



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodziowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

# **KONKURS**

# **„ZOSTAŃ EUKLIDEM”**

## **Klucz odpowiedzi**



## Zadania zamknięte

|         |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Nr zad. | 1.       | 2.       | 3.       | 4.       | 5.       | 6.       | 7.       | 8.       | 9.       | 10       | 11.      | 12.      | 13.      | 14.      | 15.      | 16.      | 17.      | 18.      | 19.      | 20.      |
| Odp     | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>C</b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>C</b> | <b>B</b> | <b>B</b> | <b>B</b> | <b>B</b> | <b>A</b> | <b>C</b> | <b>A</b> | <b>A</b> | <b>C</b> | <b>A</b> | <b>B</b> | <b>A</b> | <b>A</b> | <b>B</b> |

## ZADANIA OTWARTE

### Zadanie 1. – 6 p.

Adam, Bogdan i Cezary pracują jako architekt, bankier i lekarz (niekoniecznie w podanej kolejności). Najstarszy z nich zarabia najwięcej. Cezary zarabia 75% tego, co najstarszy, zaś bankier  $\frac{2}{3}$  tego, co Cezary. Łącznie zarabiają 18 000 zł. Stosunek wieku tych trzech mężczyzn jest równy 2:3:4, a łącznie mają 108 lat. Pan, który jest najmłodszy, nie jest architektem i nie zarabia najmniej. Najstarszy z panów nie ma na imię Adam. Ile zarabia, ile ma lat i w jakim zawodzie pracuje każdy z mężczyzn?

#### Rozwiązanie:

Obliczmy najpierw ile panowie zarabiają. Oznaczmy przez  $x$  pensję najstarszego z nich (z warunków zadania wynika, że jest ona najwyższa). Wtedy Cezary zarabia 75%  $x = \frac{3}{4}x$ , zaś bankier  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x$ . Mamy więc  $x + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 18\ 000$ , a stąd  $x = 8000$ . Najstarszy z panów zarabia więc 8000 zł, Cezary zarabia 6000 zł, zaś bankier zarabia 4000 zł.

Obliczmy teraz, w jakim wieku są panowie. Niech  $4y$  oznacza wiek najstarszego z nich,  $3y$  - wiek „średniego”, zaś  $2y$  - wiek najmłodszego. Wtedy mamy  $4y + 3y + 2y = 108$ , czyli  $y = 12$ . Stąd panowie mają kolejno 48, 36 i 24 lata.

---

Wszystkie informacje można zebrać w tabelce

|           | Adam | Bogdan | Cezary | Architekt | Bankier | Lekarz | 4000 zł | 6000 zł | 8000 zł | 24 lata | 36 lat | 48 lat |
|-----------|------|--------|--------|-----------|---------|--------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| Adam      |      |        |        |           |         |        |         |         |         |         |        | .      |
| Bogdan    |      |        |        |           |         |        |         |         |         |         |        |        |
| Cezary    |      |        |        |           | .       |        | .       | +       | .       |         |        | .      |
| Architekt |      |        |        |           |         |        | .       |         |         | .       |        |        |
| Bankier   |      |        | .      |           |         |        | +       | .       | .       | .       |        | .      |
| Lekarz    |      |        |        |           |         |        |         |         |         |         |        |        |
| 4000 zł   |      |        | .      | .         | +       |        |         |         |         | .       |        | .      |
| 6000 zł   |      |        | +      |           | .       |        |         |         |         |         |        | .      |
| 8000 zł   |      |        | .      |           | .       |        |         |         |         |         |        | +      |
| 24 lata   |      |        |        | .         | .       |        | .       |         |         |         |        |        |
| 36 lat    |      |        |        |           |         |        |         |         |         |         |        |        |
| 48 lat    | .    |        | .      | .         | .       |        | .       | .       | +       |         |        |        |

Analizując te dane można uzupełnić tabelę i otrzymamy wtedy:

Adam ma 36 lat, jest bankierem i zarabia 4000 zł,

Bogdan ma 48 lat, jest architektem i zarabia 8000 zł,

Cezary ma 24 lata, jest lekarzem i zarabia 6000 zł.

**Zadanie 2. – 4 p.**

Od dwóch kawałków stopu o różnej zawartości procentowej miedzi wazących 10 kg (stop I) i 8 kg (stop II) odcięto jednakowe wagowo kawałki. Odcięty kawałek pierwszego stopu stopiono z resztą drugiego stopu, zaś odcięty kawałek drugiego stopu stopiono z resztą pierwszego. Okazało się wówczas, że zawartość procentowa miedzi w obu otrzymanych stopach jest jednakowa. Ile wazyl kazdy z odciętych kawałków?

**Rozwiązanie:**

Oznaczmy przez  $w$  wagę odciętego kawałka ( $w$  *kg*). Niech dalej  $x\%$  oznacza zawartość procentową miedzi w I stopie, zaś  $y\%$  - zawartość procentową miedzi w II stopie. Z warunków zadania mamy, że  $x \neq y$ .

Wtedy zawartość procentowa miedzi w odcięтым kawałku I stopu wynosi  $x\% \cdot w$ , zaś w odcięтым kawałku II stopu wynosi  $y\% \cdot w$ .

Po stopieniu odciętego kawałka I stopu z resztą II stopu otrzymamy stop, w którym procentowa zawartość miedzi będzie wynosić

$$\frac{y\% \cdot (8 - w) + x\% \cdot w}{8},$$

zaś po stopieniu odciętego kawałka II stopu z resztą I stopu otrzymamy stop, w którym procentowa zawartość miedzi będzie wynosić

$$\frac{x\% \cdot (10 - w) + y\% \cdot w}{10}.$$

Za założenia te zawartości procentowe są równe, a więc

$$\frac{y\% \cdot (8 - w) + x\% \cdot w}{8} = \frac{x\% \cdot (10 - w) + y\% \cdot w}{10}.$$

Otrzymujemy stąd

$$40(y - x) = 9w \cdot (y - x).$$

Ponieważ  $x \neq y$ , to możemy podzielić obustronnie przez  $(y - x)$  i otrzymujemy wtedy  $w = \frac{40}{9}$ .

Odcięty kawałek kazdego ze stopów wazyl więc  $\frac{40}{9}$  *kg*.

**Zadanie 3. - 6 p.**

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, a \geq 0$  zachodzi nierówność

$$\frac{a^3 + b^9}{4} \geq 3ab^3 - 16.$$

**Rozwiązanie:**

Zapiszmy nierówność w równoważnej postaci

$$\frac{a^3 + b^9 + 64}{4} \geq 3ab^3$$

i dalej

$$\frac{a^3 + b^9 + 64}{3} \geq 4ab^3.$$

Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb  $a^3, b^9, 64$  otrzymujemy

$$\frac{a^3 + b^9 + 64}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 \cdot b^9 \cdot 64},$$

czyli równoważnie

$$\frac{a^3 + b^9 + 64}{3} \geq 4ab^3,$$

co było do udowodnienia.

**Zadanie 4. - 5 p.**

Niech  $f(x) = \sqrt{x}$ . Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste  $a$  spełniające równanie

$$f(4) + f(f(a^4)) + 16f\left(\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{f(0,01)}.$$

**Rozwiązanie:**

Wykorzystując podany wzór funkcji  $f$  zapisujemy równanie w postaci

$$\sqrt{4} + \sqrt{\sqrt{a^4}} + 16\sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,01}}.$$

Widać, że musi być  $a \neq 0$ .

Przekształcając równanie równoważnie otrzymujemy

$$2 + |a| + 16\frac{1}{|a|} = 10$$

i dalej

$$|a|^2 - 8|a| + 16 = 0,$$

a więc

$$(|a| - 4)^2 = 0,$$

czyli

$$|a| = 4$$

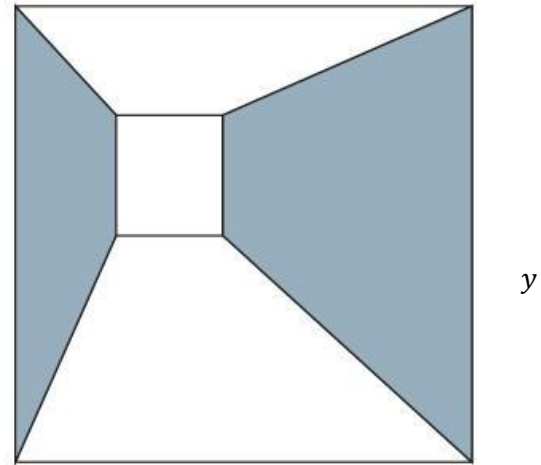
i ostatecznie  $a = 4$  lub  $a = -4$ .

**Zadanie 5. - 4 p.**

Wewnątrz dużego kwadratu umieszczono mały kwadrat (o bokach równoległych do boków dużego kwadratu). Udowodnij, że suma pól zacieniowanych trapezów jest równa sumie pól trapezów niezacieniowanych.

**Rozwiązanie:**

Niech  $x$  oznacza długość boku dużego kwadratu, długość boku małego kwadratu, niech dalej  $h_1, h_2$  oznaczają długości wysokości zacieniowanych trapezów, zaś  $h_3, h_4$  wysokości niezacieniowanych trapezów. Oznaczmy ponadto przez  $P_1, P_2$  pola zacieniowanych trapezów oraz przez  $P_3, P_4$  pola niezacieniowanych trapezów.



Mamy wtedy

$$h_1 + h_2 = x - y = h_3 + h_4.$$

Stąd dostajemy

$$P_1 + P_2 = \frac{(x+y)h_1}{2} + \frac{(x+y)h_2}{2} = \frac{(x+y)(h_1+h_2)}{2} = \frac{(x+y)(x-y)}{2} = \frac{(x+y)(h_3+h_4)}{2} = \frac{(x+y)h_3}{2} + \frac{(x+y)h_4}{2} = P_3 + P_4.$$



## KONKURS „ZOSTAŃ EUKLIDEM”

### KLUCZ ODPOWIEDZI

1. Jeżeli uczeń popełnił błąd w obrębie jednego z kryterium, to otrzymuje za to kryterium 0 punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo tego błędu tok rozumowania ma poprawny, to otrzymuje dalsze punkty zgodnie z kryteriami.
3. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie inną metodą, niż zaproponowana w kluczu, otrzymuje za to zadanie maksymalną liczbę punktów.

| Numer zadania | Odpowiedzi  | Liczba punktów |
|---------------|---|----------------|
| 1             | <p><u>Obliczenie zarobków wszystkich osób:</u></p> <p>Oznaczmy przez <math>x</math> pensję najstarszego z nich (z warunków zadania wynika, że jest ona najwyższa). Wtedy Cezary zarabia <math>75\% x = \frac{3}{4}x</math>, zaś bankier <math>\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x</math>. Mamy więc <math>x + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 18\,000</math>, a stąd <math>x = 8000</math>. Najstarszy z panów zarabia więc 8000 zł, Cezary zarabia 6000 zł, zaś bankier zarabia 4000 zł.</p> <hr/> | 1              |
|               | <p><u>Obliczenie wieku wszystkich osób:</u></p> <p>Niech <math>4y</math> oznacza wiek najstarszego z nich, <math>3y</math> - wiek „średniego”, zaś <math>2y</math> - wiek najmłodszego. Wtedy mamy <math>4y + 3y + 2y = 108</math>, czyli <math>y = 12</math>. Stąd panowie mają kolejno 48, 36 i 24 lata.</p> <hr/>  | 1              |

|           | <p><u>Zebranie danych z treści zadania i otrzymanych w wyniku obliczeń (np. w tabeli – lecz niekoniecznie) i ich analiza:</u></p> <table border="1" data-bbox="336 297 1281 1272"> <thead> <tr> <th></th> <th>Adam</th> <th>Bogdan</th> <th>Cezary</th> <th>Architekt</th> <th>Bankier</th> <th>Lekarz</th> <th>4000 zł</th> <th>6000 zł</th> <th>8000 zł</th> <th>24 lata</th> <th>36 lat</th> <th>48 lat</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Adam</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>Bogdan</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Cezary</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> <td>+</td> <td>-</td> <td></td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>Architekt</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Bankier</td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>Lekarz</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4000 zł</td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>6000 zł</td> <td></td> <td></td> <td>+</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>8000 zł</td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>24 lata</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>-</td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>36 lat</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>48 lat</td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> <td></td> <td>-</td> <td>-</td> <td>+</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> |               | Adam   | Bogdan    | Cezary  | Architekt | Bankier | Lekarz  | 4000 zł | 6000 zł | 8000 zł | 24 lata | 36 lat | 48 lat | Adam |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | - | Bogdan |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | Cezary |  |  |  |  | - |  | - | + | - |  |  | - | Architekt |  |  |  |  |  |  | - |  |  | - |  |  | Bankier |  |  | - |  |  |  | + | - | - | - |  | - | Lekarz |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 4000 zł |  |  | - | - | + |  |  |  |  | - |  | - | 6000 zł |  |  | + |  | - |  |  |  |  |  |  | - | 8000 zł |  |  | - |  | - |  |  |  |  |  |  | + | 24 lata |  |  |  | - | - |  | - |  |  |  |  |  | 36 lat |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 48 lat | - |  | - | - | - |  | - | - | + |  |  |  | 3 |
|-----------|---|---------------|--------|-----------|---------|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--|--|--|--|---|--|---|---|---|--|--|---|-----------|--|--|--|--|--|--|---|--|--|---|--|--|---------|--|--|---|--|--|--|---|---|---|---|--|---|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|---------|--|--|---|---|---|--|--|--|--|---|--|---|---------|--|--|---|--|---|--|--|--|--|--|--|---|---------|--|--|---|--|---|--|--|--|--|--|--|---|---------|--|--|--|---|---|--|---|--|--|--|--|--|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|---|--|---|---|---|--|---|---|---|--|--|--|---|
|           | Adam  | Bogdan        | Cezary | Architekt | Bankier | Lekarz    | 4000 zł | 6000 zł | 8000 zł | 24 lata | 36 lat  | 48 lat  |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| Adam      |   |               |        |           |         |           |         |         |         |         |         | -       |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| Bogdan    |   |               |        |           |         |           |         |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| Cezary    |   |               |        |           | -       |           | -       | +       | -       |         |         | -       |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| Architekt |   |               |        |           |         |           | -       |         |         | -       |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| Bankier   |   |               | -      |           |         |           | +       | -       | -       | -       |         | -       |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| Lekarz    |   |               |        |           |         |           |         |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 4000 zł   |   |               | -      | -         | +       |           |         |         |         | -       |         | -       |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 6000 zł   |   |               | +      |           | -       |           |         |         |         |         |         | -       |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 8000 zł   |   |               | -      |           | -       |           |         |         |         |         |         | +       |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 24 lata   |   |               |        | -         | -       |           | -       |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 36 lat    |   |               |        |           |         |           |         |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 48 lat    | -   |               | -      | -         | -       |           | -       | -       | +       |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
|           | <p><u>Podanie poprawnej odpowiedzi:</u></p> <p>Adam ma 36 lat, jest bankierem i zarabia 4000 zł,<br/> Bogdan ma 48 lat, jest architektem i zarabia 8000 zł,<br/> Cezary ma 24 lata, jest lekarzem i zarabia 6000 zł.</p>  | 1             |        |           |         |           |         |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
|           | <p><b>Razem</b></p>   | <b>6 pkt.</b> |        |           |         |           |         |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |
| 2         | <p><u>Wprowadzenie oznaczeń:</u></p> <p>Oznaczmy przez <math>w</math> wagę odciętego kawałka (w <math>kg</math>). Niech dalej <math>x\%</math> oznacza zawartość procentową miedzi w I stopie, zaś <math>y\%</math> - zawartość procentową miedzi w II stopie. Z warunków zadania mamy, że <math>x \neq y</math>.</p> <p>Wtedy zawartość procentowa miedzi w odciętym kawałku I stopu wynosi <math>x\% \cdot w</math>, zaś w odciętym kawałku II stopu wynosi <math>y\% \cdot w</math>.</p>   | 1             |        |           |         |           |         |         |         |         |         |         |        |        |      |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |   |  |   |   |   |  |  |   |           |  |  |  |  |  |  |   |  |  |   |  |  |         |  |  |   |  |  |  |   |   |   |   |  |   |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |         |  |  |   |   |   |  |  |  |  |   |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |   |  |   |  |  |  |  |  |  |   |         |  |  |  |   |   |  |   |  |  |  |  |  |        |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |        |   |  |   |   |   |  |   |   |   |  |  |  |   |

|   |   |               |
|---|---|---------------|
|   | <p><u>Obliczenie zawartości procentowych miedzi w nowych stopach:</u></p> <p>Po stopieniu odciętego kawałka I stopu z resztą II stopu otrzymamy stop, w którym procentowa zawartość miedzi będzie wynosić</p> $\frac{y\% \cdot (8 - w) + x\% \cdot w}{8},$ <p>zaś po stopieniu odciętego kawałka II stopu z resztą I stopu otrzymamy stop, w którym procentowa zawartość miedzi będzie wynosić</p> $\frac{x\% \cdot (10 - w) + y\% \cdot w}{10}.$   | 1             |
|   | <p><u>Zapisanie i rozwiązanie równania:</u></p> <p>Za założenia te zawartości procentowe są równe, a więc</p> $\frac{y\% \cdot (8 - w) + x\% \cdot w}{8} = \frac{x\% \cdot (10 - w) + y\% \cdot w}{10}.$ <p>Otrzymujemy stąd</p> $40(y - x) = 9w \cdot (y - x).$ <p>Ponieważ <math>x \neq y</math>, to możemy podzielić obustronnie przez <math>(y - x)</math> i otrzymujemy wtedy <math>w = \frac{40}{9}</math>.</p> <p>Odcięty kawałek każdego ze stopów ważył więc <math>\frac{40}{9}</math> kg.</p> | 2             |
|   | <b>Razem</b>  | <b>4 pkt.</b> |
| 3 | <p><u>Przekształcenie nierówności do równoważnej postaci:</u></p> <p>Zapiszmy nierówność w równoważnej postaci</p> $\frac{a^3 + b^9 + 64}{4} \geq 3ab^3$ <p>i dalej</p> $\frac{a^3 + b^9 + 64}{3} \geq 4ab^3.$  | 2             |
|   | <u>Zauważenie możliwości zastosowania nierówności między średnią</u>  | 2             |

|   |  |               |
|---|--|---------------|
|   | <p><u>arytmetyczną i geometryczną:</u></p> <p>Stosujemy nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb <math>a^3, b^9, 64</math>.</p>   |               |
|   | <p><u>Zastosowanie nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną:</u></p> <p>Stosując nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną dla liczb <math>a^3, b^9, 64</math> otrzymujemy</p> $\frac{a^3 + b^9 + 64}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 \cdot b^9 \cdot 64},$ <p>czyli równoważnie</p> $\frac{a^3 + b^9 + 64}{3} \geq 4ab^3,$ <p>co było do udowodnienia.</p> | 2             |
|   | <b>Razem</b>   | <b>6 pkt.</b> |
| 4 | <p><u>Zapisanie równania w odpowiedniej postaci:</u></p> <p>Wykorzystując podany wzór funkcji <math>f</math> zapisujemy równanie w postaci</p> $\sqrt{4} + \sqrt{\sqrt{a^4}} + 16 \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{0,01}}.$   | 1             |
|   | <p><u>Równoważne przekształcenie równania:</u></p> <p>Przekształcając równanie równoważnie otrzymujemy</p> $2 +  a  + 16 \frac{1}{ a } = 10$ <p>i dalej</p> $ a ^2 - 8 a  + 16 = 0,$   | 3             |
|   | <p><u>Rozwiązanie równania:</u></p> <p>Mamy więc</p> $( a  - 4)^2 = 0,$ <p>czyli</p>   | 1             |

|          |  |               |
|----------|--|---------------|
|          | $ a  = 4$<br>i ostatecznie $a = 4$ lub $a = -4$ .  |               |
|          | <b>Razem</b>   | <b>5 pkt.</b> |
| <b>5</b> | <u>Wprowadzenie oznaczeń:</u><br>Niech $x$ oznacza długość boku dużego kwadratu, $y$ długość boku małego kwadratu, niech dalej $h_1, h_2$ oznaczają długości wysokości zacieniowanych trapezów, zaś $h_3, h_4$ wysokości niezacieniowanych trapezów. Oznaczmy ponadto przez $P_1, P_2$ pola zacieniowanych trapezów oraz przez $P_3, P_4$ pola niezacieniowanych trapezów. | <b>1</b>      |
|          | <u>Zauważenie zależności:</u><br>Mamy wtedy $h_1 + h_2 = x - y = h_3 + h_4.$   | <b>1</b>      |
|          | <u>Obliczenie odpowiednich sum pól i udowodnienie ich równości:</u><br>Stąd dostajemy $P_1 + P_2 = \frac{(x+y)h_1}{2} + \frac{(x+y)h_2}{2} = \frac{(x+y)(h_1+h_2)}{2} = \frac{(x+y)(x-y)}{2}$ $= \frac{(x+y)(h_3+h_4)}{2} =$ $\frac{(x+y)h_3}{2} + \frac{(x+y)h_4}{2} = P_3 + P_4.$  | <b>2</b>      |
|          | <b>Razem</b>   | <b>4 pkt.</b> |