąta.**

Definicja. **Kąty wierzchołkowe to takie dwa kąty wypukłe, których ramiona uzupełniają się do prostych.**



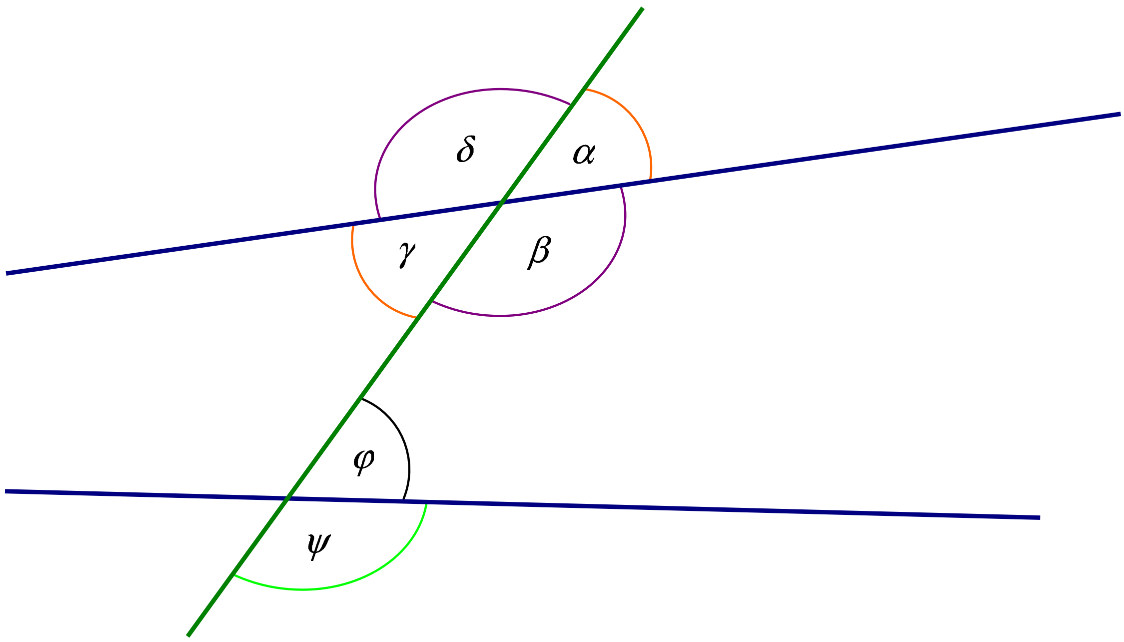
Kąty $\measuredangle AOB$ i $\measuredangle COE$ są kątami wierzchołkowymi.

Suma kątów przyległych ma 180° . Kąty wierzchołkowe są równe.



$\alpha + \beta = 180°$ i $\alpha' + \beta = 180°$, stąd $\alpha = \alpha'$.

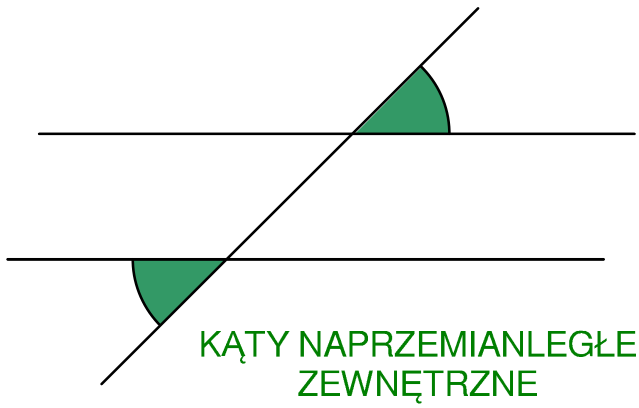
5 Kąty przy dwóch różnych prostych na płaszczyźnie przeciętych trzecią prostą



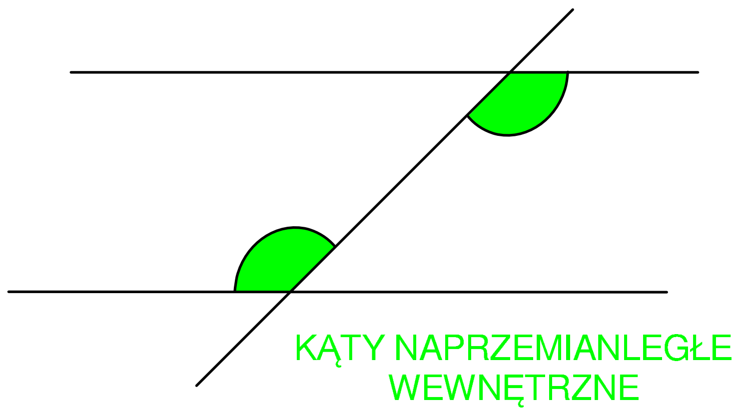
- Kąty takie jak δ i ψ nazywamy kątami naprzemianległymi zewnętrznymi.
- Kąty takie jak γ i φ nazywamy kątami naprzemianległymi wewnętrznymi.
- Kąty takie jak α i φ nazywamy kątami odpowiadającymi.
- Kąty takie jak β i φ nazywamy kątami jednostronnie wewnętrznymi.

Definicja. **Proste k i l zawarte w płaszczyźnie nazywamy równoległymi, gdy k nie ma punktów wspólnych z l lub $k = l$.**

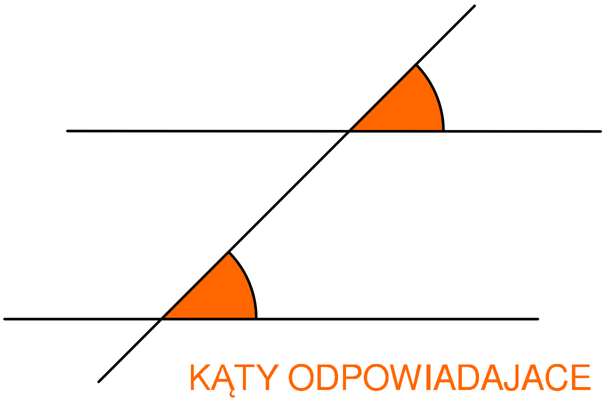
Twierdzenie. **Jeżeli dwie różne proste przetniemy trzecią prostą i jakieś kąty naprzemianległe zewnętrzne przy tych prostych są równe, to te dwie przecięte proste są równoległe.**



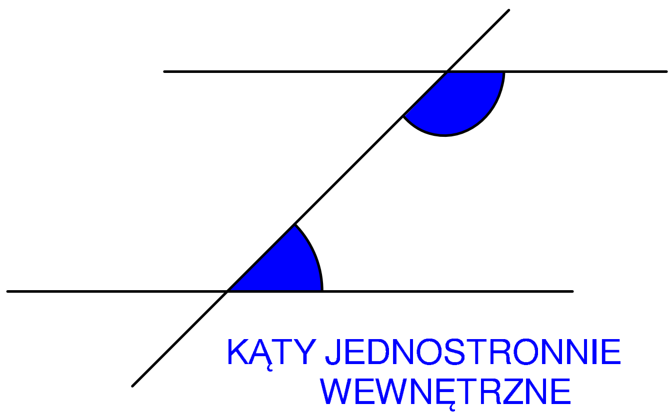
Twierdzenie. **Jeżeli dwie różne proste przetniemy trzecią prostą i jakieś kąty naprzemianległe wewnętrzne przy tych prostych są równe, to te dwie przecięte proste są równoległe.**



Twierdzenie. Jeżeli dwie różne proste przetniemy trzecią prostą i jakieś kąty odpowiadające przy tych prostych są równe, to te dwie przecięte proste są równoległe.



Twierdzenie. **Jeżeli dwie różne proste przetniemy trzecią prostą i kąty jednostronnie wewnętrzne przy tych prostych dopełniają się do kąta półpełnego, to te dwie przecięte proste są równoległe.**

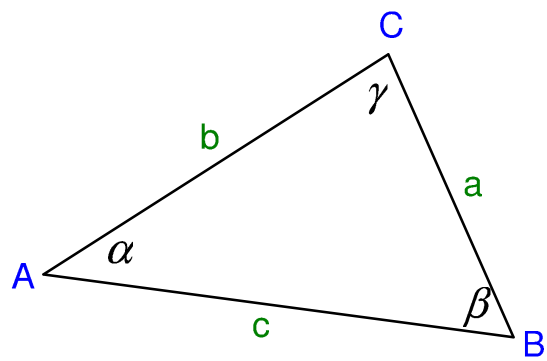


Prawdziwe jest także następujące twierdzenie.

Twierdzenie. **Jeżeli dwie różne proste równoległe przetniemy trzecią prostą, to każde dwa kąty naprzemianległe zewnętrzne, każde dwa kąty naprzemianległe wewnętrzne i każde dwa kąty odpowiadające są równe, a każde dwa kąty jednostronnie wewnętrzne dopełniają się do kąta półpełnego.**

6 Trójkąty

Definicja. **Trójkąt jest wielokątem o trzech bokach.**

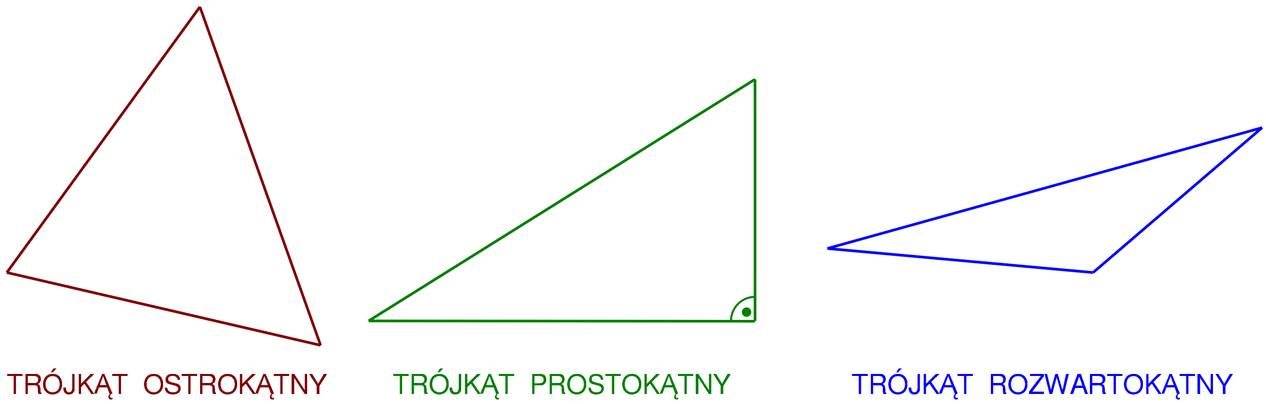


Trójkąt o wierzchołkach A, B, C będziemy oznaczać $\triangle ABC$. Boki AB, BC, CA oznaczamy odpowiednio małymi literami alfabetu łacińskiego c, a, b zaś kąty wewnętrzne $\measuredangle ABC$, $\measuredangle BCA$, $\measuredangle CAB$ małymi literami alfabetu greckiego β, γ, α lub $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, $\measuredangle A$. Jeżeli nie prowadzi to do nieporozumień, to literami a, b, c lub α, β, γ oznaczamy długości odpowiednich boków lub miary (rozwartości) odpowiednich kątów wewnętrznych tego trójkąta.

Każdy kąt wewnętrzny trójkąta jest mniejszy od kąta półpełnego.

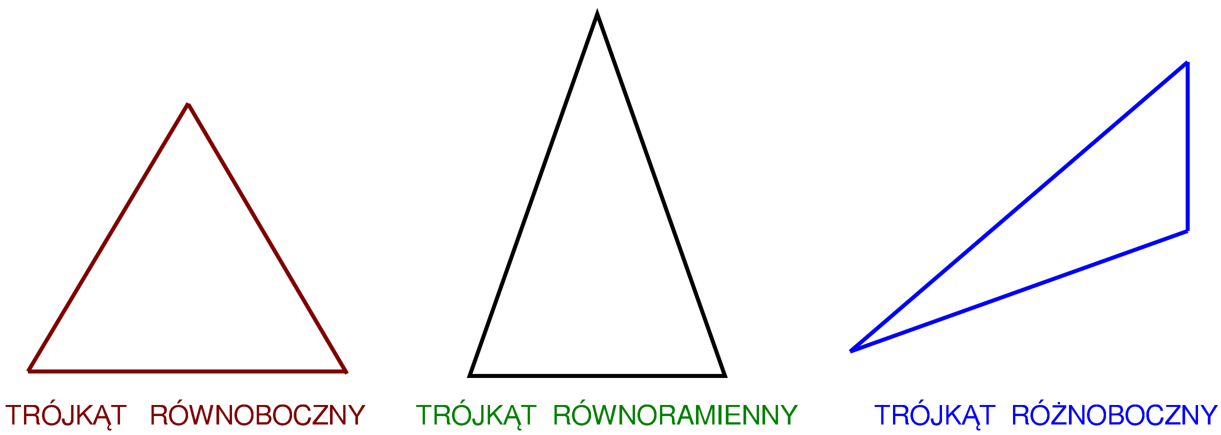
Podział trójkątów ze względu na kąty

1. trójkąt ostrokątny (wszystkie kąty wewnętrzne tego trójkąta są ostre),
2. trójkąt prostokątny (jeden kąt tego trójkąta jest prosty),
3. trójkąt rozwartokątny (jeden kąt tego trójkąta jest rozwarty).



Podział trójkątów ze względu na boki

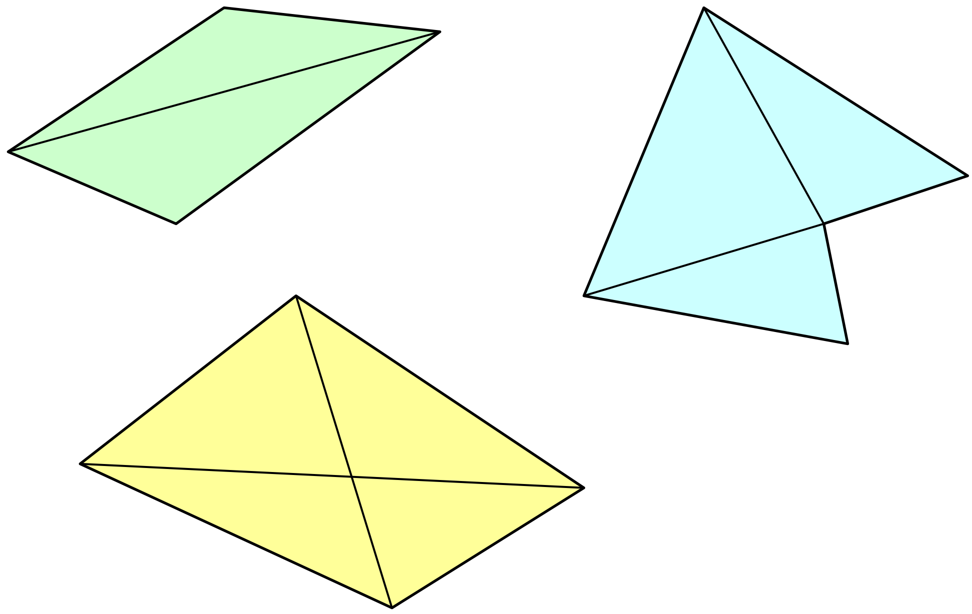
1. trójkąt równoboczny (wszystkie boki tego trójkąta są równe),
2. trójkąt równoramienny (dwa boki tego trójkąta są równe),
3. trójkąt różnoboczny (żadne dwa boki tego trójkąta nie są równe).



Uwaga. W trójkącie równoramiennym równe boki nazywamy ramionami, a trzeci bok podstawą tego trójkąta.

Pytanie. *Czy trójkąt równoboczny jest trójkątem równoramiennym?*

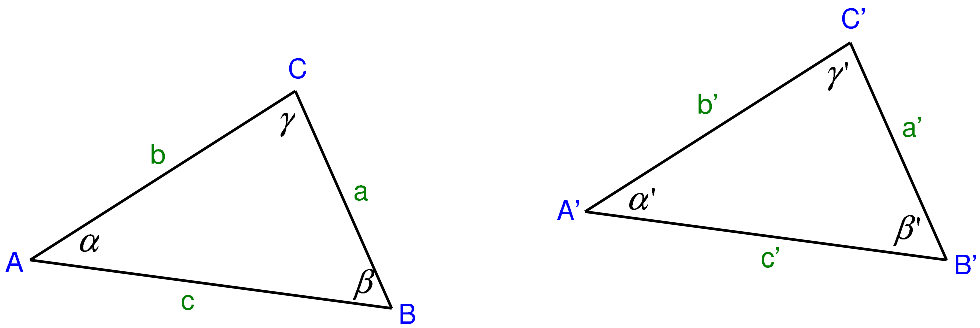
Trójkąty są cegiełkami, z których budujemy inne figury geometryczne. W szczególności każdy wielokąt jest sumą skończonej ilości trójkątów.



Podział wielokąta na trójkąty w taki sposób, że każde dwa trójkąty podziału mają wspólny co najwyżej wierzchołek lub bok nazywamy triangulacją tego wielokąta.

7 Cechy przystawania trójkątów

Definicja. **Dwa trójkąty nazywamy przystającymi, gdy mają odpowiednio równe wszystkie boki i kąty wewnętrzne.**



Zatem $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ oraz $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$

Gdy w szkole podstawowej lub gimnazjum konstruowaliśmy trójkąty, to wykonywaliśmy te konstrukcje, gdy znaliśmy

- trzy boki trójkąta lub
- dwa boki i kąt między nimi zawarty lub
- bok i kąty przyległe do tego boku.

Aby stwierdzić, że trójkąty są przystające nie musimy porównywać wszystkich boków i wszystkich kątów.

Pytania. *Jakie znasz cechy przystawania trójkątów?*
Co oznaczają skróty (bbb), (bkb), (kbk)?

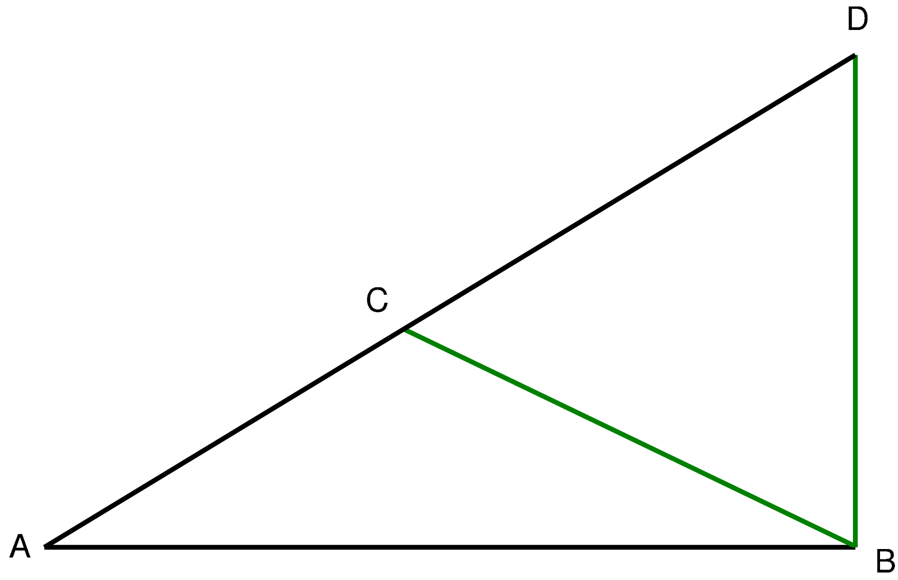
Cechy przystawania trójkątów

Twierdzenie. **Jeżeli dwa trójkąty mają trzy boki odpowiednio równe, to są przystające.**

Twierdzenie. **Jeżeli dwa trójkąty mają dwa boki i kąt między nimi zawarty odpowiednio równe, to są przystające.**

Twierdzenie. **Jeżeli dwa trójkąty mają bok i dwa kąty do niego przylegle odpowiednio równe, to są przystające.**

Uwaga. Nie muszą być przystające takie dwa trójkąty, które mają równe dwa boki i równy kąt nie leżący między tymi bokami.

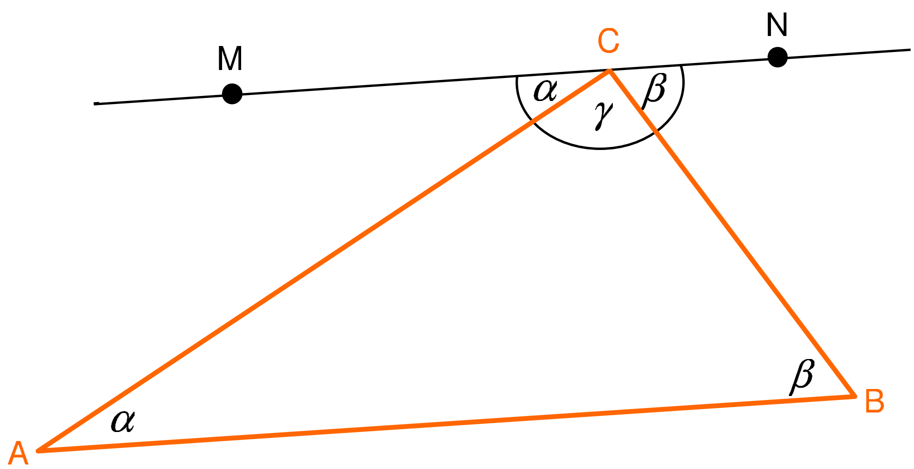


Trójkąty ABC i ABD nie są przystające, chociaż $|BC| = |BD|$, $|AB| = |AB|$ i $\measuredangle CAB = \measuredangle DAB$.

Twierdzenia o kątach trójkąta I

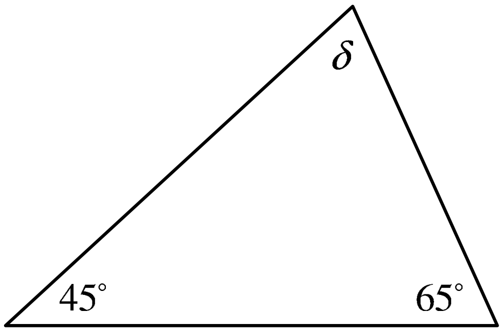
Twierdzenie . **Jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta, to $\alpha+\beta+\gamma=180°$.**

Dowód. Poprowadźmy przez wierzchołek C trójkąta ABC prostą równoległą do boku AB.



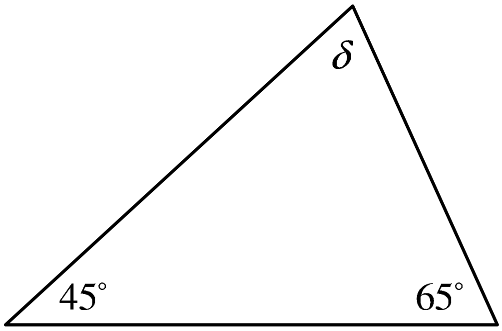
Suma kątów $\measuredangle ACM$, $\measuredangle BCN$, γ ma $180°$. Ponieważ $\measuredangle ACM=\alpha$, $\measuredangle BCN=\beta$, to $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Przykład 1. Wyznacz kąty zaznaczone na rysunku:



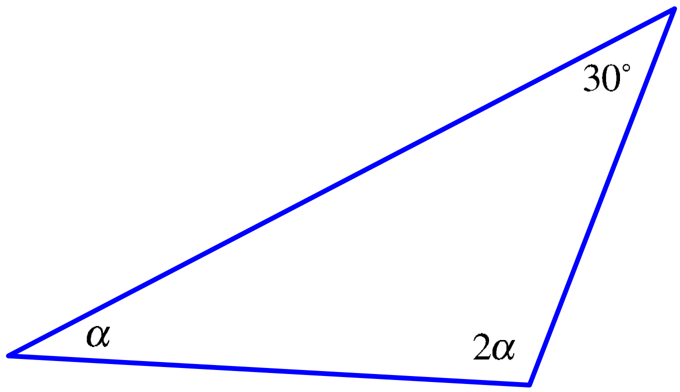
$$\delta = ?$$

Rozwiązanie.



$\delta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ.$

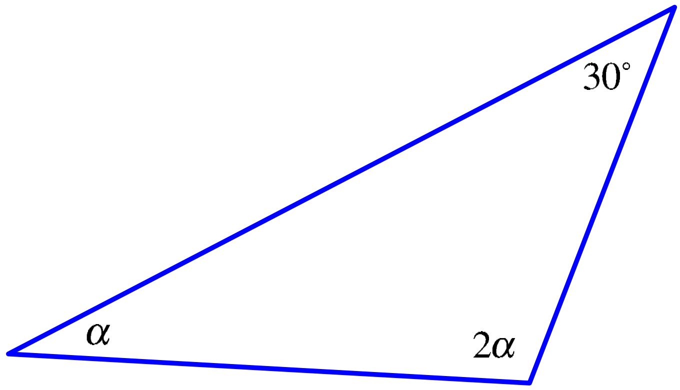
Przykład 2. Wyznacz kąty zaznaczone na rysunku:



$$\alpha = ?$$

$$2\alpha = ?$$

Rozwiązanie.

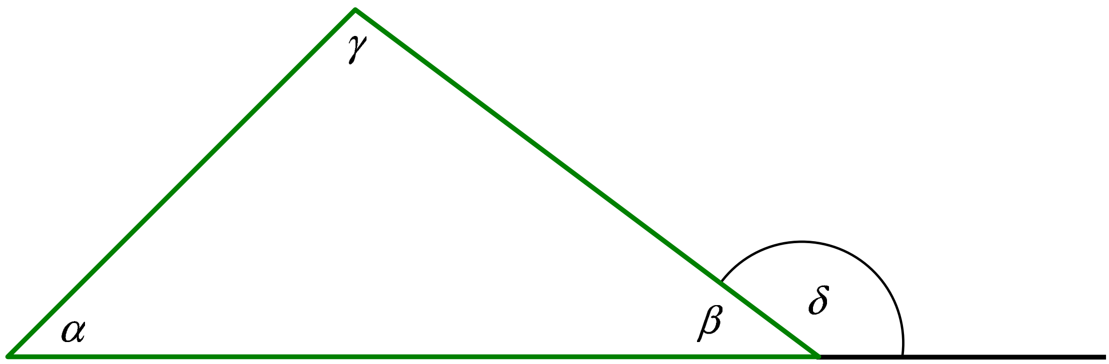


$$\alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ,$$
$$\alpha = 50^\circ$$
$$2\alpha = 100^\circ$$

Twierdzenia o kątach trójkąta II

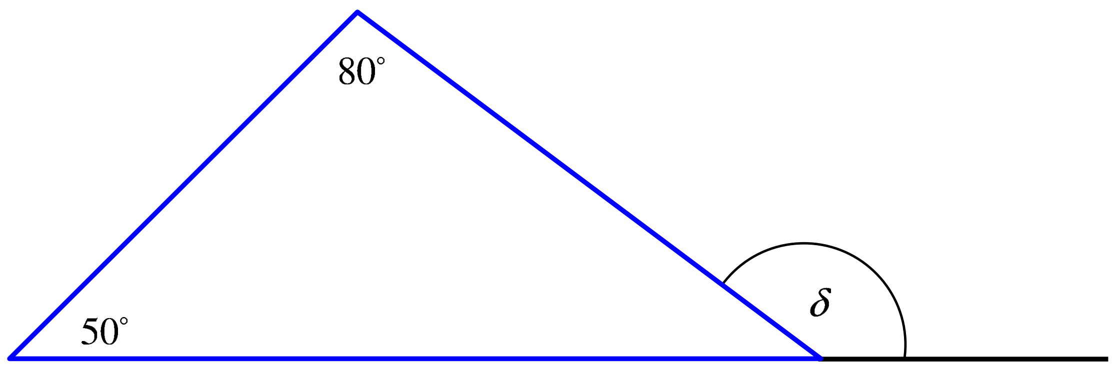
Definicja. **Kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt przyległy do kąta wewnętrznego tego trójkąta.**

Twierdzenie . **Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.**



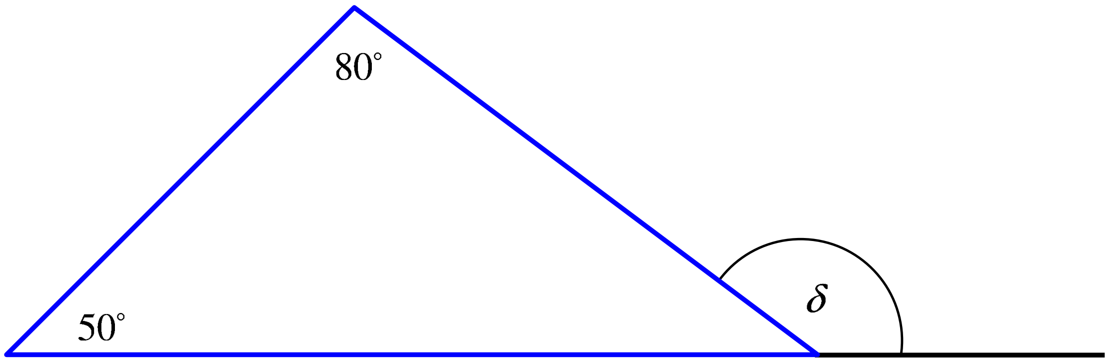
$$\delta = \alpha + \gamma$$

Przykład. Wyznacz kąty zaznaczone na rysunku:



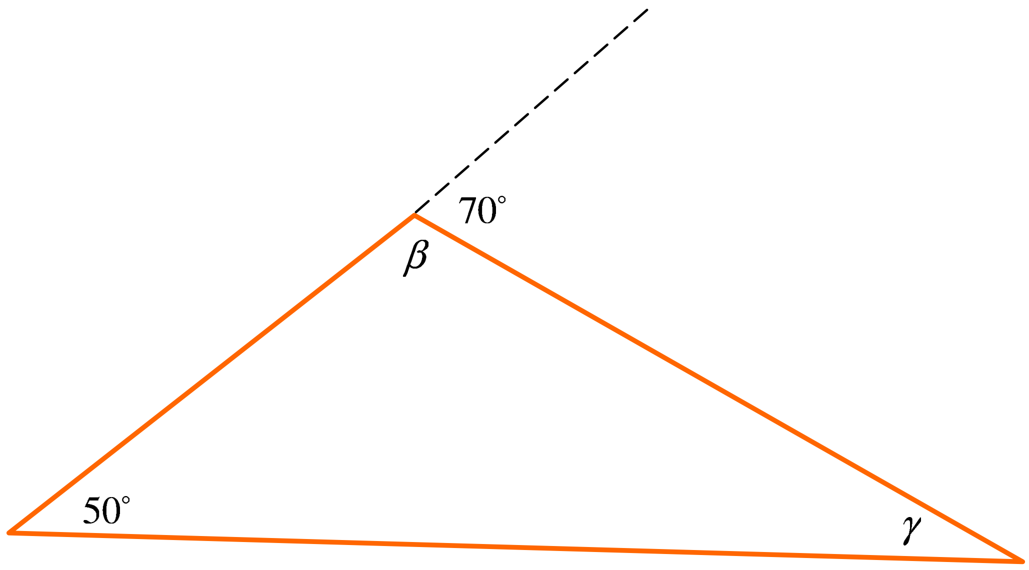
$$\delta = ?$$

Rozwiązanie.



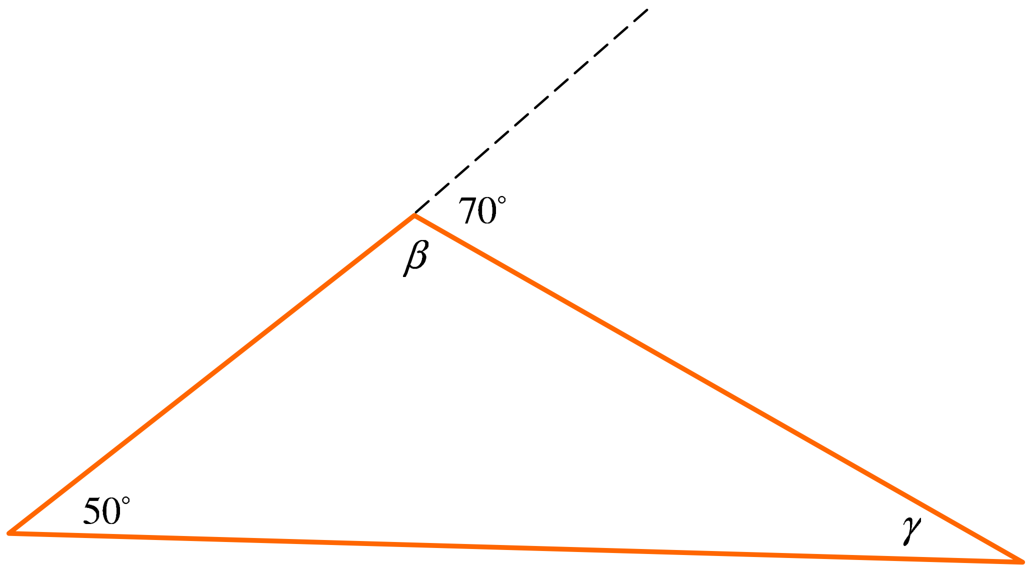
$$\delta = 50^\circ + 80^\circ = 130^\circ$$

Przykład. Wyznacz kąty zaznaczone na rysunku:



$$\beta =?, \quad \gamma =?$$

Rozwiązanie



$$\beta = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ, \ \gamma = 180^\circ - 110^\circ - 50^\circ = 20^\circ.$$

8 Twierdzenia o bokach trójkąta

Twierdzenie. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta, to $a < b + c$ i $b < c + a$ i $c < a + b$.

Dowód. Rozważmy trójkąt ABC . Wierzchołki tego trójkąta nie są współliniowe, zatem

$$|BC| < |AC| + |AB|$$

i

$$|AC| < |AB| + |BC|$$

i

$$|AB| < |BC| + |AC|.$$

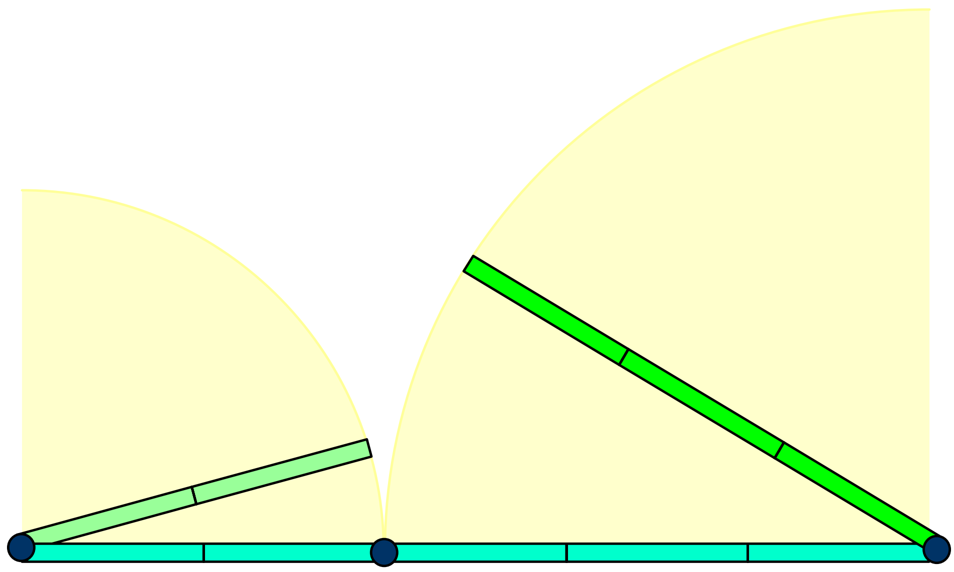
Wstawiając

$$|BC| = a, \ |AC| = b, \ |AB| = c,$$

otrzymujemy tezę.

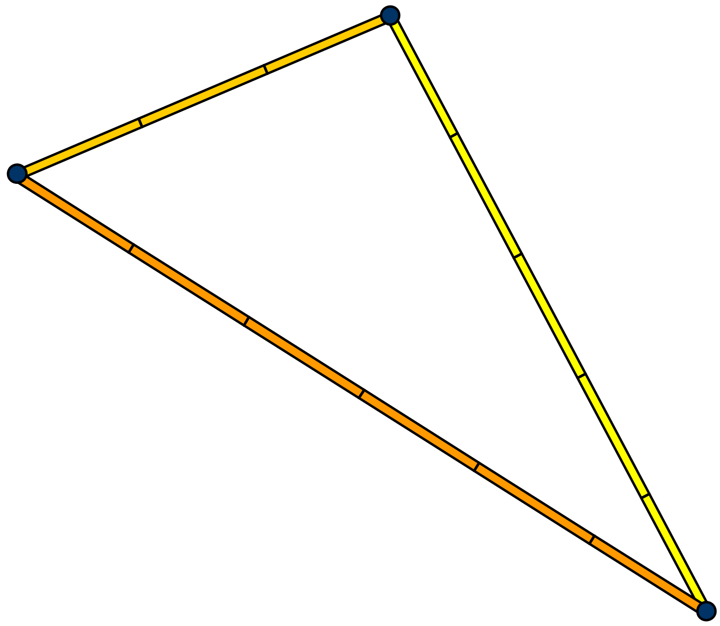
Twierdzenie. **Jeżeli długości trzech odcinków spełniają warunek $a < b + c$ i $b < c + a$ i $c < a + b$, to istnieje trójkąt, którego boki mają długości a, b, c.**

Przykład. Czy istnieje trójkąt, którego boki miałyby długości 2, 3, 5?



Nie ponieważ $2 + 3 = 5$**.**

Przykład. Czy istnieje trójkąt, którego boki miałyby długości 3, 5,6?

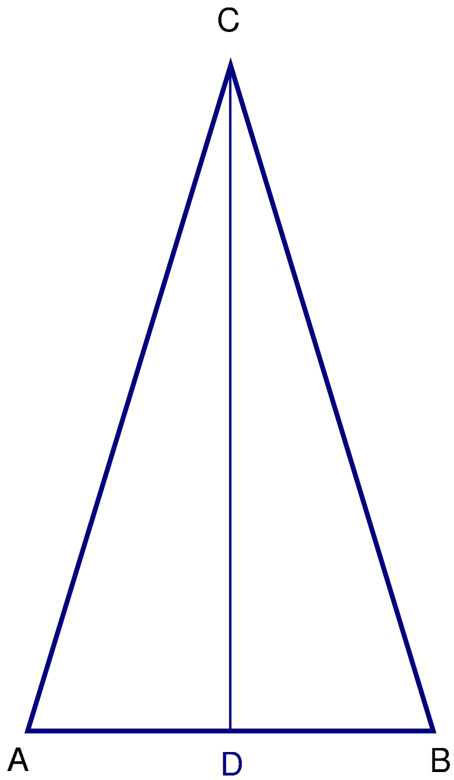


Tak, ponieważ $3 < 5 + 6$ **i** $5 < 3 + 6$ **i** $6 < 3 + 8$**.**

9 Boki i kąty trójkąta

Twierdzenie. (pons asinorum). W trójkącie równoramiennym kąty wewnętrzne przy podstawie są równe.

Dowód. Załóżmy, że w trójkącie ABC jest $|AC| = |BC|$. Punkt D niech będzie środkiem odcinka AB.

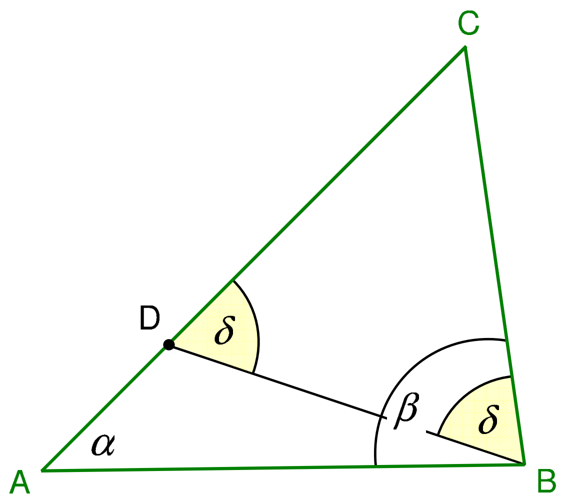


Trójkąty ADC i BDC są przystające na mocy cechy (bbb). Zatem kąty wewnętrzne przy wierzchołkach A i B są równe.

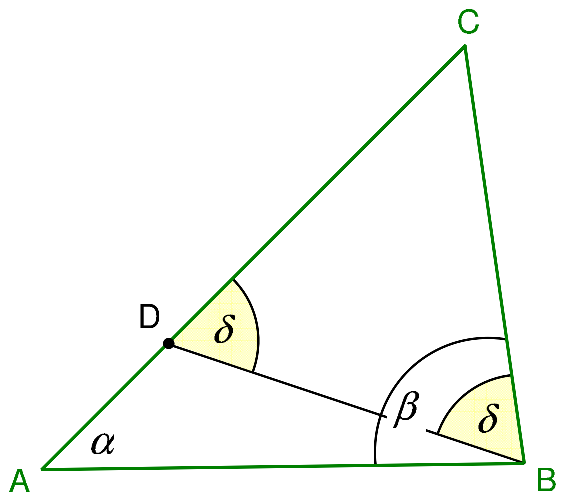
Z twierdzenia o kątach przy podstawie w trójkącie równoramiennym wynikają dwa ważne twierdzenia.

Twierdzenie. **W trójkącie naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt wewnętrzny.**

Dowód. Załóżmy, że w trójkącie ABC jest $|AC| > |BC|$.



Na boku AC weźmy punkt D taki, że $|BC| = |CD|$. Kąty przy podstawie w trójkącie równoramiennym BDC są równe δ. Oczywiście $\alpha < \delta$ (δ jest kątem zewnętrznym w trójkącie ABD) i $\delta < \beta$. Zatem $\alpha < \beta$, co należało udowodnić.



Twierdzenie. **W trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok.**

Dowód. (nie wprost). Załóżmy, że $\alpha < \beta$ i przypuśćmy, że $|AC| \leqslant |BC|$. Jeżeli $|AC| < |BC|$, to na podstawie poprzedniego twierdzenia musi być $\beta < \alpha$. Gdy $|AC| = |BC|$, to z twierdzenia pons asinorum mamy $\alpha = \beta$. Uzyskaliśmy wynik sprzeczny z założeniem, a więc dowód twierdzenia został zakończony.

.

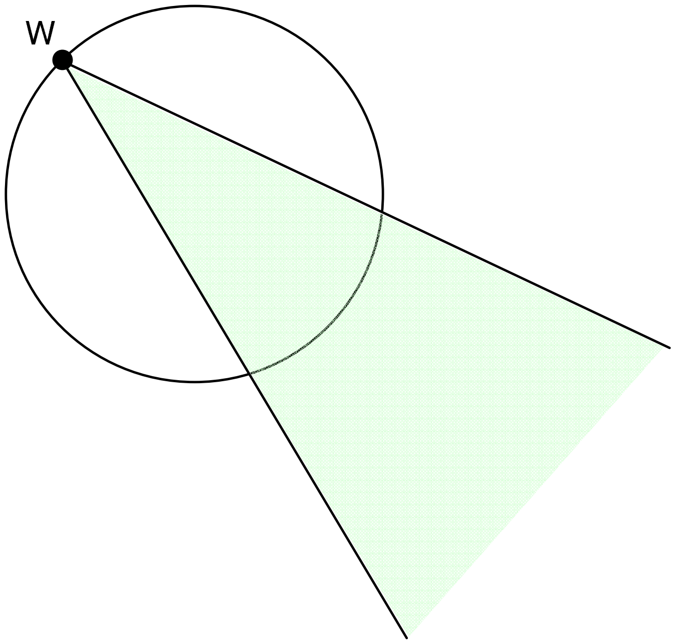
Uwaga. Pons asinorum - ośli most. Pierwsze trudniejsze twierdzenie w Elementach Euklidesa, przez które niełatwo przebrnąć nieukom.

10 Kąty w kole (okręgu)

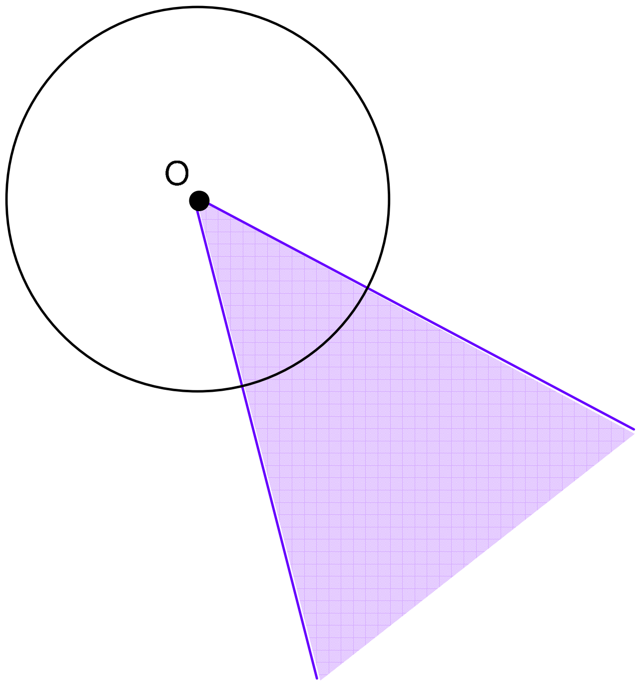
Definicja. **Cięciwą okręgu nazywamy niezerowy odcinek, którego końce należą do tego okręgu. Średnicą okręgu nazywamy cięciwę, do której należy środek okręgu. Cięciwą (średnicą) koła nazywamy cięciwę (średnicę) okręgu tego koła.**

Pytanie. *Czy w danym okręgu można znaleźć cięciwę dłuższą od średnicy?*

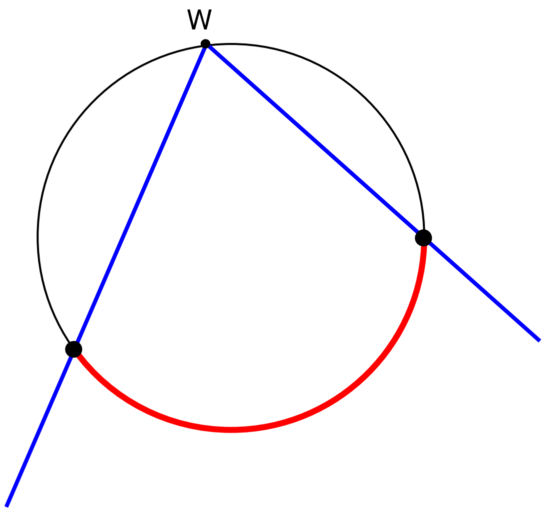
Definicja. **Kąt wypukły, którego wierzchołek leży na okręgu koła, a ramionami są półproste zawierające cięciwy tego koła, nazywamy kątem wpisanym.**

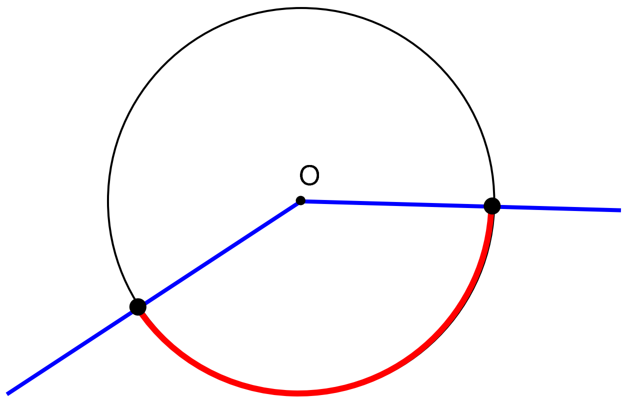


Definicja . **Kąt, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramionami są półproste zawierające promienie tego koła, nazywamy kątem środkowym.**



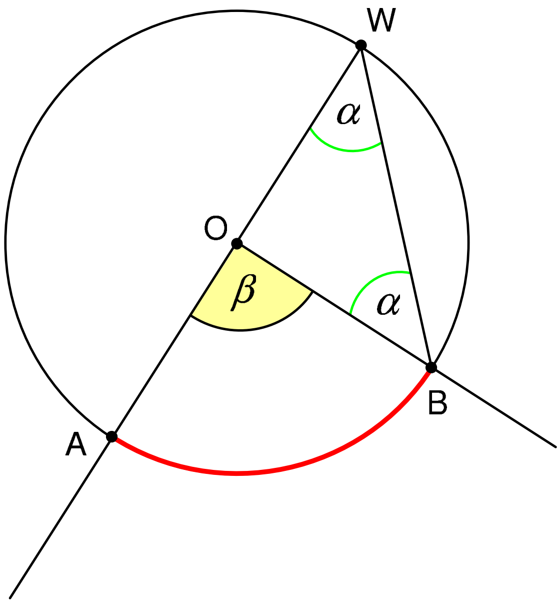
Definicja. **Łuk okręgu, będący częścią wspólną kąta wpisanego lub środkowego z kołem nazywamy łukiem, na którym dany kąt jest oparty.**





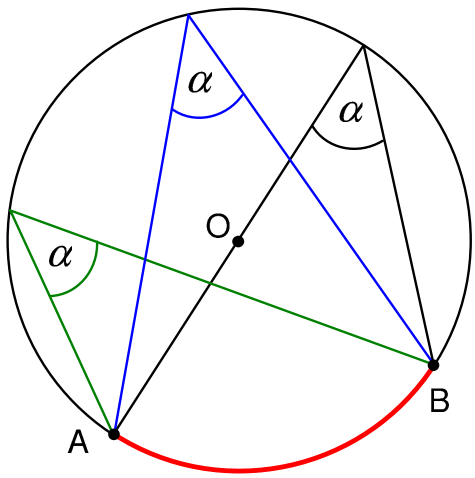
Twierdzenie. **Jeżeli kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku, to kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego.**

Dowód. Dowód przeprowadzimy w przypadku, gdy jedno z ramion kąta wpisanego przechodzi przez środek koła.

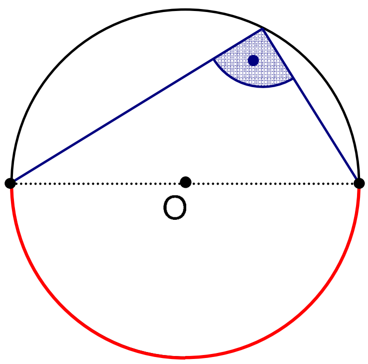


Kąt β jest kątem zewnętrznym trójkąta równoramiennego OBE, w którym kąty przy podstawie są równe α. Zatem $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Wniosek. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.

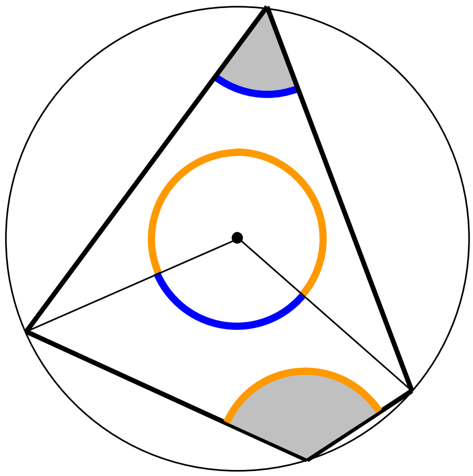


Wniosek. Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.



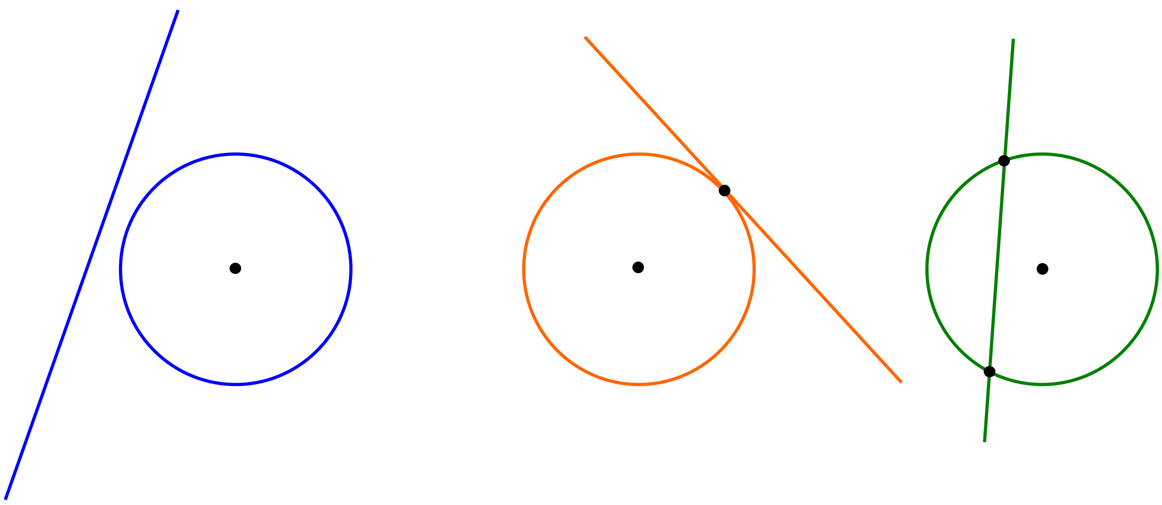
Uwaga. Kąt wpisany oparty na półokręgu nazywamy także kątem opartym na średnicy.

Wniosek. Suma kątów wpisanych, opartych na łukach dopełniających się do okręgu, jest równa kątowi półpełnemu.

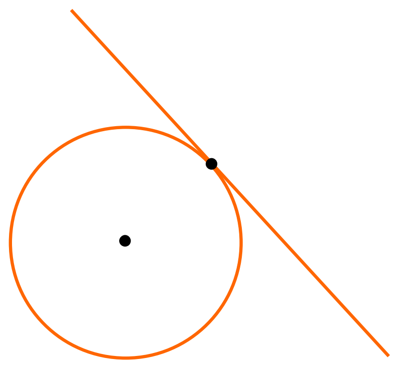


11 Styczna do okręgu

Twierdzenie. **Prosta i okrąg na płaszczyźnie są rozłączne lub mają dokładnie jeden punkt wspólny, lub mają dwa różne punkty wspólne.**

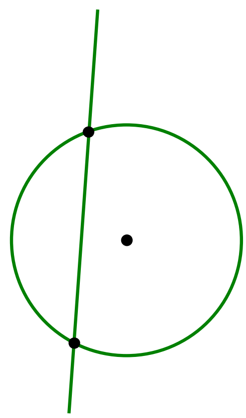


Definicja. Prostą, która ma z okręgiem tylko jeden punkt wspólny, nazywamy styczną do okręgu.

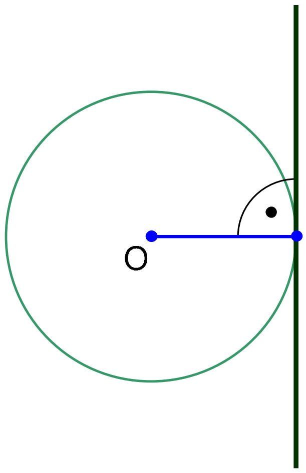


Definicja. Punkt wspólny okręgu i stycznej do tego okręgu nazywamy ich punktem styczności.

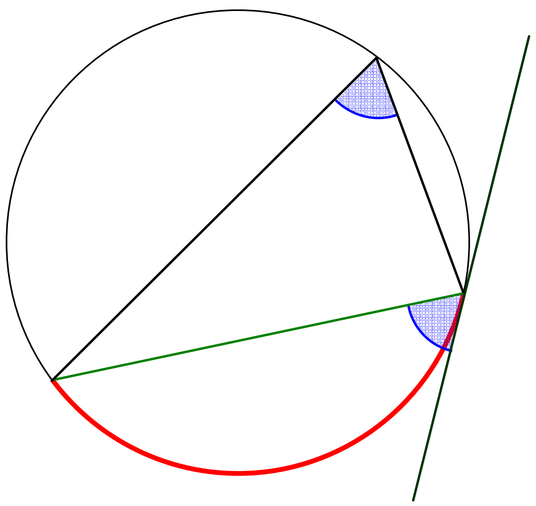
Definicja. **Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy sieczną okręgu.**



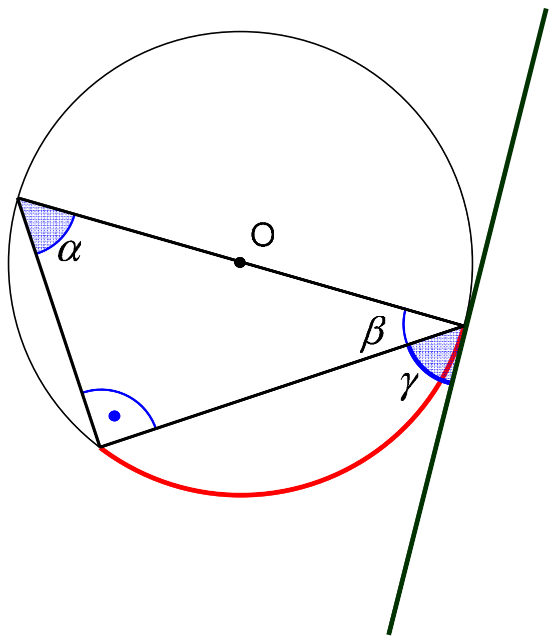
Twierdzenie. **Styczna do okręgu i promień tego okręgu, którego końcem jest punkt styczności, są prostopadłe.**



Twierdzenie. **Kąt stycznej do okręgu z cięciwą przechodzącą przez punkt styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tym samym łuku co cięciwa i leżącemu po przeciwnej stronie cięciwy niż ten łuk.**



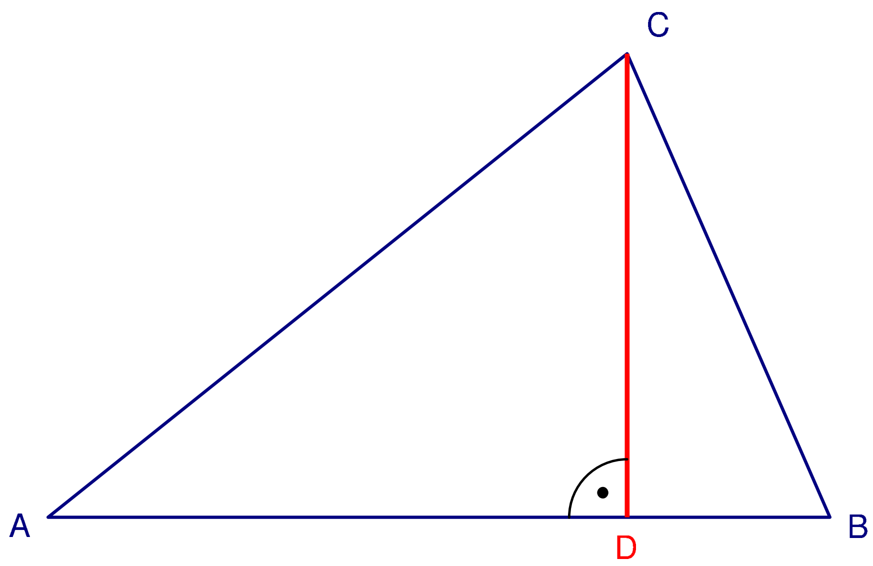
Dowód.



Ponieważ $\alpha + \beta = 90^\circ$ i $\gamma + \beta = 90^\circ$, to $\alpha = \gamma$.

12 Wysokości

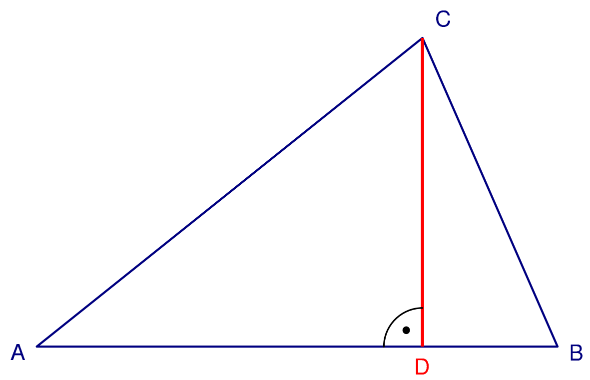
Definicja. **Wysokością trójkąta nazywamy odcinek, którego końcami są wierzchołek trójkąta i punkt, w którym prosta prostopadła poprowadzona z tego wierzchołka do przeciwległego boku przecina ten bok lub jego przedłużenie.**



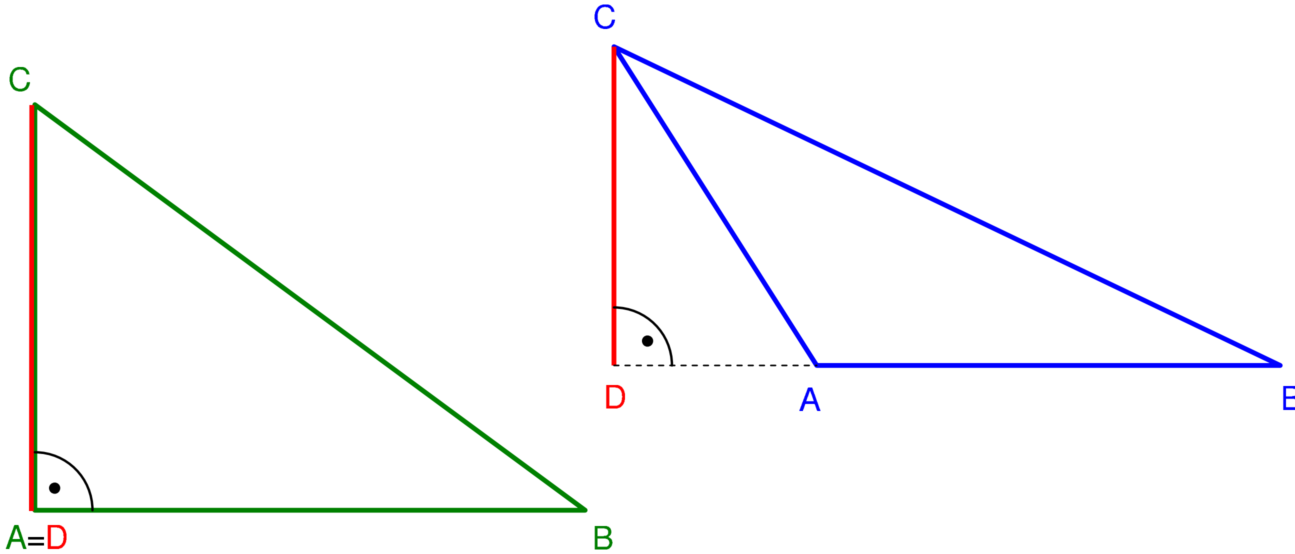
Mówimy, że wysokość jest opuszczona (z wierzchołka) na bok trójkąta. Ten bok nazywamy wówczas podstawą trójkąta.

Punkt, w którym prosta poprowadzona z wierzchołka trójkąta prostopadle do przeciwległego boku przecina ten bok lub jego przedłużenie nazywamy spodkiem wysokości.

Punkt D na rysunku jest spodkiem wysokości opuszczonej na bok AB, który wówczas nazwiemy podstawą.

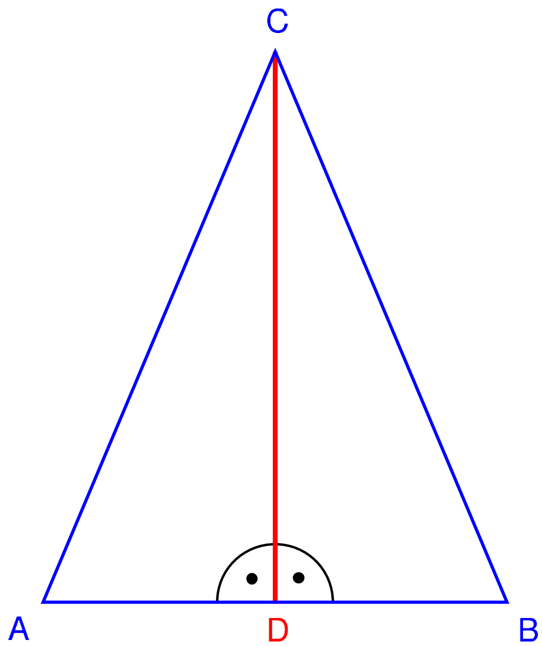


Przykład.



Długość wysokości opuszczonej z wierzchołka np. C na bok $|AB|$ jest równa odległości tego wierzchołka od prostej $|AB|$.

Twierdzenie. **(odwrotne do twierdzenia pons asinorum). Jeżeli w trójkącie dwa kąty wewnętrzne są równe, to trójkąt jest równoramienny.**



Dowód. Odcinek CD jest wysokością w trójkącie ABC.

Uzasadnij korzystając z cech przystawania trójkątów, że trójkąty ADC i BDC są przystające. **jeśli nie wiesz jak to kliknij tu**

Trójkąty ADC i BDC są prostokątne, więc kąty $\measuredangle ACD$

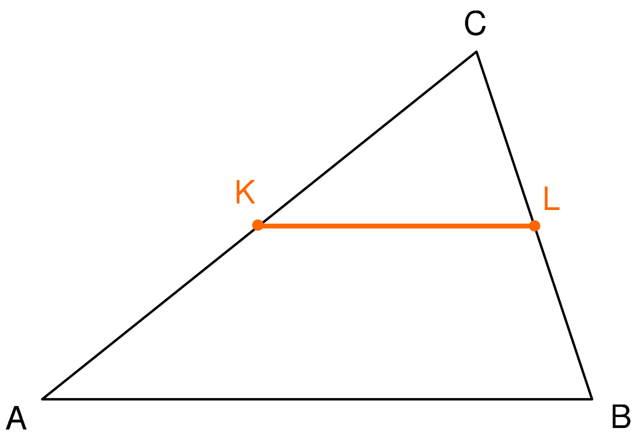
i $\measuredangle BCD$ są równe. Zatem trójkąty ADC i BDC są przystające (kbk).

Powrót na poprzednią stronę

Zatem $|AC| = |BC|$.

13 Środki boków trójkąta i środkowe I

Definicja. **Linią środkową trójkąta nazywamy odcinek, którego końcami są środki dwóch różnych boków trójkąta.**



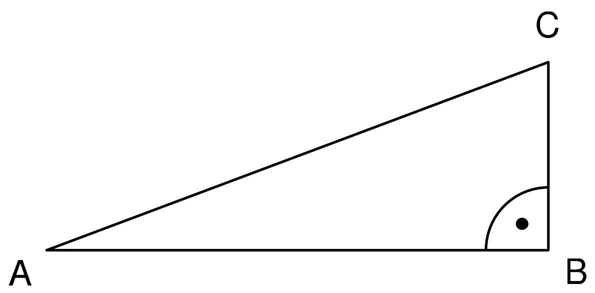
K jest środkiem odcinka AC

L jest środkiem odcinka BC

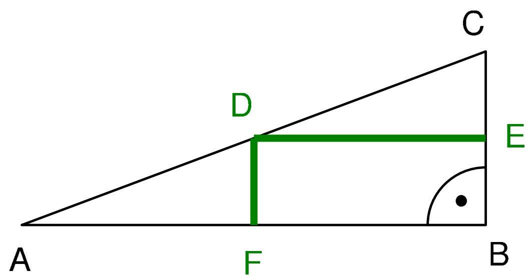
Każdy trójkąt ma trzy różne linie środkowe.

Twierdzenie. **Prosta poprowadzona przez środek jednego boku trójkąta równolegle do drugiego, połowi trzeci bok tego trójkąta. Odcinek tej równoległej, wyznaczony przez boki trójkąta jest połową drugiego boku.**

Dowód przeprowadzimy dla trójkąta ABC, w którym $\measuredangle ABC$ jest prosty.



Dowód.
Założenie: $|AD| = |DC|$.
Teza: $|BE| = |EC|$ i $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$.

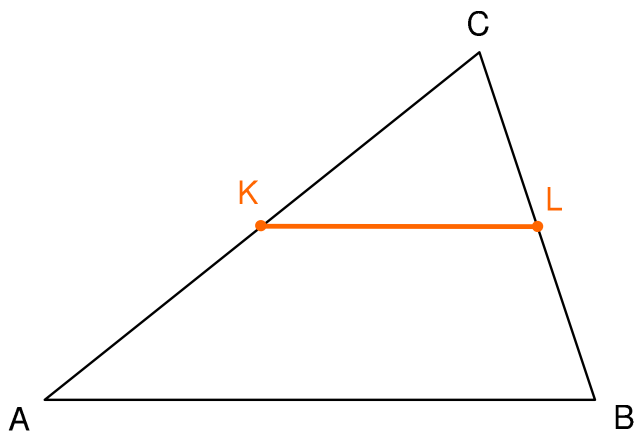


Prowadzimy odcinek $|DF|$ prostopadły do odcinka $|AB|$. Trójkąty $|AFD|$ i $|DEC|$ są przystające (kbk).

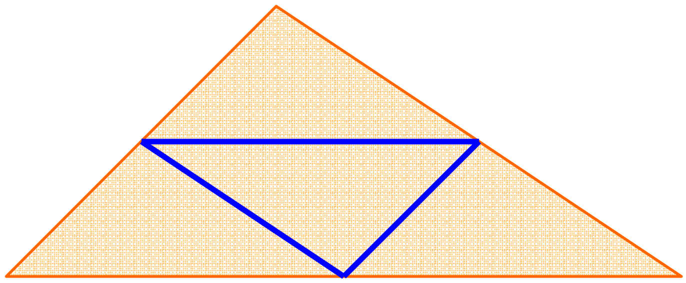
Czworokąt $FBED$ jest prostokątem. Zatem $|BE| = |FD| = |EC|$. Ponieważ $|DE| = |AF|$ i $|DE| = |FB|$=, to $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$.

Analogicznie prowadzimy dowód, gdy założymy, że $|BE| = |EC|$.

Twierdzenie. **Odcinek , którego końcami są środki różnych boków trójkąta (linia środkowa trójkąta) jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.**

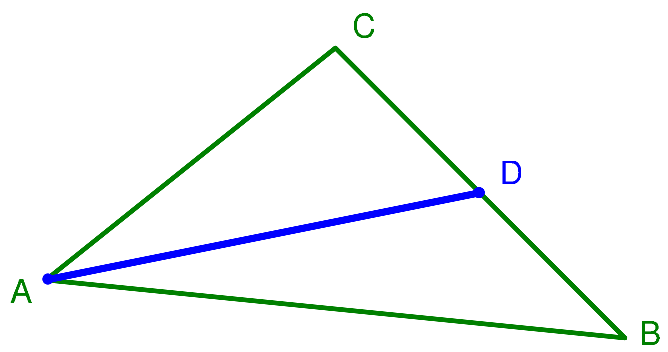


Trzy linie środkowe dzielą trójkąt na cztery przystające trójkąty. Ten podział jest triangulacją danego trójkąta.



14 Środki boków trójkąta i środkowe II

Definicja. **Środkową trójkąta nazywamy odcinek, którego końcami są wierzchołek trójkąta i środek boku przeciwległego temu wierzchołkowi.**

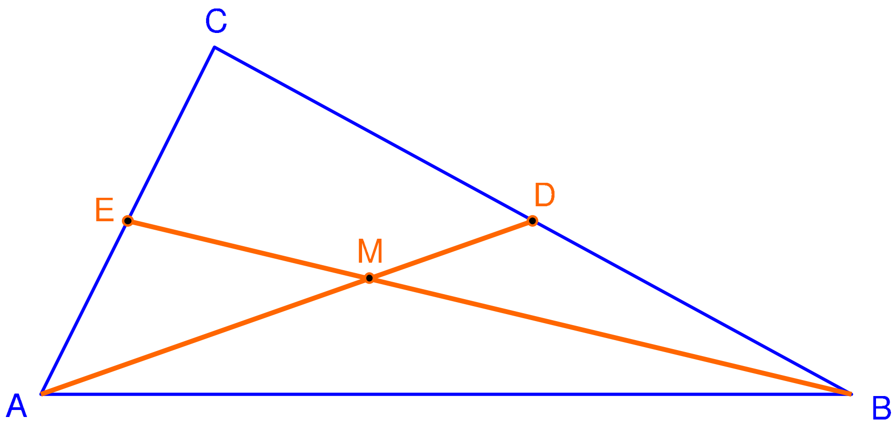


$$|BD| = |DC|$$

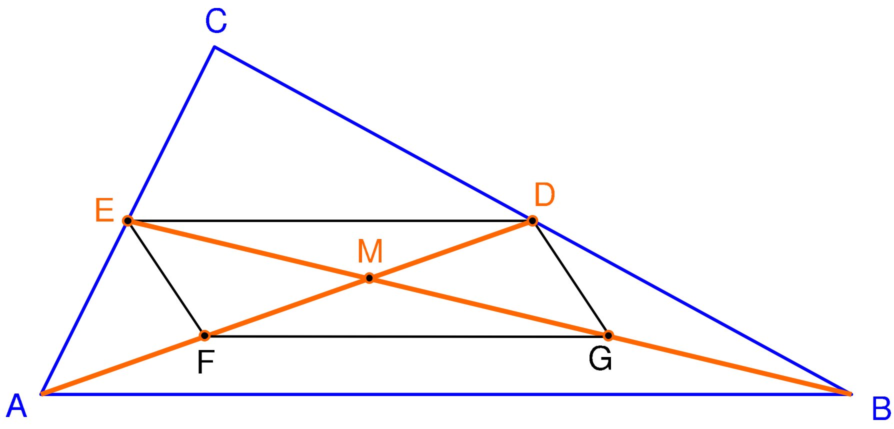
Każdy trójkąt ma trzy różne środkowe.

Pytanie. *Co można powiedzieć o środkowej podstawy i wysokości opuszczonej na podstawę w trójkącie równoramiennym.*

Twierdzenie. **W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$ (licząc od wierzchołka).**

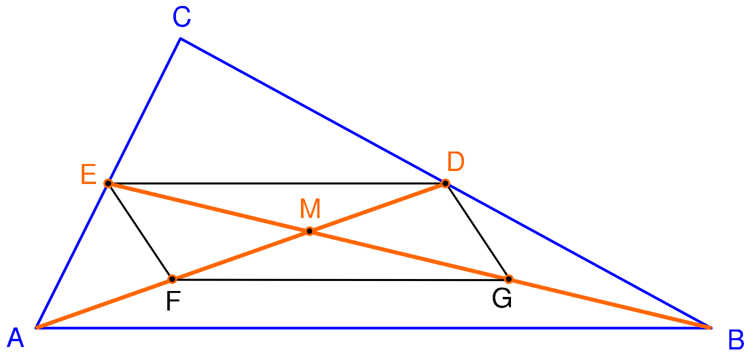


Dowód.



W trójkącie ABC prowadzimy dwie jego środkowe AD i BE. Przecinają się one w punkcie M (z własności półpłaszczyzn dopełniających się do płaszczyzny). Połączymy odcinkami środki E i D oraz środki F i G odcinków AM i BM. Z twierdzenia o linii środkowej trójkąta, zastosowanego do trójkątów ABC i ABM, wynika, że odcinki ED i FG są równoległe i równe.

Uzasadnij, korzystając z cech przystawania trójkątów, że trójkąty FGM i EDM są przystające.



Wobec tego $|FM| = |MD|$ i $|GM| = |ME|$.
Stąd

$$|AM| = |AF| + |FM| = 2|MD|,$$

$$|BM| = |BG| + |GM| = 2|ME|.$$

Podobnie pokazujemy, że środkowa AD i środkowa poprowadzona z wierzchołka C przecinają się w punkcie M', który dzieli je w stosunku $2:1$. Punkty M i M' dzielą odcinek AD w stosunku $2:1$, więc $M = M'$.

Definicja . **Punkt przecięcia się środkowych trójkąta nazywamy środkiem ciężkości tego trójkąta.**

Uwaga. Model trójkąta, wycięty z kartonu, podparty w środku ciężkości jest w równowadze.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.

Jakim podzbiorem płaszczyzny może być część wspólna

a) dwóch półpłaszczyzn tej płaszczyzny,

b) trzech półpłaszczyzn tej płaszczyzny.

Zadanie 2.

Dane są dwie różne proste równoległe przecięte trzecią prostą. Udowodnij, że

a) dwusieczne kątów odpowiadających są równoległe,

b) dwusieczne kątów naprzemianległych (wewnętrznych lub zewnętrznych) są równoległe,

c) dwusieczne kątów jednostronnie wewnętrznych są prostopadłe.

Zadanie 3.

Udowodnij, że dwusieczne dwóch kątów przyległych są prostopadłe.

Zadanie 4.

Oblicz kąty wewnętrzne trójkąta, w którym jeden z kątów jest dwa razy większy od drugiego, a ich suma jest równa trzeciemu kątowi.

TEST

1. Czy warunek $|AX| = |XB|$ określa na płaszczyźnie środek odci

◯ TAK ◯ NIE

Oczywiście, że NIE

2. Czy niepusta część wspólna dwóch półpłaszczyzn może być zbiorem ograniczonym?

◯ TAK ◯ NIE

Pewno, że NIE

3. Czy kąty odpowiadające przy dwóch prostych równoległych przeciętych trzecią prostą mogą mieć po $135°$?

◯ TAK ◯ NIE

TAK, a myślałeś(aś), że NIE

4. Czy dwie różne środkowe trójkąta zawsze się przecinają?

◯ TAK ◯ NIE

TAK!!!

5. Ile osi symetrii może mieć trójkąt?

a) dokładnie dwie b) trzy

Oczywiście, że b)

6. Kąt wpisany w koło może mieć

a) 179° b) 181°

Ja obstawiam a)

Kąt wpisany w koło to połowa kąta środkowego.

7. W trójkącie równoramiennym środkowe ramion są

a) wysokościami b) równe

Jak narysowałem to wyszło, że b)

8. Czy do przystawania trójkątów wystarcza równość dwóch boków i jednego kąta?

◯ TAK ◯ NIE

NIE!

Popatrz na cechy przystawania trójkątów.

9. Czy trzy punkty niewspółliniowe zawsze należą do jakiegoś okręgu?

◯ TAK ◯ NIE

A jednak TAK

10. Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma 60°.
Pozostałe dwa kąty mają

a) 30°, 90° b) 60°, 60°

Narysuj i zobaczysz, że b)

Literatura

[1] J. Anusiak, Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum, klasa I, WSiP, Warszawa 1990.

[2] M. Antek, P. Grabowski, Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym, Nowa Era , Warszawa 2006.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, Matematyka I. Podręcznik do liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2008.

[4] M. Małek, Geometria. Zbiór zadań cz. 1, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1993.

[5] H. Pawłowski, Matematyka 1. Podręcznik zakres rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.