Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E-learning – matematyka – poziom podstawowy

Temat: Funkcje trygonometryczne

Materiały merytoryczne do kursu

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

1 Wstęp

Funkcje trygonometryczne należą do tematów, uważanych przez wielu uczniów za trudne, niezrozumiałe, zagmatwane... W ich opinii są one takie “inne”. Niestety, trzeba im przyznać rację. Pierwszą zasadniczą różnicą tych funkcji od innych poznawanych w szkole jest ich okresowość, a drugą - duża liczba ciekawych zależności między nimi, czyli tzw. tożsamości trygonometrycznych. Ta druga własność sprawia, że zadania z trygonometrii sprawiają kłopoty - trzeba trochę wprawy, żeby wiedzieć jaki wzór pasuje do danego zadania. Mamy nadzieję, że po lekturze tego opracowania i wspólnej pracy czytelnik lub czytelniczka ową “wprawę” będzie posiadać.

2 Historia funkcji trygonometrycznych

Pierwszy odpowiednik funkcji trygonometrycznych prawdopodobnie pojawił się w starożytnej Grecji, a była to cięciwa, odpowiadająca danemu łukowi. Dla danego okręgu i jego części (łuku) cięciwa jest prostą, która przecina okrąg na końcach łuku. Dla tej funkcji stworzono pierwsze tabele wartości (II wiek p.n.e.), z których korzystali astronomowie. Wiele z twierdzeń trygonometrycznych było znanych starożytnym Grekom, jednak w postaci odpowiedników operujących długościami łuków i cięciw, a nie miarami kątów i stosunkami długości boków trójkąta.

W okresie V – XII w.n.e. indyjscy matematycy i astronomowie zamiast pełnej cięciwy wprowadzili jej połowę, co odpowiada współczesnej definicji sinusa. Symetralna odcinka cięciwy mieszczącego się wewnątrz koła przechodzi przez jego środek i dzieli łuk (i tym samym kąt) na pół. Połowa długości cięciwy to dla okręgu jednostkowego sinus połowy kąta, czyli

$$\operatorname{crd} \theta = 2 \sin \tfrac{\theta}{2}.$$

Następnie Abu al-Wafa (940 - 998) - perski matematyk i astronom zdefiniował funkcje trygonometryczne *tangens*, *cotangens*, *secans* i *cosecans*, korzystając z koła trygonometrycznego. Poza tym zasłynął on opracowaniem matematycznych, 8-cyfrowych tablic sinusów i tangensów oraz odkryciem nierównomierności w ruchach Księżyca.

Współczesne nazwy tych funkcji były wprowadzone przez różnych europejskich matematyków w okresie XV – XVII w. Na przykład nazwę "*tangens*" (z lac. "styczna") wprowadził niemiecki astronom i matematyk XV wieku Johann Muller (1436 – 1476) z Koenigsbergu (Dolna Frankonia), znany pod zlatynizowanym nazwiskiem Regiomontana (Joannes de Regio Monte). Około 1464r. powstało jego największe dzieło matematyczne "De triangulis omnimodis libri quinque" ("O trójkątach wszelkiego rodzaju ksiąg pięcioro"); w druku ukazało się w Norymberdze dopiero w r. 1533. Korzystając z dorobku matematyków greckich (Ptolemeusz) i arabskich Regiomontan podał w nim (z wieloma dopełnieniami, własnymi dowodami i metodycznymi ulepszeniami) systematyczny wykład trygonometrii płaskiej (księgi I – IV) i sferycznej (księga V). Dyscyplina stanowiąca nieuporządkowany zbiór reguł, twierdzeń i tablic do celów astronomicznych stała się odtąd dyscypliną całkowicie samodzielną, niezależną od astronomii. W tej nowej postaci, którą nadał jej Regiomontan, trygonometria przetrwała w zasadzie bez zmian do wieku XVIII. Jedynymi funkcjami trygonometrycznymi, jakich używał Regiomontan w swym głównym dziele, były *sinus* i *cosinus*. Dopiero później ułożył on tablicę tangensów. Ciekawym jest także fakt, że Regiomontan kilkakrotnie spotkał się z Marcinem Bylicą z Olkusza, wybitnym przedstawicielem krakowskiej szkoły astrologicznej.

W XVI w. duński matematyk Thomas Fincke (1561 – 1656) w swojej najważniejszej książce "Geometriae rotundi" (1583) wprowadził nazwy funkcji trygonometrycznych *tangens* i *sekans*. Poza tym to właśnie dzięki temu uczonemu mężowi korzystamy obecnie ze skrótowych nazw funkcji trygonometrycznych, pisząc sin zamiast *sinus*, a w miejsce *tangensa* - tg ... Nazwy funkcji *cosinus* i *cotangens* (z lac. complementum - uzupelnienie) wprowadził znany angielski astronom i matematyk Edmund Gunter (1581 – 1626).

Można pokusić się o stwierdzenie, że największy wkład w rozwój współczesnej teorii funkcji trygonometrycznych miał wybitny szwajcarski matematyk Euler. Dzięki swoim licznym i szeroko rozpowszechnionym podręcznikom, zainicjował i spopularyzował on kilka konwencji zapisu; w szczególności, wprowadził pojęcie funkcji oraz jako pierwszy zastosował zapis $f(x)$ dla oznaczenia funkcji f argumentu x. Był też autorem nowoczesnego oznaczania funkcji trygonometrycznych, litery e jako podstawy logarytmu naturalnego (obecnie znanej także jako liczba Eulera), zastosowania greckiej litery Σ dla oznaczania sumy oraz litery i do wyrażenia jednostki urojonej ($i^2 = -1$). Użycie greckiej litery π dla oznaczenia stosunku obwodu okręgu do jego średnicy nie było wprawdzie jego autorstwa, ale zostało przez niego rozpropagowane.

Jeden z najbardziej znanych wzorów matematycznych, noszących imię Eulera, ma postać

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

gdzie x $\in \mathbb{R}$, zaś i jest jednostką urojoną. Jest to bardzo ważny wzór matematyczny z teorii funkcji zespolonych, łączący w zaskakujący sposób funkcje trygonometryczne z wykładniczą. Zamieszczony wzór pojawił się w tym historycznym wprowadzeniu bardzo "na wyrost", ale możecie mieć pewność, że jeżeli wybierzecie się na studia wyższe o kierunkach ścisłych, na pewno poznacie go bliżej i będziecie wykorzystywali na różnych przedmiotach.

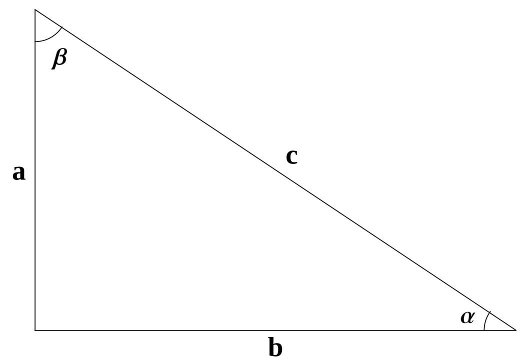
Tyle z historii, a teraz - do dzieła!

3 Pojęcia wstępne

Zacznijmy klasycznie - od wprowadzenia funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym, następnie zamieścimy podstawowe definicje i twierdzenia, niezbędne do przedstawienia tematu. Aby Cię nie zanudzić, jak zwykle do teorii dodamy przykłady - zarówno rozwiązane, tak i do samodzielnej pracy.

3.1 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

α, β – kąty ostre w trójkącie prostokątnym;
c – przeciwprostokątna;
a – przyprostokątna przeciwległa kątowi α, (przyległa β);
b – przyprostokątna przeciwległa kątowi β, (przyległa α).



Rysunek 1: Wprowadzenie funkcji $\cos x$, $\sin x$ w trójkącie prostokątnym.

Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu katowi do długości przeciwprostokatnej:

$$\sin\,\alpha = \frac{a}{c}.$$

Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości przeciwprostokątnej:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej temu kątowi do długości drugiej przyprostokątnej:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

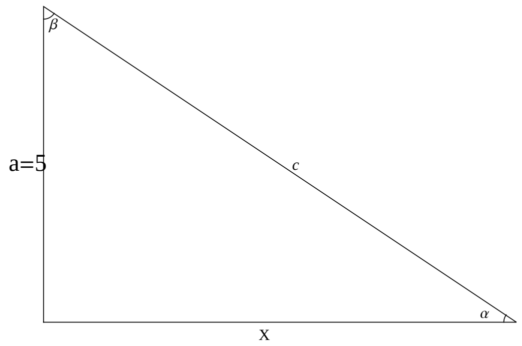
Cotangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do tego kąta do długości drugiej przyprostokątnej:

$$\operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\,\alpha}.$$

Przykład 3.1. Tangens kąta ostrego trójkąta prostokątnego wynosi $\frac{2}{3}$, a długość przyprostokątnej, leżącej naprzeciw tego kąta, wynosi 5. Oblicz długość drugiej przyprostokątnej.

Rozwiązanie To zadanie łatwiej będzie rozwiązać, jeżeli sporządzimy rysunek pomocniczy:



Rysunek 2: Rysunek pomocniczy do przykładu 3.1.

Z treści zadania i z rysunku możemy zapisać, że:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{x},$$

stąd:

$$\frac{2}{3} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 5}{2} \Rightarrow x = 7,5.$$

Odpowiedź: Długość drugiej przyprostokątnej wynosi $x = 7,5$.

Przykład 3.2.

Narysuj kąt, tangens którego jest równy 1,5.

Rozwiązanie.

Wystarczy narysować dowolny trójkąt prostokątny, w którym tangens jednego z kątów wynosi $1,5$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{2}{3};$$

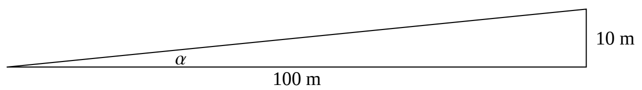
$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 3,\ b = 2.$$

Możemy wybrać dowolne wielkości a i b takie, aby spełniony był warunek $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, (na przykład: $a = 6$ i $b = 4$).

Następnie rysujemy kąt prosty, na jego ramionach zaznaczamy odpowiednie odcinki i łączymy ich końce. W otrzymanym trójkącie prostokątnym szukany kąt leży naprzeciwko boku o długości 3 cm.

Przykład 3.3.

Nachylenie stoków gór, dachów domów, schodów często podawane jest w procentach. Na pewno widzieliście znak drogowy, ostrzegający przed stromym podjazdem - tabliczka na tym znaku wskazuje nachylenie drogi do poziomu, podane w procentach. Na przykład nachylenie wynoszące 15% oznacza, że tangens kąta nachylenia drogi do poziomu wynosi $0,15$.



Rysunek 3: Kąt z nachyleniem 10%

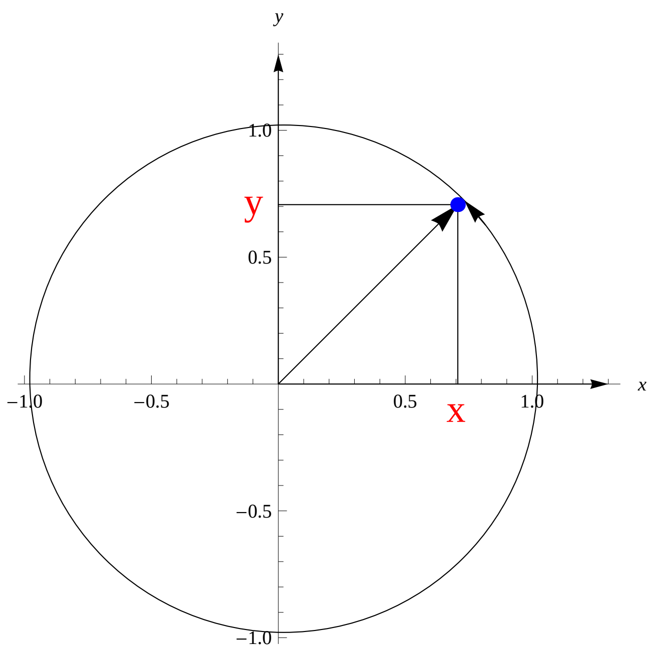
Ćwiczenie.

a) Nachylenie pewnego zbocza wynosi 25%. Narysuj kąt, który odpowiada takiemu nachyleniu.

b) Pod jakim kątem byłoby nachylone zbocze góry, gdyby jego nachylenie wynosiło 100%?

3.2 Wprowadzenie funkcji trygonometrycznych $\sin x$ i $\cos x$ na okręgu

Możemy wprowadzić funkcje trygonometryczne w inny sposób – na okręgu o promieniu $r = 1$ ze środkiem w punkcie o współrzędnych $(0, 0)$. Wyobraźcie punkt, który porusza się tylko po okręgu. Jeżeli punkt porusza się w kierunku, przeciwnym ruchu wskazówek zegara, to kąt mierzony od dodatniego zwrotu osi OX do wektora wodzącego naszego punktu ma znak dodatni, a w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara – ujemny. Współrzędna x punktu da nam wartość $\cos \alpha$, a współrzędna y – wartość $\sin \alpha$.

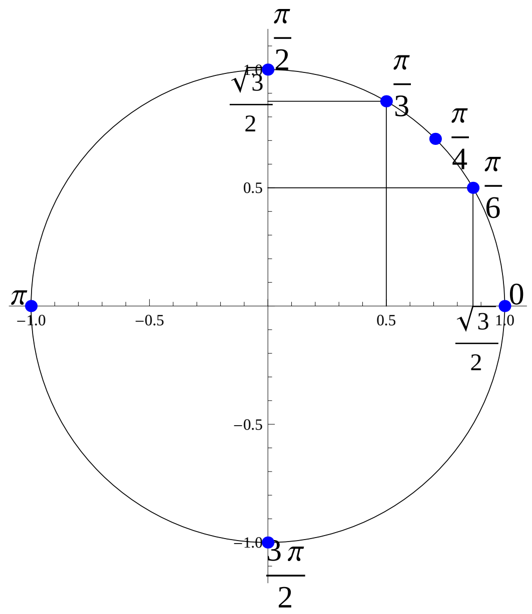


Rysunek 4: Okrąg o promieniu $r = 1$.

Taki sposób wprowadzenia funkcji pozwala na odczytanie z rysunku nie tylko pewnych właściwości funkcji cos α, sin α, a również na łatwiejsze zapamiętanie wartości tych funkcji dla wybranych kątów, często pojawiających się w zadaniach, oraz "wizualizacje" wzorów redukcyjnych. Na kolejnych slajdach pokażemy, jak korzystać z takiego sposobu prezentacji funkcji trygonometrycznych.

3.3 Wartosci funcji trygonometrycznych wybranych argumentów

Korzystając z okręgu o promieniu $r = 1$, odczytamy wartości funkcji $\sin\alpha, \cos\alpha$ wybranych kątów. Odczytane i obliczone wartości zestawimy w tabeli.



Rysunek 5: Okrąg trygonometryczny z zaznaczonymi wartościami $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ dla wybranych kątów.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	360^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	0
$\mathrm{ctg}\, x$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-$	$-$

Pokażemy wam jeszcze krótki sposób zapamiętywania wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów.

Na początek zapamiętajmy zależność pomiędzy miarą łukową a stopniową. Jest ona bardzo łatwa.

Po pierwsze: jeśli weźmiemy okrąg o promieniu 1, to jego obwód wynosi dokładnie 2π.

Po drugie:jak narysujesz w tym okręgu promień, to zobaczysz że masz kąt pełny. Miara stopniowa kąta pełnego to 360°.

Teraz już tylko korzystasz ze znanej proporcjonalności prostej np. dla kąta 30°

$$\begin{aligned} 2\pi &= 360^\circ \\ x &= 30^\circ \end{aligned}$$

Stąd już łatwo wyliczyć, że

$$x = \frac{30^\circ}{360^\circ} 2\pi = \frac{\pi}{6}.$$

Przejdźmy teraz do zapamiętywania

Rysujemy prostą tabelkę wartości następująco:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin x$					
$\cos x$					

w puste miesca stawiam wszędzie kreskę ułamkową

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin x$	—	—	—	—	—
$\cos x$	—	—	—	—	—

Wszędzie w mianowniku piszę liczbę 2:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin x$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$
$\cos x$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{2}$

Wszędzie w liczniku wstawiam znak pierwiastka:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin x$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$	$\frac{\sqrt{}}{2}$

A ponieważ liczyć umiemy, to wpisujemy kolejno liczny 0, 1, 2, 3, 4 dla sinusa i odwrotnie dla kosinusa:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

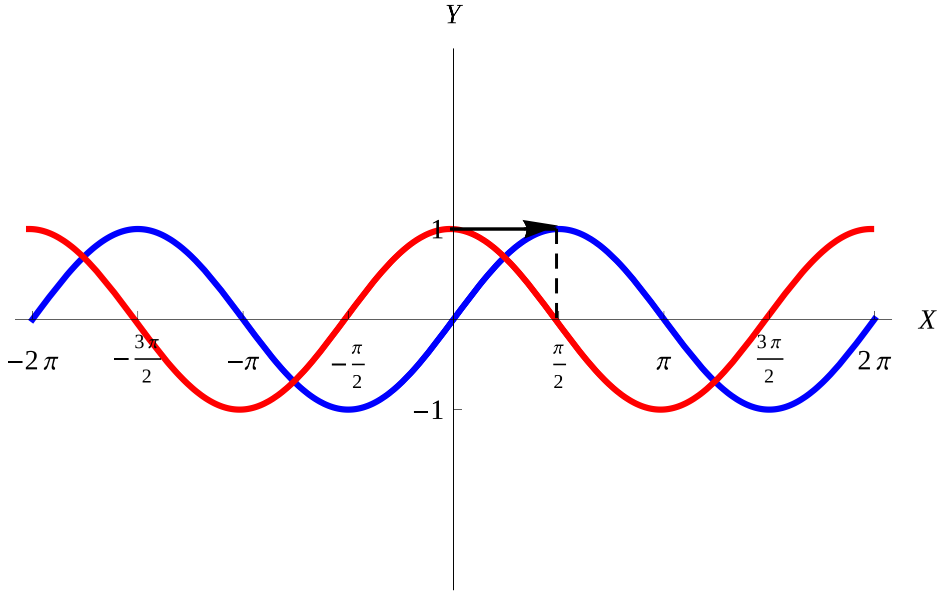
Teraz po skróceniu otrzymamy dobrze znaną nam tabelę wartości funkcji trygonometrycznych wybranych kątów:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Zobaczmy jak powstaje wykres funkcji $\sin x$.
TU WSTAWIĆ PLIK WIDEO image6

I jeszcze inny sposób rysowania wykresu funkcji $\sin x$.
TU WSTAWIĆ PLIK WIDEO image

Teraz bardziej zrozumiałe będą wykresy funkcji trygonometrycznych sin x i cos x.

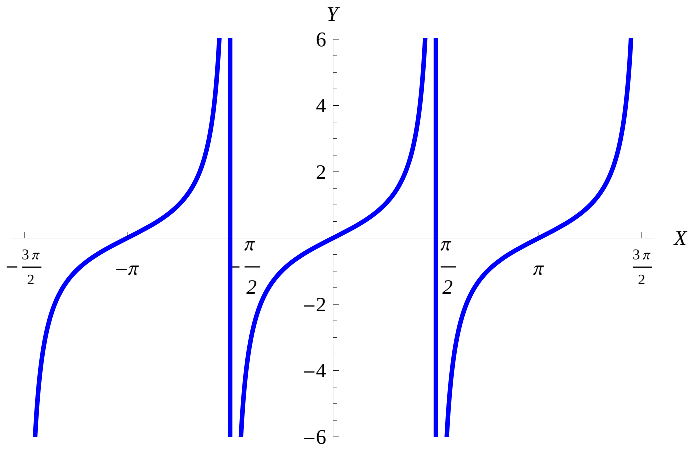


Rysunek 6: Wykresy funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$.

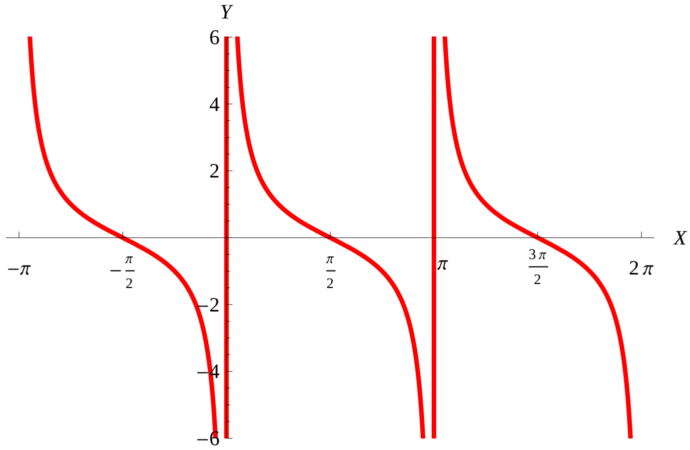
Miejsca, w których wykresy funkcji przecinają oś OX są to miejsca zerowe funkcji $y = \sin x$, $y = \cos x$.
Proszę zwrócić uwagę na zaznaczony wektor, który jest skierowany tak samo, jak dodatni zwrot osi OX, a jego długość wynosi $\frac{\pi}{2}$. Jeżeli przesuniemy o taki wektor wykres funkcji $y = \cos x$, to otrzymamy wykres funkcji $y = \sin x$.

Po przedstawieniu wzorów redukcyjnych proszę wrócić do tego rysunku i zastanowić się, które z nich możemy zilustrować za jego pomocą?

3.4 Definicje i wykresy funkcji $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$



Rysunek 7: Wykres funkcji $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}$.



Rysunek 8: Wykres funkcji $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3.4.

Nie wykonując obliczeń, odpowiedz, która z podanych liczb jest największa, a która najmniejsza:

$$\mathrm{tg}\ 76^0 \quad \mathrm{tg}\ 22^0 \quad \mathrm{tg}\ 27,5^0 \quad \mathrm{tg}\ 1^0 \quad \mathrm{tg}\ 39^0$$

Rozwiązanie.

W pierwszej kolejności trzeba sprawdzić, czy wszystkie podane kąty spełniają warunek:

$$-90^0 < \alpha < 90^0.$$

Następnie uwzględniając, że funkcja $y = \operatorname{tg}\alpha$ w podanym przedziale jest funkcją rosnącą, szeregujemy rosnąco dane nam wartości tangensów:

$$\operatorname{tg} 1^0 \quad \operatorname{tg} 22^0 \quad \operatorname{tg} 27,5^0 \quad \operatorname{tg} 39^0 \quad \operatorname{tg} 76^0$$

Odpowiedź: Najmniejszą liczbą jest tg 1^0,
a największą - tg 76^0.

Ćwiczenia.

a) Tangens pewnego kąta ostrego jest równy 1. Jaką miarę ma ten kąt?

b) Nie wykonując obliczeń, odpowiedz, która z podanych liczb jest większa od 1?

$$\text{tg } 37^0 \quad \text{tg } 46^0 \quad \text{tg } 80^0 \quad \text{tg } 1^0 \quad \text{tg } 89^0$$

c) Który z kątów, α czy β, jest większy, jeśli: $\operatorname{tg}\alpha = 2$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

d) Czy z tego, że tangens pewnego kąta α jest 2 razy większy od tangensa kąta β wynika, że kąt α ma miarę dwa razy większą od miary kąta β? Sporządź odpowiedni rysunek.

e) Skonstruuj kąt α wiedząc, że:

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, 2. $\operatorname{tg}\alpha = 3$, 3. $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{2}{3}$, 4. $\operatorname{tg}\alpha = 0,4$.

3.5 Jedynka trygonometryczna

Jest to jeden z najbardziej znanych wzorów trygonometrycznych, jest prawdziwy dla dowolnej liczby rzeczywistej. Ten wzór jest często wykorzystywany przy rozwiązywaniu równań, nierówności oraz w celu uproszczenia matematycznych wyrażeń, zawierających funkcje trygonometryczne.

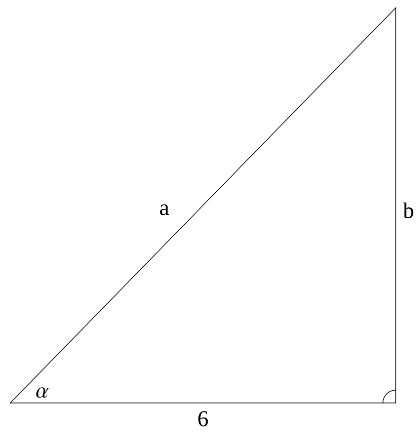
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Przykład 3.5.

W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość 6, a cosinus kąta przy tej przyprostokątnej wynosi $\frac{3}{4}$. Jaką długość ma przeciwprostokątna?

Rozwiązanie.

Sporządźmy rysunek pomocniczy:



Rysunek 9: Rysunek do przykładu 3.5.

$$\cos\alpha = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \frac{6}{a}, \quad \text{stąd}$$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = 8.$

Odpowiedź: $a = 8$

3.6 Okresowość funkcji

Funkcje trygonometryczne są funkcjami okresowymi:

$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$,

$\cos x = \cos(x + 2k\pi)$,

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi)$,

$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + k\pi)$,

gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$

3.7 Funkcje wielokrotności kątów

Najczęściej w zadaniach wykorzystywane są wzory kąta podwójnego, te wzory należy znać na pamięć, resztę wzorów załączyliśmy poglądowo. Wystarczy je kojarzyć i w razie potrzeby sięgnąć do tablic matematycznych.

$\sin(2\,x) = 2\sin x\ \cos x$
$\cos(2\,x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
$\mathrm{tg}(2\,x) = 2\ \mathrm{tg}\, x\,/(1 - \mathrm{tg}^2\, x)$
$\mathrm{ctg}(2\,x) = (\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x)/2 = (\mathrm{ctg}^2\, x - 1)/(2\,\mathrm{ctg}\, x)$

$\sin(3\,x) = 3\ \sin x - 4\sin^3 x$
$\cos(3\,x) = 4\ \cos^3 x - 3\cos x$
$\mathrm{tg}(3\,x) = (3\ \mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}^3\, x)/(1 - 3\ \mathrm{tg}^2\, x)$
$\mathrm{ctg}(3\,x) = (\mathrm{ctg}^3\, x - 3\ \mathrm{ctg}\, x)/\ (3\ \mathrm{ctg}^2\, x - 1)$

$\sin(4\,x) = 8\ \cos^3 x\ \sin x - 4\ \cos x\ \sin x$
$\cos(4\,x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x\ +\ 1$
$\mathrm{tg}(4\,x) = (4\ \mathrm{tg}\, x - 4\ \mathrm{tg}^3\, x)/(1 - 6\ \mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}^4\, x)$
$\mathrm{ctg}(4\,x) = (\mathrm{ctg}^4\, x - 6\ \mathrm{ctg}^2\, x\ +\ 1)/(4\ \mathrm{ctg}^3\, x\ -\ 4\ \mathrm{ctg}\, x)$

3.8 Wzory redukcyjne

Zestawienie wzorów redukcyjnych przedstawmy w postaci tabeli.

$\sin x$	$\cos x$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$
$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$

Pierwsze 2 wzory jednocześnie mówią nam o nieparzystości funkcji $\sin x$ i parzystości $\cos x$.

A teraz przedstawimy podobną tabele ze wzorami redukcyjnymi dla funkcji $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$.

$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Tak dużo tych wzorów, że aż w głowie się kręci... Chyba jednak jest za co nie lubić funkcji trygonometrycznych! Ale proszę się nie martwić, jak już wspominaliśmy - wszystkich wzorów nie trzeba znać na pamięć, ważne jest pamiętać podstawowe, potrafić rozwiązywać proste równania, zawierające funkcje trygonometryczne i poznać podstawowe sposoby postępowania przy rozwiązywaniu zadań z trygonometrii.

3.9 Funkcje sumy i różnicy kątów

$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y,$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y,$

$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y},$

$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$

4 Zadania do tematu

W tym rozdziale zamieścimy zadania rozwiązane i do samodzielnej pracy. Na początku, jak zwykle, zadania będą łatwe, a w miarę zdobycia doświadczenia pojawią się trudniejsze. Jeżeli będziecie mieli jakiekolwiek problemy ze zrozumieniem któregoś, warto do niego wrócić po jakimś czasie i spróbować rozwiązać samodzielnie.

A teraz - do dzieła!

Przykład 4.1.

Określić, jaki znak ma:

a) $\sin\, 179^{\,0}$; b) $\cos\, 280^{\,0}$; c) $\mathrm{tg}\, 145^{\,0}$; d) $\mathrm{ctg}\, 288^{\,0}$;
e) $\cos\, 410^{\,0}$; f) $\mathrm{tg}\, 500^{\,0}$; g) $\sin\,(-75^{\,0})$; h) $\cos\,(-116^{\,0})$.

Rozwiązanie.

a) Kąt 179^{0} znajduje się w II ćwiartce, ponieważ jest on większy od kąta 90^{0} i mniejszy od 180^{0}. Wiadomo, że sinusy kątów, leżących w II ćwiartce, są większe od 0.

Odpowiedź: $\sin 179^{0} > 0$;

c) Kąt 145^{0} znajduje się w II ćwiartce, ponieważ jest on większy od kąta 90^{0} i mniejszy od 180^{0}. Wiadomo, że tangensy kątów, leżących w II ćwiartce, są mniejsze od 0.

Odpowiedź: $\mathrm{tg}\ 145^{0} < 0$;

e) Funkcja cos α jest funkcją okresową:

$$\cos(\alpha + k\,360^{\,0}) = \cos\,\alpha, k \in \mathbb{Z}.$$

Stąd

$$\cos\,410^{\,0} = \cos(50^{\,0} + 360^{\,0}) = \cos\,50^{\,0}.$$

Kąt $50^{\,0}$ znajduje się w I ćwiartce, ponieważ jest on większy od kąta $0^{\,0}$ i mniejszy od $90^{\,0}$. Wiadomo, że cosinusy kątów, leżących w I ćwiartce, są większe od 0.

Odpowiedź: $\cos\,410^{\,0} > 0$;

f) Rozwiązując ten przykład, proszę przypomnieć sobie, ile wynosi okres funkcji tg α.

Resztę przykładów proszę rozwiązać samodzielnie.

Przykład 4.2.

Obliczyć:

a) $\sin\ 390^{\,0}$; b) $\cos\ 420^{\,0}$; c) $\operatorname{tg}\ 540^{\,0}$; d) $\operatorname{ctg}\ 450^{\,0}$.

Rozwiązanie.

a) Uwzględniając okresowość funkcji sin α, odejmijmy od argumentu pełny obrót, czyli $360^{\,0}$:

$$\sin\, 390^{\,0} = \sin\,(390^{\,0} - 360^{\,0}) = \sin\, 30^{\,0} = \frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $\sin\, 390^{\,0} = \frac{1}{2}$.

Z resztą zadań poradzicie sobie bez problemu, ale jeszcze raz przypominamy: sprawdźcie okresowość funkcji tg α, ctg α.

Przykład 4.3.

Wyznaczyć:

a) $\sin\left(-30^{\,0}\right)$; b) $\cos\left(-60^{\,0}\right)$; c) $\mathrm{tg}\left(-45^{\,0}\right)$; d) $\mathrm{ctg}\left(-30^{\,0}\right)$.

Rozwiązanie.

a) Funkcja sin α jest funkcją nieparzystą, czyli

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Stąd:

$$\sin(-30^{\,0}) = -\sin 30^{\,0} = -\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $\sin(-30^{\,0}) = -\frac{1}{2}$.

Resztę zadań proszę rozwiązać samodzielnie.

Przykład 4.4.

Obliczyć:

a) $\sin(-720^{\,0})$; b) $\cos(-405^{\,0})$; c) $\cos(-780^{\,0})$; d) $\operatorname{ctg}(-1110^{\,0})$.

Rozwiązanie.

W tym zadaniu trzeba jednocześnie uwzględnić okresowość i parzystość/nieparzystość funkcji trygonometrycznych. Dla przykładu a) wygląda to następująco:

$$\sin(-720^{\,0}) = -\sin 720^{\,0} = -\sin(2\cdot 360^{\,0}+0^{\,0}) = -\sin 0^{\,0} = 0.$$

Odpowiedź: $\sin(-720^{\,0}) = 0$.

Z resztą zadań na pewno poradzicie sobie samodzielnie.

Przykład 4.5.

Określić znak iloczynów:

a) $\sin\, 130^{\,0} \cdot \cos\,(-15^{\,0}) \cdot \mathrm{tg}\,(-100^{\,0})$;
b) $\sin\, 8 \cdot \cos\, 0,2 \cdot \mathrm{tg}\,(-6,2)$.

Rozwiązanie.

Po wcześniej rozwiązanych przykładach nie powinniście mieć najmniejszych problemów z tymi zadaniami.

Przypuszczamy, że z zadaniem a) w tym przykładzie poradziliście bez problemu. Zadanie b) mogło przysporzyć niektórym osobom trudności ze względu na to, że argumenty funkcji trygonometrycznych nie są wyrażone w stopniach, a są zapisane w radianach! Aby rozwiązać zadanie, trzeba przypomnieć, że $360^{\,0} = 2\pi$, a $\pi \approx 3,14$.

Rozwiążmy ten przykład. Określmy znak każdego wyrażenia w iloczynie, uwzględniając przy tym okresowość i parzystość/nieparzystość funkcji:

$$\sin 8 \approx \sin(2 \cdot 3,14 + 1,72) \approx \sin 1,72.$$

Znak $\sin 1,72$ jest dodatni, ponieważ kąt 1,72 radianów leży w II ćwiartce:

$$1,57 < 1,72 < 3,14, \; (90^{\,0} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57).$$

$\cos 0,2$ też ma znak dodatni, bo kąt 0,2 radianów leży w I ćwiartce:

$$0 < 0,2 < 1,57.$$

Uwzględniając nieparzystość tangensa:

$$\operatorname{tg}(-6,2) = -\operatorname{tg} 6,2.$$

Kąt 6,2 radianów należy do IV ćwiartki:

$$4,71 < 6,2 < 6,28, \; (270^{\,0} = \frac{3\pi}{2} \approx 4,71),$$

tangens w IV ćwiartce ma znak ujemny, stąd $\operatorname{tg}(-6,2)$ ma znak dodatni.

Ze względu na to, że wszystkie trzy czynniki danego iloczynu mają znak dodatni, iloczyn też będzie miał znak dodatni.

Odpowiedź: $\sin 8 \cdot \cos 0,2 \cdot \operatorname{tg}(-6,2) > 0$.

Proszę zwrócić szczególną uwagę na powyższe zadanie ze względu na częste problemy z określeniem kątów w radianach, a jak widzicie,– “nie taki diabeł straszny, jak go malują...”

Mamy nadzieję, że dotychczasowe zadania były na tyle proste, że nie zniechęciły was do dalszej pracy. Przejdźmy do kolejnych.

Przykład 4.6.

Sprawdzić, czy dla danego kąta α wartości $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ mogą jednocześnie przyjmować wartości:

a) $\sin\alpha = 0,4$; $\cos\alpha = -0,7$;
b) $\sin\alpha = -0,1$; $\cos\alpha = 0,3$.

Rozwiązanie.

To proste zadanie należy rozwiązać, korzystając ze wzoru:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Przykład 4.7.

Obliczyć wartości wyrażeń dla $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

a) $3\sin\left(2\,\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(3\,\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;
b) $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha + \pi\right) - 2\,\mathrm{tg}\left(-\alpha\right)$.

Rozwiązanie.

a) Podstawmy $\alpha = \frac{\pi}{4}$ w dane wyrażenie. Skorzystajmy ze wzorów redukcyjnych dla sinusa, a dla cosinusa po prostu obliczmy wartość argumentu:

$$3\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(3\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Odpowiedź: a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Przykład 4.8.

Obliczyć wartości trzech pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeżeli dane jest:

a) kąt znajduje się w II ćwiartce i jego $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$;
b) kąt znajduje się w III ćwiartce i jego $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

Rozwiązanie.

a) W II ćwiartce sinus kąta jest dodatni. Stąd wyznaczamy wartość sinusa, korzystając ze wzoru na jedynkę trygonometryczną, stawiąc przed pierwiastkiem kwadratowym znak “+”:

$$\sin\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Wartość tangensa wyznaczymy z definicji:

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Kotangens jest odwrotnością tangensa:

$$\mathrm{ctg}\ \alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\ \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

Odpowiedź: a) $\sin\ \alpha = \frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\ \alpha = -\frac{3}{4}$, $\mathrm{ctg}\ \alpha = -\frac{4}{3}$.

Przykład 4.9.

Obliczyć wartość wyrażenia:

a) $\frac{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

b) $\frac{\sin^2\alpha-4\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie.

Pewnie bez problemu rozwiązaliście przykład a).

Przykładowi b) poświęcimy trochę więcej uwagi. Najłatwiejszym sposobem rozwiązania tego zadania jest podzielenie licznika i mianownika danego ułamka przez $\cos^2\alpha$, w wyniku czego w wyrażeniu pojawią się tangensy:

$$\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - 4}{2\operatorname{tg}^2\alpha + 3} = \frac{\frac{9}{16} - 4}{\frac{18}{16} + 3} = \frac{9 - 64}{18 + 48} = -\frac{55}{66} - \frac{5}{6}.$$

Ten sposób warto dobrze zapamiętać, ponieważ jest on często wykorzystywany przy rozwiązywaniu równań trygonometrycznych.

Odpowiedź: b)$-\frac{55}{66} - \frac{5}{6}$.

Przykład 4.10.

Uprościć wyrażenia:

a) $\cos^4\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+\sin^2\alpha$;

b) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}$;

c) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

Rozwiązanie.

Rozwiążmy przykład a). Dokonajmy prostych przekształceń:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Podstawiając do przekształcanego wyrażenia, otrzymujemy:

$$\cos^4 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Odpowiedź: a) 1; b) $\operatorname{tg}^6 \alpha$; c) $-(\cos \alpha + \sin \alpha)$.

Przykład 4.11.

Obliczyć:

a) $\cos\,79^0 \cdot \cos\,34^0 + \sin\,79^0 \cdot \sin\,34^0$;

b) $\frac{2\sin\,170^0+\cos\,40^0}{\cos\,130^0}$;

c) $4\sin\,25^0 \cdot \sin\,35^0 \cdot \sin\,85^0$;

d) $\mathrm{ctg}\,70^0 \cdot \mathrm{ctg}\,50^0 \cdot \mathrm{ctg}\,10^0$.

Rozwiązanie.

a) Dane wyrażenie jest prawą stroną wzoru na różnicę kosinusów dwóch kątów:

$$\cos 79^0 \cdot \cos 34^0 + \sin 79^0 \cdot \sin 34^0 =$$
$$= \cos(79^0 - 34^0) = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Po wielokrotnym zastosowaniu wzorów na przedstawienie iloczynu funkcji trygonometrycznych w postaci sumy oraz wzorów redukcyjnych, otrzymujemy:

$$4\sin 25^0 \cdot \sin 35^0 \cdot \sin 85^0 =$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{2}(\cos 10^0 - \cos 60^0) \cdot \sin 85^0 =$$
$$= 2\cos 10^0 \cdot \sin 85^0 - \sin 85^0 =$$
$$= \sin(85^0 - 10^0) + \sin(85^0 + 10^0) - \sin 85^0 =$$
$$= \sin 75^0 + \sin 95^0 - \sin 85^0 =$$
$$= \sin 75^0 = \cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) =$$
$$= \cos 45^0 \cdot \cos 30^0 + \sin 45^0 \cdot \sin 30^0 =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Odpowiedź: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; d) $\sqrt{3}$.

Przykład 4.12.

Udowodnić tożsamość:

a) $\frac{1+\operatorname{tg}\,\alpha}{1-\operatorname{tg}\,\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);$

b) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\,\alpha\,\cos\,\beta} = \operatorname{tg}\,\alpha + \operatorname{tg}\,\beta;$

c) $\sin\,\alpha + \sin\,\beta + \sin\,\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$
$\alpha+\beta+\gamma=\pi; \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma > 0.$

Rozwiązanie.

Mamy nadzieję, że nie przestraszyliście się czasownika "udowodnić" w treści zadania. Ogólna uwaga, dotycząca rozwiązywania takiego typu zadań, jest następująca: przed rozpoczęciem zadania przeanalizujcie, przekształcenie której ze stron tożsamości do postaci drugiej jest łatwiejsze! Czasami korzystniejsze jest przekształcenie prawej strony i sprowadzenie jej do wyrażenia, znajdującego się po lewej stronie.

Wspólnie rozwiążemy tylko trudniejsze zadanie c).

c) Zacznijmy od przekształcenia sumy dwóch pierwszych sinusów po lewej stronie:

$$\sin\,\alpha + \sin\,\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

(po zastosowaniu wzorów redukcyjnych mamy)

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Do przekształcenia $\sin\,\gamma$ zastosujemy wzory na sinus podwójnego argumentu:

$$\sin\,\gamma = 2\sin\,\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin\,\alpha + \sin\,\beta + \sin\,\gamma = 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\,\frac{\gamma}{2}\right).$$

Rozpatrzmy osobno wyrażenie w nawiasach i przekształćmy go do postaci iloczynowej. Zacznijmy od zastosowania wzorów redukcyjnych, przekształcając sinus w kosinus:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\,\frac{\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta+\pi+\gamma}{4}\,\cos\,\frac{\alpha-\beta-\pi+\gamma}{4} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Podstawiając otrzymane wyrażenie w miejsce nawiasu, otrzymamy pożądany wynik.

5 Równania trygonometryczne

Niestety, ten temat też nie należy do lubianych przez uczniów. Problemy w rozwiązywaniu równań trygonometrycznych wynikają z braku konkretnego schematu, który możemy zastosować do wszystkich równań. Sukces w dużej mierze zależy od znajomości wzorów trygonometrycznych, poznaniu często stosowanych przekształceń, ale i tak najważniejsze jest doświadczenie. Zacznijmy więc od rozwiązywania najłatwiejszych przykładów. Mimo łatwości trzeba dobrze zrozumieć, w jaki sposób wyznaczamy rozwiązania równań trygonometrycznych różnego typu, tym bardziej że program matematyki w liceum nie obejmuje odwrotnych funkcji trygonometrycznych:

$$\operatorname{arc\,cos} x,\ \operatorname{arc\,sin} x,\ \operatorname{arc\,tg} x,\ \operatorname{arc\,ctg} x,$$

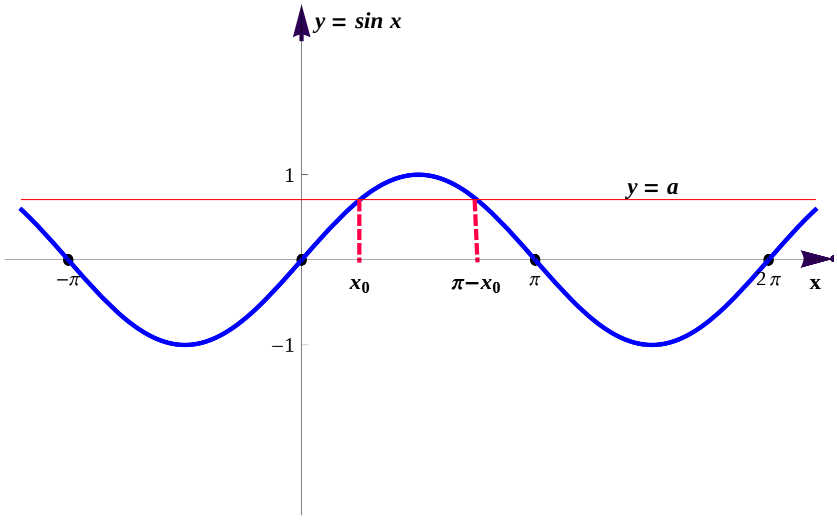
które są bardzo pomocne w zapisywaniu rozwiązań równań trygonometrycznych. Ale cóż – będziemy szukali innych sposobów.

Ze względu na to, że w czasie rozwiązywania równań trygonometrycznych dążymy do sprowadzenia tych równań do najprostszej postaci, trzeba dobrze wiedzieć, jakie są rozwiązania najprostszych równań. Aby ułatwić zrozumienie, zamieścimy odpowiednie rysunki.

5.1 Ogólne rozwiązanie równania $\sin x = a$

Zacznijmy od rozwiązania równania

$$\sin x = a, \quad |a| \leqslant 1.$$



Rysunek 10: Wizualizacja pierwiastków równania $\sin x = a$.

Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (co wynika z okresowości funkcji), zapisujemy je w taki sposób:

$x_1 = x_0 + 2k\pi,$
$x_2 = \pi - x_0 + 2k\pi,$

lub łącząc obydwa wzory w jeden:

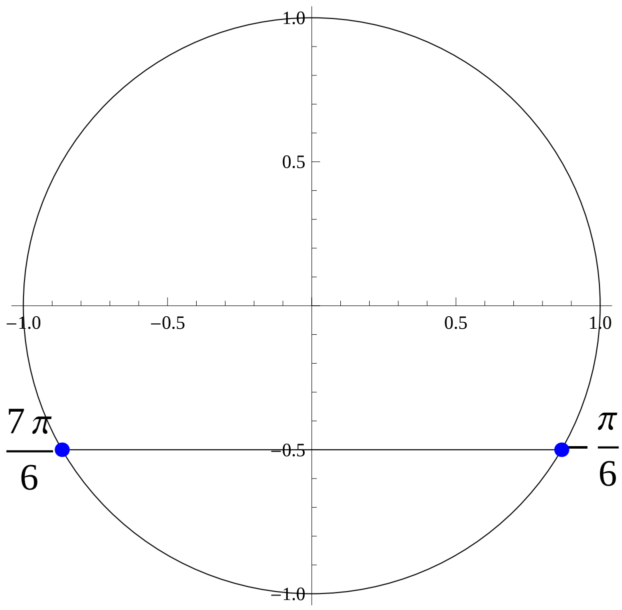
$x = (-1)^k x_0 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2...$

Przykład 5.1.

Rozwiązać równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie.

Na tym przykładzie przedstawimy jeszcze jeden sposób wizualizacji rozwiązań równań typu $\sin x = a$. Wykorzystamy do tego koło trygonometryczne. Sinus przyjmuje wartości ujemne dla kątów, leżących w III i IV ćwiartkach.



Rysunek 11: Wizualizacja przykładu 5.1.

Z wykresu odczytujemy wartości kątów i nie zapominamy o dodaniu do nich krotności okresów 2π - inaczej zgubimy nieskończenie wiele rozwiązań. Zapisujemy rozwiązania:

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,$
$x_2 = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$

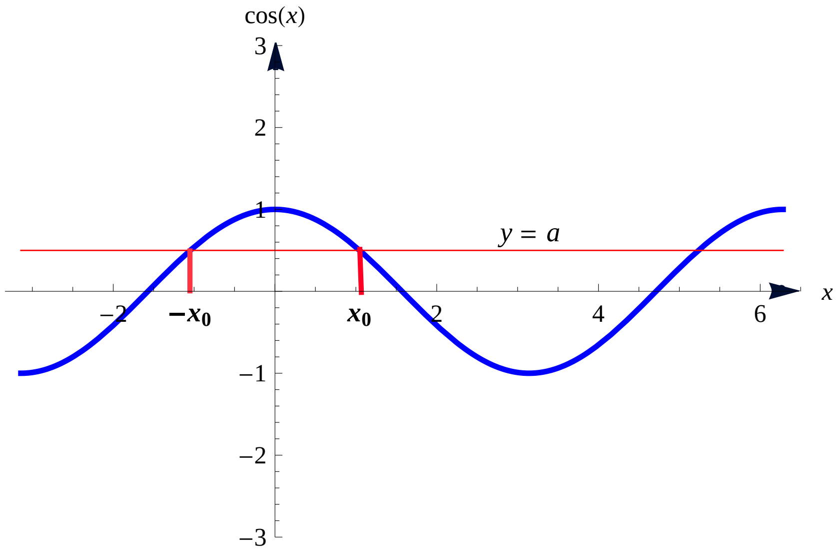
lub łącząc obydwa wzory w jeden:

$x = (-1)^{k+1}x_0 + k\pi, k = 0,\ \pm1,\ \pm2...$

5.2 Ogólne rozwiązanie równania $\cos x = a$

Teraz rozwiążmy równanie:

$$\cos\, x = a, \quad |a| \leqslant 1.$$



Rysunek 12: Wizualizacja pierwiastków równania $\cos x = a$.

Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (wynika to z okresowości funkcji), zapisujemy je w taki sposób:

$x = \pm x_0 + 2k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

Przykład 5.2.

Wyznaczyć pierwiastki równań: $\cos x = -1; \quad \cos x = 1.$

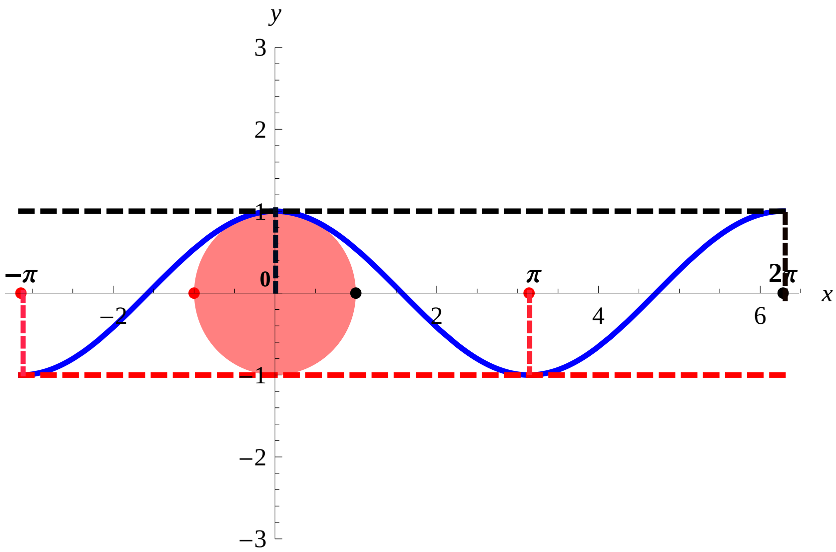
Uwaga: Zaznaczmy że -1 i 1 są to odpowiednio najmniejsza i największa wartość, którą może osiągać funkcja $y = \cos x$, więc treść zadania mogła być taka:

Wyznacz kąty dla których funkcja $y = \cos x$ przyjmuje wartości najmniejsze (największe).

Rozwiązanie.

To zadanie też poprzedzimy przygotowaniem odpowiedniego rysunku. Tym razem na jednym połączymy obydwa sposoby wizualizacji funkcji trygonometrycznych - schemat kołowy i wykres kotangensa.

Na wykresie kołowym szukamy takich punktów, dla których współrzędna $x = -1$ i $x = 1$. Są to punkty wspólne okręgu o promieniu $r = 1$ z osią OX. Punktowi zaznaczonemu na okręgu kolorem czarnym odpowiadają kąty $x = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2...$ i są to rozwiązania równania $\cos x = 1$. Czerwony punkt na okręgu obrazuje rozwiązania równania $\cos x = -1$, są to kąty $x = \pi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2...$

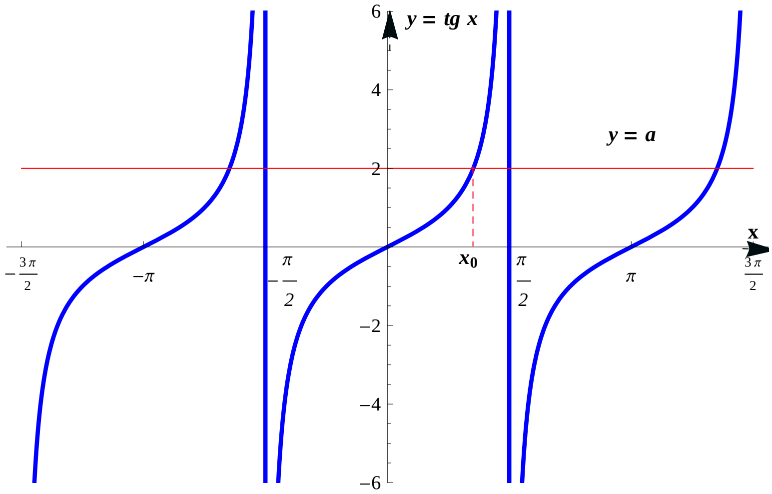


Rysunek 13: Wizualizacja pierwiastków równań: $\cos x = 1$, $\cos x = -1$.

Odpowiedź: $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2...$, $\cos x = -1$, $x = \pi + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2....$

5.3 Ogólne rozwiązanie równania $\operatorname{tg} x = a$

Teraz rozwiążmy równanie: $\operatorname{tg} x = a$. Proszę zwrócić uwagę na brak ograniczeń dla wartości parametru a - może to być dowolna liczba rzeczywista.



Rysunek 14: Wizualizacja rozwiązania równania $\operatorname{tg} x = a$.

Odczytanie z wykresu i zapisanie rozwiązań tego podstawowego równania jest bardzo proste:

$x = x_0 + k\pi$, gdzie $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2...$

Uwaga. Proszę nie zapominać, że okres funkcji
$y = \operatorname{tg} x$ równa się $k\pi$.

Przykład 5.3.

Rozwiązać równanie $\operatorname{tg} x = 1$.

Rozwiązanie.

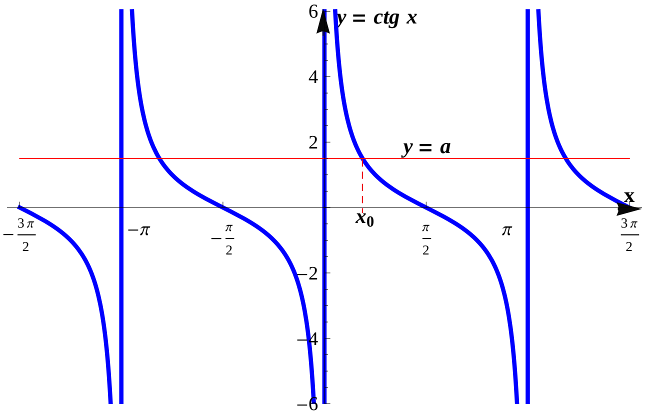
Rozwiązując to równanie możemy odczytać z tablic tangensów wartość kąta, dla którego $\operatorname{tg} x = 1$ i dodać okres πn, jeżeli nie mamy przy sobie tablic, możemy szukać rozwiązanie w taki sposób.

Wiadomo, że $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ponieważ $\operatorname{tg} x = 1$, to $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$, a to z kolei ma miejsce, jeżeli $\sin x = \cos x$. Wiadomo, że ostatnia równość zachodzi dla $x = \frac{\pi}{4}$ (pamiętamy, aby wybrać $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$).

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ k = 0, \pm 1, \pm 2...$

5.4 Ogólne rozwiązanie równania $\operatorname{ctg} x = a$

Teraz rozwiążmy równanie: $\operatorname{ctg} x = a$. Proszę zwrócić uwagę na brak ograniczeń dla wartości parametru a - może to być dowolna liczba rzeczywista.



Rysunek 15: Wizualizacja rozwiązania równania $\operatorname{ctg} x = a$.

Odczytanie z wykresu i zapisanie rozwiązań tego podstawowego równania jest bardzo proste:

$x = x_0 + k\pi$, gdzie $0 < x_0 < \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Przykład 5.4.

Wyznaczyć pierwiastki równania $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Rozwiązanie.

Rozwiązanie tego równania jest bardzo proste - wystarczy w tablicach matematycznych odszukać miarę kąta, cotangens którego równa się $\sqrt{3}$ i zapisać wynik, nie zapominając uwzględnić w odpowiedzi okresowość cotangensa. Od razu podamy

Odpowiedź: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Przykład 5.5.

Rozwiązać równania, sprowadzając je do równania kwadratowego względem wybranej funkcji trygonometrycznej:

a) $1 - \sin^4 x - \frac{5}{3}\cos^4 x = 0.$

b) $\cos x - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} = 1.$

c) $8\,\cos^4 x - \cos\,4x = 1.$

Rozwiązanie.

a) Stosując wzory:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

i wzory skróconego mnożenia,otrzymamy równanie kwadratowe względem $\cos 2x$:

$$4 - (1 - \cos 2x + \cos^2 2x) - \frac{5}{3}(1 + \cos 2x + \cos^2 2x) = 0,$$

po uproszczeniu:

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Po rozwiązaniu równania kwadratowego otrzymujemy:
1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$,
$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$;

2) $\cos 2x = -1$,
$2x = \pi + 2\pi k \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Odpowiedź: $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$;
$x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2...$

b) Stosując wzór:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

i podstawiając go do równania, otrzymamy równanie kwadratowe względem $\sin\frac{x}{2}$.

Dalsze obliczenia są bardzo łatwe, proszę wykonać je samodzielnie.

Odpowiedź: $x_1 = 2k\pi$,
$x_2 = (-1)^{k+1} \cdot \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2...$

c) W tym przykładzie stosując wzory:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos\ 2x), \quad \cos 4x = 2\cos^2 2x - 1,$$

i podstawiając je do równania, otrzymamy:

$$2\left(1 + 2\cos\ 2x + \cos^2 2x\right) - 2\cos^2 2x + 1 = 1,$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Odpowiedź: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

Ćwiczenie.

Rozwiązać równania, sprowadzając je do równania kwadratowego względem wybranej funkcji trygonometrycznej:

a) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

b) $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$.

c) $8\ \cos^4 x = 3 + 5\ \cos\ 4x$.

Odpowiedź: a) $x = \pm\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}k,\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$
b) 1) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, 2) $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,
c) $x = 2k\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2...$

6 Zakończenie

Mamy nadzieję, że po uważnej lekturze i samodzielnej pracy udało się rozwiązać ostatnie w tej prezentacji zadania. Trochę wykraczają one za ramki programu podstawowego, ale zamieściliśmy ich z premedytacją – może spodobają Wam się przekształcenia wzorów trygonometrycznych i główkowanie nad poszukiwaniem rozwiązań, bez wątpienia jest to interesująca łamigłówka. Jeżeli odpowiedź jest twierdząca, to zapraszamy do lektury drugiej części prezentacji, która jest przeznaczona dla osób, które wybrały poziom rozszerzony, bądź po prostu zainteresowali się tym tematem.

A więc do kolejnego spotkania!

Literatura

[1] J. Anusiak, Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum, klasa I, WSiP, Warszawa 1990.

[2] M. Antek, P. Grabowski, Matematyka 1. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym, Nowa Era , Warszawa 2006.

[3] M. Karpiński, M. Dobrowolska, M. Braun, J. Lech, Matematyka I. Podręcznik do liceum i technikum, zakres podstawowy z rozszerzeniem, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2008.

[4] M. Sadowski, Algebra w zadaniach, HARMONIA, Gdańsk 2000.

[5] H. Pawłowski, Matematyka 1. Podręcznik zakres rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.

[6] H. Pawłowski, Matematyka. Zbiór zadań, zakres podstawowy i rozszerzony, OPERON, Gdynia 2005.