Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat: Kombinatoryka

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

****************na każdej stronie śmieszne kostki do gry*********************
***************gwiazdkami wyroznione sa pliki do wstawienia******************

Matematyka jest produktem myśli ludzkiej, niezależnej od doświadczenia, jednak wspaniale pasuje do świata realnego i tak świetnie go tłumaczy. (Albert Einstein)

Często mamy do czynienia ze zbiorami. Gdy elementy zbioru są wypisane, to łatwo możemy znaleźć ich liczbę. Czasami jednak zbiór jest podany w formie bardziej skomplikowanej i nie jest oczywiste, ile ma elementów. Z pomocą przychodzi kombinatoryka - dział matematyki zajmujący się zbiorami skończonymi oraz odwzorowaniami między nimi. Powstała dzięki grom hazardowym, a swój rozwój zawdzięcza rachunkowi prawdopodobieństwa, teorii grafów, teorii informacji i innym działom matematyki stosowanej.

Kombinatoryka zajmuje się wyznaczaniem liczby elementów zbiorów skończonych utworzonych zgodnie z określonymi zasadami. Najważniejszym jej zadaniem jest konstruowanie spełniających pewne określone warunki odwzorowań jednego zbioru skończonego w drugi oraz znajdowanie wzorów na liczbę tych odwzorowań. Wprowadzona teoria uzupełniona jest przykładami, a podsumowana zadaniami do samodzielnego rozwiązania i testem końcowym.

Podstawowe pojęcia, którymi posługuje się kombinatoryka:

Silnia: $n!$ dla $n \in \mathbb{N}$ oznacza iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n, czyli

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n.$$

Przyjmujemy dodatkowo, że
$0! = 1$.

Symbol Newtona: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ dla $n, k \in \mathbb{N}$ i $0 \leqslant k \leqslant n$ oznacza liczbę określoną wzorem:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1 Zasada mnożenia

Elementarną metodą kombinatoryki, często stosowaną intuicyjnie jest tak zwana reguła mnożenia.
Najpierw zapoznamy się zasadą mnożenia dla zbioru 2-elementowego i 3-elementowego.

Rozważymy zbiór $A = \{a, b\}$ składający się z 2 różnych elementów oraz zbiór $B = \{x, y, z\}$ składający się z 3 różnych elementów.
Zbadamy ile możemy utworzyć uporządkowanych par (a, b), takich że $a \in A$ i $b \in B$.
Zbiór takich par oznaczymy $A \times B$, a ich liczbę oznaczymy przez $\overline{\overline{A \times B}}$.

Otrzymujemy:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z),$$
$$(b, x), (b, y), (b, z)\}.$$

Co graficznie możemy przedstawić następująco:

*************************plik: zasadamn1*************************

Zatem po przeliczeniu wszystkich powiązań otrzymujemy ich $2 \cdot 3$. Co zapiszemy:

$\overline{\overline{A \times B}} = 2 \cdot 3 = 6.$

Rozszerzymy rozważane zbiory na dwa 3-elementowe. Dla $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{x, y, z\}$ mamy

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z),$$
$$(b, x), (b, y), (b, z),$$
$$(c, x), (c, y), (c, z)\}.$$

Co graficznie możemy przedstawić następująco:

*************************plik: zasadamn2*************************

Czyli otrzymujemy $3 \cdot 3$ przypadki. A zatem $\overline{\overline{A \times B}} = 3 \cdot 3 = 9$.

Uogólnienie na dowolną liczbę elementów w dwóch zbiorach

Najpierw zastanówmy się:
Ile elementów będzie miał zbiór $A \times B$, gdy A ma 3 elementy, a B 4 elementy?

$3 \cdot 4 = 12.$

Ile elementów będzie miał zbiór $A \times B$, gdy A ma n elementy, a B k elementy?

Możemy już stwierdzić:

Jeżeli zbiór A składa się z n różnych elementów, a zbiór B z k różnych elementów, to można utworzyć

$$n \cdot k$$

uporządkowanych par (a, b), takich że $a \in A$ i $b \in B$, czyli

$$\overline{\overline{A \times B}} = n \cdot k.$$

Przykład

Jeżeli

$$A = \{a, b, c\}, \quad B = \{x, y\},$$

to wybierając najpierw jedną literę ze zbioru A, a następnie jedną ze zbioru B otrzymujemy następujące wyrazy dwuliterowe

$$ax, \ ay, \ bx, \ by, \ cx, \ cy,$$

czyli otrzymujemy różnych dwuliterowych wyrazów:

$$3 \cdot 2.$$

Zatem mamy 6 różnych dwuliterowych wyrazów dla A i B.

Przykład

Ile różnych wyników można otrzymać przy rzucie monetą i kostką?

Niech A oznacza zbiór możliwych wyników przy rzucie monetą, czyli składa się z orła (O) i reszki (R): $A = \{O, R\}$. Natomiast B niech będzie zbiorem elementów reprezentujących rezultaty rzutu kostką, czyli $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Zatem otrzymujemy:

$$A \times B = \{(O,1),\ (O,2),\ (O,3),\ (O,4),\ (O,5),\ (O,6),$$
$$(R,1),\ (R,2),\ (R,3),\ (R,4),\ (R,5),\ (R,6)\}.$$

Widzimy, że mamy $2 \cdot 6$ możliwości, czyli 12.
Graficznie powyższe rozumowanie możemy przedstawić następująco:

****************plik:monetakostka********************************

Zasadę o mnożeniu możemy uogólnić ze względu na liczbę zbiorów, co przeanalizujmy na przykładzie:

Przykład

Ile jest liczb czterocyfrowych nieparzystych?

Tworzymy ciąg czterowyrazowy, w którym:

- pierwszą cyfrę wybieramy z pośród zbioru 9-elementowego (odrzucamy zero, bo nie może stać na miejscu tysięcy w liczbie czterocyfrowej),

- drugą i trzecią wybieramy ze zbioru 10 cyfr,

- cyfrę jedności losujemy spośród cyfr nieparzystych $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, co zagwarantuje, że liczba czterocyfrowa będzie nieparzysta.
Zatem wszystkich liczb będzie:
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

Uogólnienie zasady o mnożeniu.

Dla dowolnych zbiorów skończonych A_1, A_2, . . . ,A_n mamy

$$\overline{\overline{A_1}} \cdot \overline{\overline{A_2}} \cdot ... \cdot \overline{\overline{A_n}}$$

n-elementowych uporządkowanych ciągów $(a_1, a_2, ..., a_n)$ takich, że $a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n$.
Symbol „$\overline{\overline{}}$” oznacza liczbę elemenów w danym zbiorze.

2 Zliczanie funkcji

2.1 Wariacje z powtórzeniami

Na początek niech A i B będą dowolnymi zbiorami takimi, że $\overline{\overline{A}} = 3$ oraz $\overline{\overline{B}} = 2$. Rozważmy dowolną funkcję $f : A \to B$.
Zadamy sobie pytanie: Ile jest takich funkcji? (Aby odpowiedzieć na to pytanie musimy przypomnieć, że funkcja każdemu $a \in A$ przyporządkowuje dokładnie jeden $b \in B$.)

Zbadamy ile możliwych takich przyporządkowań jest dla ustalonego punktu:

• pierwszego (zaznaczonego na czerwono)

***************komb2**********************

otrzymujemy 2 możliwości:

***************komb3**********************

- drugiego (zaznaczonego na zielono)

**************komb4*********************

otrzymujemy 2 możliwości:

**************komb5*********************

- trzeciego (zaznaczonego na niebiesko)

**************komb6*********************

otrzymujemy 2 możliwości:

**************komb7*********************

Teraz zbadamy ile możliwych przyporządkowań jest dla ustalonego zbioru punktów:

• z dwóch

***************komb8**********************

otrzymaliśmy z zasady mnożenia $2 \cdot 2 = 4$,

- z trzech (wszystkich)

**************komb9*********************

otrzymaliśmy z zasady mnożenia $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Podsumowanie

Zatem możemy poprzednie rozważania uogólnić na A i B będące dowolnymi zbiorami takimi, że $\overline{\overline{A}} = m > 0$ oraz $\overline{\overline{B}} = n > 0$. Wtedy rozważymy dowolną funkcję $f : A \to B$ i odpowiemy na pytanie ile jest takich funkcji?

Dla ustalonego $a \in A$ możliwych przyporządkowań elementu b jest tyle, na ile sposobów możemy wybrać b z B, czyli dokładnie n. Z zasady mnożenia podobnie do poprzednich przypadków otrzymujemy, że wszystkich funkcji jest

$$\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{mrazy} = n^m.$$

Inaczej mówiąc otrzymaliśmy liczbę m-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego, którą będziemy wyrażać wzorem:

$$W_n^m = n^m,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$.

Zatem z m-wyrazowymi wariacjami z powtórzeniami zbioru n-elementowego mamy do czynienia wówczas, gdy m razy wybieramy po jednym elemencie ze zwracaniem z danego zbioru.

Należy pamiętać, że w wariacji liczy się kolejność ustawienia wyrazów. Podsumowując wariacje z powtórzeniami stosujemy, gdy chodzi o:

- losowanie m-elementów spośród n-elementów ze zwracaniem i kolejność wylosowanych elementów jest istotna

- rozmieszczenie m-elementów na n-elementowych miejscach,
- losowanie m razy po jednym elemencie ze zwracaniem, spośród n-elementów.

*****************plik:wariacje z powt*********************************

Odpowiedź: Wariacje z powtórzeniami

Przykład

Na ile sposobów można umieścić 5 par butów w 4 szufladach.

Rozwiązanie

Chcemy odwzorować zbiór 5-elementowy w zbiór 4-elementowy. Liczba takich odwzorowań jest równa liczbie wariacji 5-wyrazowej z powtórzeniami:

$$W_4^5 = 4^5 = 1024.$$

Odpowiedź: buty można umieścić na 1024 sposoby.

Przykład

Ile jest możliwych wyników rzutów 3 monetami?

Rozwiązanie

Przy rzucie monetą otrzymamy jeden z dwóch wyników: orzeł (O) lub reszka (R). Zatem tworzymy ciąg trzywyrazowy (liczba monet) z wyrazów zbioru dwuelementowego (liczba możliwych wyników: O lub R). Liczba takich ciągów wynosi:

$$W_2^5 = 2^5 = 32.$$

Odpowiedź: możliwych wyników takiego doświadczenia jest 32.

2.2 Wariacje bez powtórzeń

Załóżmy teraz dodatkowo, że $n \geqslant m$ i $\overline{\overline{A}} = m, \overline{\overline{B}} = n$. Postawimy sobie pytanie: Ile jest funkcji różnowartościowych $f : A \to B$?

Zliczając takie funkcje musimy przypomnieć, że odwzorowanie różnowartościowe różnym argumentom (elementom z A), przyporządkowuje różne wartości (elementy z B).

To znaczy, że jeżeli jakiemuś $a_1 \in A$ przyporządkowaliśmy pewien $b_1 \in B$, to kolejnemu $a_2 \neq a_1$ nie możemy już przyporządkować b_1.
Tak więc ilość możliwości wyboru b z B dla $a \in A$ zmniejsza się o 1 z każdym przyporządkowaniem $b \in B$ dla kolejnego $a \in A$.

Najpierw rozważymy przypadek dla $\overline{\overline{A}} = 2, \overline{\overline{B}} = 3$. Zbadamy ile jest funkcji różnowartościowych $f : A \to B$?
Najpierw zbadamy ile funkcji różnowartościowych jest dla ustalonego punktu i ustalonego odwzorowania dla tego punktu:
• pierwszego (zaznaczonego na czerwono)
***************warbezpowt1**********************
otrzymaliśmy 3 możliwości.
***************warbezpowt2**********************

- z drugiego punktu (zaznaczonego na zielono)

otrzymaliśmy 2 możliwości różnowartościowych odwzorowań między sobą i pierwszym wybranym (czerwonym) odwzorowaniem.

Teraz zbadamy ile możliwych funkcji różnowartościowych jest dla ustalonego zbioru punktów:

- z dwóch

***************warbezpowt3*********************

otrzymujemy z zasady mnożenia $3 \cdot 2 = 6$.

Uogólniając poprzednie rozumowanie dla $\overline{\overline{A}} = m, \overline{\overline{B}} = n$ i $n \geqslant m$ otrzymujemy:
• dla pierwszego wybranego punktu z A i przyporządkowania mu pewnego elementu z B
otrzymujemy n możliwości
• z drugiego punktu
otrzymujemy n-1 funkcji różnowartościowych
• z trzeciego punktu
otrzymujemy n-2 funkcji różnowartościowych
...
• z m-tego punktu
otrzymujemy n-m+1 funkcji różnowartościowych

Teraz zbadamy ile możliwych funkcji różnowartościowych jest dla ustalonego zbioru punktów:
• z dwóch
otrzymaliśmy z zasady mnożenia $n \cdot n - 1$
• z trzech
otrzymaliśmy z zasady mnożenia $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$
...
• z m punktów
otrzymaliśmy z zasady mnożenia $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Wyznaczoną liczbę funkcji różnowartościowych ze zbioru m-elementowego w zbiór n-elementowy nazywamy także wariacją m-wyrazową bez powtórzeń utworzoną ze zbioru n-elementowego ($m \leqslant n$).

Liczbę m-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego wyrazimy wzorem:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}^+,\ m \in \mathbb{N}\ i\ m \leqslant n$.

Z m-wyrazowymi wariacjami bez powtórzeń zbioru złożonego z n elementów mamy do czynienia, gdy m razy wybieramy bez zwracania po jednym elemencie z danego zbioru.

Przykład

Oblicz, ile jest liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach.

Rozwiązanie

Ze zbioru cyfr $\{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$ tworzymy liczby pięciocyfrowe, czyli pięcioelementowe wariacje bez powtórzeń zbioru dziesięcioelementowego:

$$V_{10}^{5} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240.$$

Spośród tych wariacji są takie, które na miejscu dziesiątek tysięcy mają cyfrę 0. Ich liczba jest równa:

$$V_{9}^{4} = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024.$$

Zatem szukana ilość licz pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach jest równa:

$$V_{10}^{5} - V_{9}^{4} = 27216.$$

Odpowiedź: można utworzyć 27216 liczb pięciocyfrowych o niepowtarzających się cyfrach.

Przykład

Na ile sposobów można rozmieścić na 7 półkach 5 książek, tak aby każda była na innej półce.

Rozwiązanie

Chcemy wyznaczyć liczbę funkcji (odwzorowań) różnowartościowych ze zbioru 5-elementowego w zbiór 7-elementowy. Liczba takich odwzorowań jest równa:

$$V_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520.$$

Odpowiedź: książki można umieścić na półkach na 2520 sposobów.

3 Permutacje

n-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru n-elementowego w siebie nazywamy permutacjami tego zbioru. Permutacja jest więc wzajemnie jednoznacznym przekształceniem pewnego zbioru skończonego na siebie.

Ponieważ $V_n^n = \frac{n!}{0!} = n!$. Wtedy

liczba permutacji zbioru złożonego z n elementów jest równa n!.

$$P_n = n!.$$

Przykład

Na ile sposobów można ustawić w kolejce 6 dziewcząt, tak aby:
a) stały obok siebie w dowolnej kolejności,
b) dwie z dziewcząt, Ala i Kasia, stały obok siebie.

Rozwiązanie:

a) Dowolne ustawienie 6 dziewcząt w kolejce traktujemy jako sześcioelementową permutację. Zatem
$P_6 = 6! = 720.$
Odpowiedź: Liczba wszystkich dowolnych ustawień dziewcząt w kolejce wynosi 720.

b) Jeżeli Alę i Księ potraktujemy jako nierozłączną parę, to dowolne ustawienie wszystkich dziewczyn będzie permutacją pięcioelementową:
$P_5 = 5!$
Ale Ala i Kasia mogą zmieniać się miejscami między sobą na $2! = 2$ sposobów (permutacja dwuelementowa).
Zatem liczba wszystkich ustawień, w których Kasia i Ala stoją obok siebie będzie równa:
$2! \cdot P_5 = 2! \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240.$

Odpowiedź:
Jest 240 sposobów ustawień w kolejce, w których Ala i Kasia stoją obok siebie.

Przykład

Ile różnych liczb pięciocyfrowych, w których żadna cyfra się nie powtarza, można utworzyć z cyfr: 0,1,2,3,4?

Rozwiązanie:

Wszystkich możliwych ustawień podanych pięciu cyfr mamy $P_5 = 5!$. Z tej grupy musimy odrzucić wszystkie takie przypadki, w których na pierwszym miejscu znajduje się zero (bo wtedy nie będzie to liczba pięciocyfrowa).
Takich możliwości jest $P_4 = 4!$.
Zatem liczb pięciocyfrowych spełniających warunek zadania będzie:
$5! - 4! = 120 - 24 = 96$.

Odpowiedź:
Takich liczb jest 96.

4 Kombinacje

Niech A będzie zbiorem m-elementowym.
Kombinacją k-elementową utworzoną ze zbioru m-elementowego ($0 \leqslant k \leqslant m$, $k, m \in \mathbb{N}$) nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru m-elementowego A.

Kombinacja, to jedna z możliwości wyboru kilku elementów z większego zbioru, przy czym kolejność wyboru elementów nie ma znaczenia.

Ilość podzbiorów k-elementowych zbioru m-elementowego, czyli liczba k-elementowych kombinacji zbioru m-elementowego wyraża się wzorem:

$$C_m^k = \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!},$$

gdzie $m \in \mathbb{N}^+$, $k \in \mathbb{N}$ i $k \leqslant m$.

W zadaniach często będziemy się spotykać z doświadczeniami polegającymi na losowaniu k-elementów spośród m-elementów pewnego zbioru. Rozróżniamy przy tym dwa sposoby losowania:
- losowanie ze zwracaniem
- losowanie bez zwracania.

*****************plik:kombinacje**********************************

Odpowiedź: Kombinacje

Przykład

Z urny, w której znajduje się 10 kul: 5 białych, 3 niebieskie i 2 czerwone, losujemy jednocześnie 4 kule. Na ile sposobów możemy wylosować:

a) kule tego samego koloru

b) dwie kule białe i dwie kule niebieskie

c) dwie kule czerwone lub dwie kule niebieskie.

Rozwiązanie

a) Aby kule były tego samego koloru muszą być białe. Zatem obliczamy liczbę kombinacji 4-elementowych ze zbioru 5-elementowego:

$$C_5^4 = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right) = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = 5.$$

Odpowiedź: jest 5 sposobów tego losowania.

b) Losujemy 2 kule białe spośród pięciu białych i 2 niebieskie spośród 3.

• Losujemy 2 kul białe z 5:

$$C_5^2$$

• Przy każdym losowaniu kul białych losujemy 2 kule niebieskie C_3^2, co przedstawia iloczyn:

$$C_5^2 \cdot C_3^2 = \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 30.$$

Odpowiedź: kule te możemy wylosować na 30 sposobów.

c) Losujemy:

• dwie kule czerwone spośród dwóch czerwonych i 2 kule z pozostałych 8 białych i niebieskich: $C_2^2 \cdot C_8^2 = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array} \right)$

lub

• 2 kule niebieskie spośród 3 niebieskich i 2 kule z pozostałych 7 białych i czerwonych: $C_3^2 \cdot C_7^2 = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right)$.

Zatem

$$C_2^2 \cdot C_8^2 + C_3^2 \cdot C_7^2 = \left(\begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 8 \\ 2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array} \right) = 91.$$

Odpowiedź: kule te można wylosować na 91 sposobów.

Uwaga
Jeżeli obliczając liczbę możliwych wyników pewnego zdarzenia, w toku rozumowania używamy spójnika "i", to w obliczeniach wykonujemy mnożenie, jeżeli spójnika "lub", to w obliczeniach wykonujemy dodawanie.

Przykład

Aby otworzyć furtkę, należy na klawiaturze wybrać czterocyfrowy kod. Syn właściciela posesji zapomniał kodu, ale zapamiętał, że pierwsza i czwarta cyfra kodu jest parzysta, a suma dwóch środkowych cyfr jest równa 6. Oblicz, ile co najwyżej razy będzie musiał wpisać kod syn, aby otworzyć furtkę.

Rozwiązanie

Pierwsza i czwarta cyfra kodu jest parzysta, czyli jest jedną z cyfr ze zbioru $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.
Zatem:
C_5^1 - liczba sposobów wyboru pierwszej cyfry kodu,
C_5^1 - liczba sposobów wyboru czwartej cyfry kodu (cyfry w kodzie mogą się powtarzać).
Ponieważ suma środkowych cyfr jest równa 6, to mamy do wyboru 5 możliwości:
(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1).
Zatem korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy, że liczba wszystkich możliwych kodów jest równa:
$C_5^1 \cdot 5 \cdot C_5^1 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Odpowiedź: syn wprowadzi kod co najwyżej 125 razy.

Podsumowanie

***************************plik:Algorytm******************************

Zadania

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych zapisanych wyłącznie za pomocą liczb ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$.

Odpowiedź: 10392

Zadanie 2. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy parzyste?

Odpowiedź: 2125

Zadanie 3. Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 15 lub 20?

Odpowiedź: 9

Zadanie 4.
***********************plik:zad8******************************

Odpowiedź: 30

Test końcowy

Zadanie 1.

*******************plik:zad1***********************

Odpowiedź: D

Zadanie 2.
****************plik:zad2************************

Odpowiedź: D

Zadanie 3.
****************plik:zad3************************

Odpowiedź: B

Zadanie 4.
****************plik:zad4************************

Odpowiedź: B

Zadanie 5.

****************plik:zad9************************

Odpowiedź: C

Zadanie 6.
****************plik:zad10***********************

Odpowiedź: A

LITERATURA

1. Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników. Klasa III, OE-Krzysztof Pazdro Spółka z O.O., Warszawa 2007.

2. Piekarz M., Piekarz A., Kukla A., Projekt: matura. Matematyka, WZS, Kraków 2011.

3. $http : //gwo.pl/menus/view/2063/seo_link : rebusy/page_id : 2271$