



---

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla gimnazjów”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

# Skrypt 7

## Równania

1. Zapisywanie związków między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
2. Rozwiązywanie równań
3. Rozwiązywanie równań – równania oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne
4. Rozwiązywanie równań – zadania geometryczne
5. Rozwiązywanie równań – równania z wyrażeniami ułamkowymi i in.
6. Przekształcanie wzorów
7. Rozwiązywanie zadań tekstowych

**Opracowanie: GIM6**

## Temat: Zapisywanie związków między wielkościami za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą

### Praca z wykorzystaniem apletu *rownania01*.

1. Otwórz plik *rownania01*.
2. Do rozwiązania jest zadanie 1. Zanim je rozwiążesz, zaznacz opcję Opis i poruszaj dostępnymi punktami tak, aby powiększać i pomniejszać wielkości dwóch prostokątów. Przyjrzyj się czy prostokąt oznaczony konkretną liczbą jest większy czy mniejszy od prostokąta oznaczonego jako  $x$ . Obserwuj opis.

Teraz odhacz opcję opis. Poruszając punktami, zmieniaj wysokości prostokątów i ustal czy prostokąt oznaczony konkretną liczbą jest większy i o ile większy, czy mniejszy i o ile mniejszy, od prostokąta oznaczonego jako  $x$ .

Teraz przeanalizuj treść zadania 1. Ustaw wysokości prostokątów tak, aby obrazowały one treść tego zadania. Gdy już to zrobisz, naciśnij OK. Po naciśnięciu OK otrzymasz podpowiedź, jak zapisać za pomocą równania związek między dwoma wielkościami, o których jest mowa w zadaniu.

### Wskazówka

Często w samych treściach zadań jest podpowiedź, jak ułożyć równanie. Znajdując słowa-klucze: „jest”, „stanowi”, „jest równa”, „wynosi”, znajdujesz znak równości. Wyrażenie zapisane po lewej stronie słowa-klucza ma być po lewej stronie w równaniu, a wyrażenie znajdujące się po prawej stronie słowa-klucza ma być po prawej stronie w równaniu.

Przesuń suwak zamień, zobaczysz wtedy na rysunku jak wyrównać dwie omawiane wielkości, a jednocześnie, jak zamienić treść zadania na równanie. Na czerwono zostało zaznaczone słowo-klucz, które zamienia się w znak równości.

Ułóż równanie. Swoją odpowiedź porównaj z odpowiedzią, która ukaże się, gdy zaznaczysz opcję Odpowiedź.

3. Podobnie postępuj rozwiązując kolejne zadania. Zanim użyjesz suwaka zamień i opcji Odpowiedź, samodzielnie ułóż równanie.

### Uwaga

W zadaniu 3 druga wielkość musi stanowić trzecią część pierwszej wielkości, a w zadaniu 6 druga wielkość musi stanowić połowę pierwszej wielkości. Zachowaj tę zależność między wielkościami, poruszając punktami.

## Karta pracy

**Zadanie 1.** Wpisz w tabele fragmenty zadań i dopasuj fragmenty odpowiedzi tak, aby powstały równania zgodne z treściami zadań. Pozostałe fragmenty odpowiedzi, które nie odpowiadają żadnemu fragmentowi zadań, wykreśl.

Liczba o 5 mniejsza od  $x$  stanowi 80% liczby  $x$ .

Liczba o 5 mniejsza od $x$	stanowi	80% liczby $x$
$x - 5$	=	

Liczba 4 razy większa od  $x$  jest o 2 mniejsza od  $x$ .

	jest	
	=	

Jeśli do liczby  $x$  dodamy 6, to otrzymamy 24.

	=	

Liczba o 20% większa od liczby  $x$ , będzie od niej większa o 10

	=	

$80\% x$   $x + 6$   $5$   $120\% x$   $x - 5$   $4x$   $x + 2$   $24$   $x + 10$   $10$   $x - 2$   $x + 24$   $20\% x$   $8$

**Zadanie 2.** W poniższych zadaniach wskaż słowa-klucze, które oddzielają lewą stronę równania od prawej, a następnie oznacz niewiadomą i ułóż odpowiednie równanie.

- a) Bartek nazbierał dziś 48 kasztanów i było to o 20% więcej od liczby kasztanów, które nazbierał wczoraj.

$x$  – liczba kasztanów, które Bartek nazbierał wczoraj

Równanie: \_\_\_\_\_

- b) Antek nazbierał dziś kilka prawdziwków, o 5 mniej rydzów, a maślaków – 2 razy więcej niż prawdziwków. Razem nazbierał dziś 25 grzybów.

$x$  – \_\_\_\_\_

Równanie: \_\_\_\_\_

## Temat: Rozwiązywanie równań

Kilka podstawowych zasad postępowania podczas rozwiązywania równań:

$$\frac{-8(3x+7)}{\quad} = \frac{-5(9+4x)}{\quad}$$

Mnożymy jednomian stojący przed nawiasem przez każdy wyraz w nawiasie otrzymując:

$$\frac{-24x - 56}{\quad} = \frac{-45 - 20x}{\quad}$$

Przenosimy jednomian z niewiadomą  $-20x$  z prawej strony równania na lewą, dlatego zmieniamy jego znak  $-$  na znak  $+$ . Liczbę  $-56$  przenosimy z lewej strony równania na prawą, więc zmieniamy znak na przeciwny:  $-$  na  $+$ . Otrzymujemy:

$$-24x + 20x = 56 - 45$$

Redukujemy wyrazy podobne otrzymując:

$$-4x = 11$$

Dzielimy równanie obustronnie przez liczbę  $-4$  i otrzymujemy wynik:

$$x = -2\frac{3}{4}$$

Warto zawsze sprawdzić czy otrzymany wynik jest prawidłowy. Sprawdzamy, podstawiając otrzymany wynik w miejsce niewiadomej do pierwszego równania i wykonujemy obliczenia:

$$-8\left(3 \cdot \left(-2\frac{3}{4}\right) + 7\right) = -5\left(9 + 4 \cdot \left(-2\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$-8\left(3 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + 7\right) = -5\left(9 + 4 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right)\right)$$

$$-8\left(-8\frac{1}{4} + 7\right) = -5(9 - 11)$$

$$-8 \cdot \left(-1\frac{1}{4}\right) = -5 \cdot (-2)$$

$$10 = 10$$

Otrzymaliśmy równość prawdziwą, znaczy to, że liczba  $-2\frac{3}{4}$  jest rozwiązaniem równania.

Mówimy też, że liczba ta spełnia równanie albo jest jego pierwiastkiem.

## Karta pracy

**Zadanie 1.** Rozwiąż równania i przekonaj się, że rozwiązaniem każdego z nich jest liczba 1.

A.  $2x - 5 = 7 - 10x$

B.  $-3x - 2 = x - 6$

C.  $2 + 7x = 9x$

Odpowiedz na pytanie: Dlaczego równania te nazywamy równaniami równoważnymi?

**Zadanie 2.** Każda z podanych liczb jest rozwiązaniem jednego równania. Sprawdzając czy dana liczba jest rozwiązaniem równania, dopasuj rozwiązanie do każdego równania.

Rozwiązania równań:  $x = -3$ ;  $x = 8$ ;  $x = \frac{1}{2}$ ;  $x = 0$ .

$5x - 2 = 3x - 1$	$2x + 5 = x + 5$	$3(x - 4) = 4(x - 5)$	$2(x + 1) = 5(x + 4) - 9$
$x =$	$x =$	$x =$	$x =$

Uwaga: Aby sprawdzić czy jakaś liczba jest rozwiązaniem równania, należy podstawić w miejsce niewiadomej tę liczbę. Liczba jest rozwiązaniem równania, jeśli spełnia to równanie, tzn. jeżeli po podstawieniu i wykonaniu obliczeń, otrzymamy równość prawdziwą.

**Zadanie 3.** Uzupełnij podane równania tak, aby liczba 10 była rozwiązaniem każdego z nich.

Przykład:  $2x + \square = 4$

Rozwiązanie:  $2x + \square(-16) = 4$

Sprawdzenie:  $2 \cdot 10 + (-16) = 4$

a)  $x - \square = 5$

Sprawdzenie: \_\_\_\_\_

b)  $4x = \square$

Sprawdzenie: \_\_\_\_\_

c)  $2(x + \square) = 0$

Sprawdzenie: \_\_\_\_\_

## Temat: Rozwiązywanie równań – równania oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne

### Karta pracy

**Zadanie 1.** Rozwiąż równania. Wskaż równanie oznaczone, tożsamościowe i sprzeczne.

A.  $-(3x + 2) - 3x = 7$

B.  $-(3x + 2) + 3x = 7$

C.  $-(3x - 2) + 3x = 2$

Odpowiedź: A. \_\_\_\_\_ B. \_\_\_\_\_ C. \_\_\_\_\_

**Zadanie 2.** Rozwiąż równania i przekonaj się czy są to równania oznaczone.

A.  $2(x - 5) = 7 + 2x$

B.  $-4(x - 1) = -(4x - 4)$

C.  $3(8x - 2) = 4(6x + 1)$

Czy potrafisz bez rozwiązywania równań określić czy są oznaczone, tożsamościowe czy sprzeczne? Odpowiedz: dlaczego?

**Zadanie 3.** Pytanie kluczowe – zadaj pytanie koledze/koleżance z ławki:

Mam o 4 orzechy mniej od ciebie, a jednocześnie ty masz ich dwa razy więcej ode mnie. Po ile mamy orzechów?

**Zadanie 3’.** Pytanie kluczowe nieco inaczej – zadaj je koledze/koleżance z ławki:

Mam dwa razy więcej orzechów od ciebie. Jeśli zjem jednego orzecha, to też będę mieć dwa razy więcej orzechów od ciebie. Ile mam orzechów?

**Zadanie 3’’. Pytanie kluczowe jeszcze inaczej – zadaj je koledze/koleżance z ławki:**

Razem mamy dwa razy więcej orzechów niż mam ja. Po ile mamy orzechów?

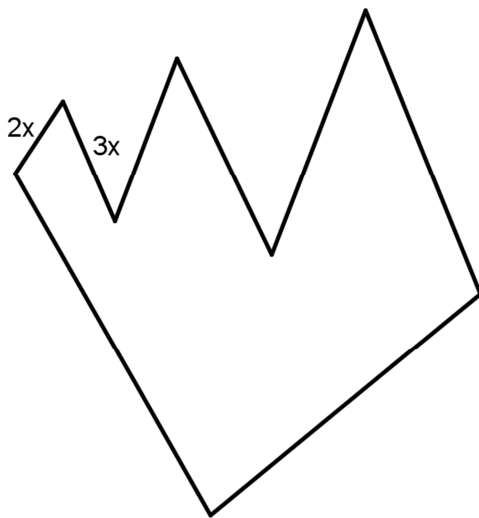
## Temat: Rozwiązywanie równań – zadania geometryczne

Układając równania do zadań geometrycznych trzeba wykorzystać jakąś własność figury czy też wzór, które nie są przytaczane w treści zadania.

### Karta pracy

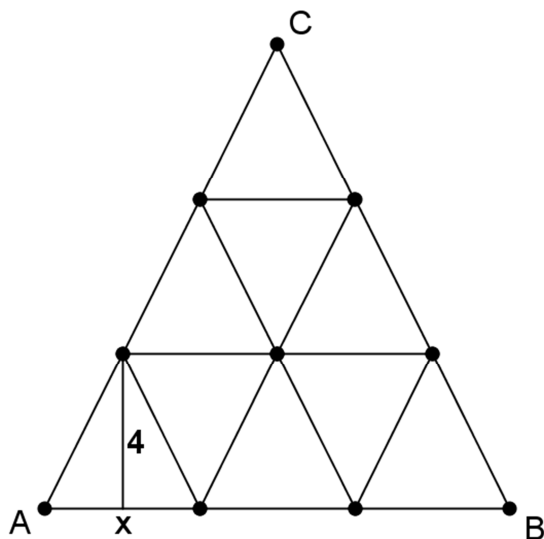
**Zadanie 1.** Figura składa się z 8 odcinków, które spełniają warunki: pierwszy odcinek ma długość  $2x$ , a każdy następny odcinek jest o  $1x$  dłuższy od poprzedniego. Obwód figury wynosi 44. Ułóż równanie i oblicz  $x$ .

Rozwiązanie:



**Zadanie 2.** Trójkąt ABC składa się z 9 przystających trójkątów. Jego pole jest równe 72. Ułóż równanie i oblicz  $x$ .

Rozwiązanie:



## Temat: Rozwiązywanie równań – równania z wyrażeniami ułamkowymi i in.

**Przykład 1.** Niektóre równania zapisane są w postaci proporcji. Przykład:

$$\frac{3x + 3}{2} = \frac{8x}{5}$$

Takie równanie zaczynamy rozwiązywać od mnożenia wyrażen po skosie.

$$\frac{3x + 3}{2} \times \frac{8x}{5}$$

Otrzymujemy prostsze równanie, które rozwiązujemy poznanymi wcześniej metodami:

$$5(3x + 3) = 2 \cdot 8x$$

Rozwiąż to równanie i sprawdź, że rozwiązaniem jest liczba 15.

**Przykład 2.**

$$\frac{2x + 5}{3} - \frac{x - 4}{2} = \frac{3x + 10}{4}$$

Mnożymy takie równanie obustronnie przez wspólny mianownik wszystkich ułamków: 12

$$\overset{4}{\cancel{12}} \cdot \frac{2x + 5}{\cancel{3}_1} - \overset{6}{\cancel{12}} \cdot \frac{x - 4}{\cancel{2}_1} = \overset{3}{\cancel{12}} \cdot \frac{3x + 10}{\cancel{4}_1}$$

Należy pamiętać, aby po wykonaniu skracania zapisać wyrażenia z liczników w nawiasach!

Otrzymujemy prostsze równanie, które rozwiązujemy znanymi metodami.

$$4(2x + 5) - 6(x - 4) = 3(3x + 10)$$

Rozwiąż to równanie i sprawdź, że rozwiązaniem jest liczba 2.



**Zadanie 1.** Rozwiąż równania stosując metodę rozwiązywania proporcji. Sprawdź wyniki.

A.  $\frac{x+4}{3} = \frac{5-2x}{2}$

B.  $\frac{3x+1}{3} = \frac{5+2x}{2}$

**Zadanie 2.** Rozwiąż równania mnożąc je najpierw obustronnie przez 6. Sprawdź wyniki.

A.  $\frac{x+4}{3} = \frac{5-2x}{2}$

B.  $\frac{3x+1}{3} = \frac{5+2x}{2}$

**Zadanie 3.** Rozwiąż równanie. Sprawdź wynik.

$$\frac{3x+1}{2} - \frac{x-1}{4} = \frac{2x+3}{2} + \frac{3-x}{4}$$

## Temat: Przekształcanie wzorów

### Praca z wykorzystaniem apletu *rownania03*.

1. Otwórz plik *rownania03*.

Do przekształcenia jest 6 wzorów. Zanim przystąpisz do przekształcania wzorów, zauważ, że wszystkie działania wykonywane podczas przekształcania są podobne do tych, które wykonuje się przy rozwiązywaniu równań. Naciśnij przycisk Zasady.

2. Naciśnij przycisk 1. Przesuwając w dół suwakiem odkryjesz kolejne podpowiedzi, jak przekształcić dany wzór.

Ogólnie można przyrównać przekształcanie wzorów do obierania cebuli. Niewiadomą, którą trzeba wyznaczyć, należy „oczyścić” z wszystkich otaczających ją „warstw”. Jeśli wyznaczana niewiadoma jest mnożona przez jakieś wyrażenie, to „wyrzucenie warstwy” polega na zastosowaniu działania odwrotnego czyli dzielenia przez to wyrażenie.

Naciśnij przycisk 2. Tutaj dzielenie likwidujemy mnożeniem.

3. Naciśnij przycisk 3. Przy bardziej skomplikowanych wzorach warto pamiętać o ogólnych wskazówkach. Do takich należy: „ZLIKWIDUJ UŁAMEK!”. Po zlikwidowaniu ułamka, wyraźniej widać przez co wyznaczana niewiadoma jest mnożona, czyli przez co należy ją teraz podzielić. W tym przykładzie do wyznaczenia są 2 niewiadome, wybierasz niewiadomą zaznaczając odpowiednie pole wyboru.

Zwróć uwagę, że w przykładzie 2 prawa strona wzoru jest też ułamkiem i dlatego przekształcenie wzoru polegało na zlikwidowaniu tego ułamka.

4. Naciśnij przycisk 4. W tym przykładzie nie ma ułamka. Prawa strona wzoru jest sumą. W takim przypadku zawsze na jedną stronę należy przenieść wyraz z niewiadomą, a na drugą stronę wyrazy, w których ta niewiadoma nie występuje. (Dla porównania: przy rozwiązywaniu równań, jednomiany z niewiadomą przenosimy na jedną stronę, a pozostałe jednomiany na drugą stronę równania.) Teraz, jeśli niewiadoma jest mnożona przez jakieś wyrażenie, należy równość przez to wyrażenie podzielić.

5. Naciśnij przycisk 5. Tu zebrane są wszystkie wcześniej zastosowane działania: zlikwidowanie ułamka, uporządkowanie wyrazów, jeśli jeszcze niewiadoma jest przez jakieś wyrażenie mnożona, to podzielenie równości przez to wyrażenie.

6. Naciśnij przycisk 6. Jeśli wyznaczana niewiadoma występuje w zapisie więcej niż raz, to po uporządkowaniu wyrazów, należy ją wyciągnąć za nawias, a potem wyznaczyć.

7. Rozwiąż test. Naciśnij Sprawdź się. Powodzenia!

## Karta pracy

**Zadanie 1.** W każdym z poniższych wzorów do wyznaczenia jest niewiadoma  $x$ . Zapisz, jakim działaniem zaczniesz przekształcać wzór, aby wyznaczyć niewiadomą  $x$ .

$P = ax$	$r = \frac{x}{a}$	$s = a + x$	$S = \frac{px}{a}$	$D = px - a$	$ax = P - bf$

1. mnożenie przez  $a$     2. dzielenie przez  $a$     3. przeniesienie  $a$  na drugą stronę równości

**Przykład.** Przenoszenie wyrazów z jednej strony równości na drugą odbywa się zawsze ze zmianą znaków na przeciwne. Jeśli w wyniku przenoszenia wyrazów otrzymamy w zapisie znak minus i będziemy chcieli go zlikwidować, to trzeba będzie równość obustronnie pomnożyć/podzielić przez  $(-1)$ . Ten sam efekt można uzyskać przenosząc wyrazy tak, aby nie tworzyć niepotrzebnie minusów i odwracając równość stronami.

Wyznacz $x$	
$S = ax - b$ Po przeniesieniu wyrazów na drugą stronę równości z przeciwnym znakiem: $-ax = -S - b$ Po pomnożeniu równości przez $(-1)$ : $ax = S + b$ Po podzieleniu równości przez $a$ : $x = \frac{S + b}{a} \quad a \neq 0$	$S = ax - b$ Po przeniesieniu wyrazu $b$ na drugą stronę równości z przeciwnym znakiem: $S + b = ax$ Po odwróceniu równości stronami: $ax = S + b$ Po podzieleniu równości przez $a$ : $x = \frac{S + b}{a} \quad a \neq 0$

**Zadanie 2.** Z każdego wzoru wyznacz  $x$  (w każdym przykładzie zlikwiduj najpierw nawias).

$S = 2(a + x)$ $S = 2a + 2x$ $2x = S - 2a$ $x = \frac{S - 2a}{2}$	$P = 2(3a + x)$	$P = a(8 + x)$	$S = \frac{2(a + x)}{t}$
--	-----------------	----------------	--------------------------

## Temat: Rozwiązywanie zadań tekstowych

Praca z wykorzystaniem apletów: *rownania04*, *rownania05* i *rownania06*.

### *rownania04*

1. Otwórz plik *rownania04*. Prezentowane są tu dwa zadania. Każde z tych zadań zostało rozwiązane dwoma sposobami. Sposób rozwiązania wybierasz przełączając A na B bądź odwrotnie.
2. Rozwiązanie A nie wykorzystuje równania. Do tego rozwiązania została dołączona odpowiedź w postaci odcinków o ustalonej długości. Przesuwaj te odcinki do punktów zaznaczonych na pomocniczym obrazku i w ten sposób ustal zależność między nimi, a następnie rozwiąż zadanie. Poprawność obliczeń sprawdź, zaznaczając pole wyboru Rozwiązanie.
3. Rozwiązanie B polega na ułożeniu równania i rozwiązaniu go. Do tego rozwiązania została dołączona odpowiedź, na podstawie której ułóż równanie. Poprawność rozwiązania, na podstawie ułożonego równania sprawdź, zaznaczając pole wyboru Rozwiązanie.

### *rownania05*

1. Otwórz plik *rownania05*. Na pierwszej stronie znajduje się suwak z możliwością zmiany wyrażen opisujących wiek bohaterów zadań w zależności od upływającego czasu. Prezentowane są tu 4 zadania. W trakcie prezentacji rozwiązania, zawsze możesz przejść do tej strony (naciskając ?), aby samodzielnie ustalić po ile lat mieli kilka lat wcześniej, bądź będą mieli za kilka lat, bohaterowie zadania.
2. Kolejne etapy rozwiązania zadania odkryjesz naciskając strzałkę Dalej. Zwróć uwagę na wskazywaną treść zadania, na podstawie której uzupełnione zostają pola w tabeli. Przed każdym naciśnięciem strzałki Dalej, samodzielnie uzupełnij tabelę. Potem naciśnij tę strzałkę i sprawdź poprawność swoich wyrażen.
3. Przed zapisaniem równania ukaze się odpowiedź w postaci wyróżnienia odpowiedniego fragmentu zadania i odpowiednich wyrażen. Samodzielnie zapisz równanie. Pamiętaj, że w treści zadania często znajdują się słowa-kлючe, które można zastąpić znakiem równości. Tę treść, która znajduje się z lewej strony słowa-ključa zamień na wyrażenie z lewej strony znaku równości, a treść z prawej strony na wyrażenie z prawej strony znaku równości..
4. Rozwiąż równanie. Naciskanie strzałki Dalej ukaze kolejne etapy rozwiązania.

