



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla gimnazjów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 14

Figury płaskie Okrąg wpisany i opisany na wielokącie

1. Symetralna odcinka: konstrukcja i własności
2. Konstrukcja okręgu opisanego na trójkącie
3. Okrąg opisany na trójkącie - rozwiązywanie zadań
4. Dwusieczna kąta: konstrukcja i własności
5. Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt
6. Okrąg wpisany w trójkąt - rozwiązywanie zadań
7. Wielokąty foremne. Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego
8. Podstawowe wielokąty foremne i ich własności, okręgi wpisane i opisane na wielokątach

Opracowanie: GIM5

Temat: Symetralna odcinka: konstrukcja i własności

Praca z apiletem *figury14*:

- Przeczytaj, czym jest symetralna odcinka i przepisz definicję do zeszytu (czerwony napis w góry ekranu).
- Zapoznaj się z konstrukcją symetralnej, naciśnij przycisk **Konstrukcja symetralnej**, odkrywaj kolejne kroki poprzez pola wyboru. Równocześnie wykonuj konstrukcję w zeszycie za pomocą cyrkla, ołówka i linijki.
- Zmieniaj długość odcinka ciągnąc za jego końce, zauważ, że pomimo różnej długości odcinka, konstrukcja przebiega identycznie.
- Spróbuj odkryć, jakie własności ma symetralna odcinka, kliknij na przycisk **Własności symetralnej odcinka** i wykonaj polecenie. Wniosek zapisz w zeszycie.

Zadanie 1. Narysuj odcinek o długości 6cm. Za pomocą linijki wyznacz jego środek. Następnie narysuj kilka prostych prostopadłych do tego odcinka. Czy każda z tych prostych jest symetralną odcinka?

Zadanie 2. Narysuj odcinek o długości 8cm. Za pomocą linijki wyznacz jego środek. Następnie narysuj kilka prostych przechodzących przez jego środek. Czy każda z tych prostych jest symetralną odcinka?

Zapamiętaj! Symetralna odcinka to prosta, która jest do niego równocześnie prostopadła i przechodząca przez jego środek.

Zadanie 3. Narysuj dowolny odcinek a . Następnie narysuj odcinek o długości:

a) $\frac{1}{2}a$

b) $1\frac{3}{4}a$

Wykorzystaj symetralną odcinka.

Zadanie 4. Narysuj dowolny okrąg oraz jego dwie cięciwy, które nie są do siebie ani równoległe ani prostopadłe. Skonstruuj symetralną każdej z nich. Co ciekawego zauważyłeś?

Zadanie 5. Narysuj dowolny okrąg oraz jego dwie cięciwy, które są do siebie równoległe. Skonstruuj symetralną każdej z nich. Co ciekawego zauważyłeś?

Zadanie 6. Narysuj dowolny okrąg oraz jego dwie cięciwy, które są do siebie prostopadłe. Skonstruuj symetralną każdej z nich. Co ciekawego zauważyłeś?

Zadanie 7. Podaj

- a) ile wynosi długość każdego z dwóch odcinków, na jakie dzieli symetralna odcinek o długości 6,56cm?
- b) jaka jest odległość punktu P leżącego na symetralnej odcinka XY o długości 5,6cm od punktu Y, jeśli punkt P jest odległy od punktu X o 4,67cm.

Zadanie 8. Punkt C leżący na symetralnej odcinka AB w odległości 4cm od środka odcinka. Oblicz pole trójkąta ABC, jeśli odcinek AB ma długość 8cm. Pamiętaj, aby najpierw wykonać odpowiedni rysunek.

Zadanie 9. Wskaż prawidłową odpowiedź. Rysując kolejne symetralne odcinka, dany odcinek można podzielić na:

- | | |
|----------------------|----------|
| a) 4 równe części | TAK/ NIE |
| b) 6 równych części | TAK/ NIE |
| c) 5 równych części | TAK/ NIE |
| d) 12 równych części | TAK/ NIE |

Zadanie 10. Narysuj dowolny prostokąt a następnie wykreśl symetralne dwóch sąsiednich boków. Jak położone są względem siebie te symetralne?

Zadanie 11. Narysuj jeden trójkąt ostrokątny, jeden prostokątny a jeden rozwartokątny, następnie wykreśl symetralne wszystkich boków, po czym uzupełnij zapisy:

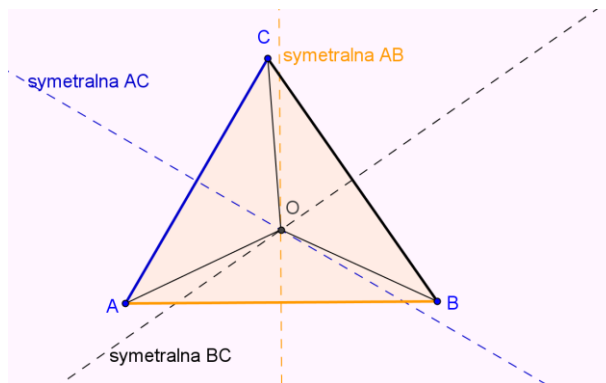
- w trójkącie ostrokątnym symetralne boków trójkąta przecinają się
- w trójkącie prostokątnym symetralne boków trójkąta przecinają się
- w trójkącie rozwartokątnym symetralne boków trójkąta przecinają się

Możesz pracować w trzyosobowej grupie, wówczas każdy z was zajmie się jednym rodzajem trójkąta.

Temat: Konstrukcja okręgu opisanego na trójkącie

Praca z apletem *figury15*:

- Część wstępna - przycisk **Okrąg opisany na wielokącie**:
 - Przeczytaj, kiedy mówimy, że okrąg jest opisany na wielokącie.
 - Wykonaj ćwiczenie, wskaż jedną z odpowiedzi TAK lub NIE, aby stwierdzić czy na danym rysunku wielokąt jest wpisany w okrąg, klikając przycisk Pokaż wynik, możesz sprawdzić swoją odpowiedź.
- Przy poprzednim temacie do wykonania było zadanie 11, polegające na konstrukcji symetralnych boków poszczególnych trójkątów (chodziło o ich podział ze względu na kąty), wnioskiem z tego zadania, był fakt, że wszystkie symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie.
 - Przeanalizuj poniższy rysunek i uzupełnij tekst



Punkt O leży na symetralnej odcinka AB, jest zatem równoodległy od punktów:....., czyli $|AO| = |.....|$. Punkt O leży też na symetralnej odcinka BC, zatem: $|OB| = |.....|$, a z poprzedniej równości: $|AO| = |.....| = |.....|$. Punkt O leży zatem w odległości od punktów A, B, C i jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

- Zapoznaj się ze sposobem konstrukcji okręgu opisanego na trójkącie, naciśnij przycisk **Konstrukcja okręgu opisanego na trójkącie**, odkrywaj kolejne kroki poprzez pola wyboru. Równocześnie wykonuj konstrukcję w zeszycie za pomocą cyrkla, ołówka i linijki.
- Zmieniaj długość odcinka ciągnąc za jego końce, zauważ, że pomimo różnej długości odcinka, konstrukcja przebiega identycznie.

- Kliknij na przycisk ma **Okrąg opisany na trójkącie - własności** i spróbuj odkryć te własności. Uzupełnij właściwą odpowiedzią, na podstawie spostrzeżeń, poniższy tekst:

Jeśli trójkąt jest ostrokątny to środek okręgu opisanego na nim leży *wewnątrz/ na zewnątrz/na jednym z boków* tego trójkąta.

Jeśli trójkąt jest prostokątny to środek okręgu opisanego na nim leży *wewnątrz/ na zewnątrz/na jednym z boków* tego trójkąta.

Jeśli trójkąt jest rozwartokątny to środek okręgu opisanego na nim leży *wewnątrz/ na zewnątrz/na jednym z boków* tego trójkąta.

Jeśli jeden z boków trójkąta zawiera średnicę okręgu to ten trójkąt musi być trójkątem, a promień okręgu ma długość równą długości przeciwprostokątnej.

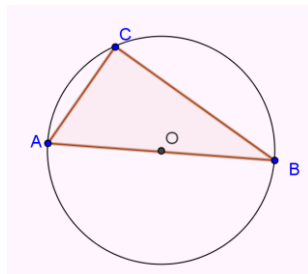
Zadanie 1. Na podstawie poniższych rysunków określ rodzaj trójkąta.

a)

b)



c)



d)



Zadanie 2. Trójkąt KLM jest wpisany w okrąg. Środek O tego okręgu leży na boku KL, który to ma długość 9cm. Zrób odpowiedni rysunek i podaj:

- Jaka jest odległość punktu M od punktu O?
- Ile wynosi długość promienia tego okręgu?

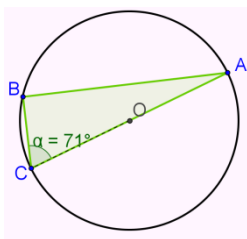
Temat: Okrąg opisany na trójkącie - rozwiązywanie zadań

Praca z apilem *figury16*:

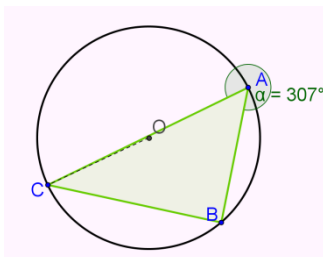
- Aplet pomoże ci w rozwiązywaniu zadań polegających na obliczaniu miar kątów w trójkącie wpisanym w okrąg.
- Rozwiąż Zadanie 1, którego treść ukaże się po kliknięciu w przycisk **Zadanie 1**. Spróbuj pracować samodzielnie, jednak jeśli będziesz miał wątpliwości korzystaj ze wskazówek, które są ukryte pod kolejnymi polami wyboru. Opierając się na jego rozwiązaniu wykonaj poniższe zadanie.

Zadanie 1. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkącie ABC.

a)



b)



- Rozwiąż Zadanie 2, którego treść ukaże się po kliknięciu w przycisk **Zadanie 2**. Spróbuj pracować samodzielnie, jednak jeśli będziesz miał wątpliwości korzystaj ze wskazówek, które są ukryte pod kolejnymi polami wyboru. Opierając się na jego rozwiązaniu wykonaj poniższe zadanie.

Zadanie 2. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkącie ABC.

a)



b)



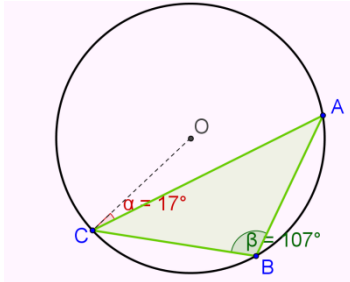
- Rozwiąż Zadanie 3, którego treść ukaże się po kliknięciu w przycisk **Zadanie 3**. Spróbuj pracować samodzielnie, jednak jeśli będziesz miał wątpliwości korzystaj ze wskazówek, które są ukryte pod kolejnymi polami wyboru. Opierając się na jego rozwiązaniu wykonaj poniższe zadanie.

Zadanie 3. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkącie ABC.

a)



b)



Zadanie 4. Trójkąt prostokątny równoramienny wpisany jest w okrąg o promieniu 15 cm. Oblicz pole tego trójkąta. Wykonaj odpowiedni rysunek.

Temat: Dwusieczna kąta: konstrukcja i własności

Praca z apletem *figury17*:

Konstrukcja dwusiecznej

- Przypomnij sobie, czym jest dwusieczna kąta i przepisz definicję do zeszytu (czerwony napis w górze ekranu).
- Powtórz sposób konstrukcji dwusiecznej kąta, naciśnij przycisk **Konstrukcja dwusiecznej**, odkrywaj kolejne kroki poprzez pola wyboru. Równocześnie wykonuj konstrukcję w zeszycie za pomocą cyrkla, ołówka i linijki;
- Zmieniaj długość odcinka ciągnąc za jego końce, zauważ, że pomimo różnej długości odcinka, konstrukcja przebiega identycznie.

Własności dwusiecznej

- Spróbuj przypomnieć sobie, jakie własności ma dwusieczna kąta, kliknij na przycisk **Własności dwusiecznej**.
- Zmieniaj miarę kąta za pomocą suwaka, położenie punktu P możesz zmieniać myszą, odległość tego punktu od ramion kąta zmienia się dynamicznie. Uzupełnij wniosek:

Każdy punkt leżący nakąta jestodległy odkąta.

Dwusieczne w trójkącie

- Klikaj w pole wyboru Dwusieczna kąta o wierzchołku A, aby wyświetlić dwusieczną tego kąta, podobnie postępuj z kolejnymi kątami. Obserwuj ich punkty przecięcia. Zmieniaj rodzaj trójkąta za pomocą suwaka. Odpowiedz na pytania:
- Czy dwusieczne przecinają się w tym samym punkcie?
- Czy dzieje się tak, w każdym rodzaju trójkąta?
- Uzupełnij wniosek:

..... kątów w każdym trójkącie przecinają się wpunkcie.

- Porównaj teraz odległości punktu O od boków trójkąta, wykorzystaj w tym celu mówiące o tym pola wyboru. Omów swoje spostrzeżenia z kolegą z ławki, spróbujcie zapisać wniosek.

Punkt przecięcia się kątów trójkąta jestod boków trójkąta.

Temat: Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt

Praca z apilem *figury18*:

- Część wstępna - przycisk ***Okrąg wpisany w wielokąt***:
 - Przeczytaj i przeanalizuj definicję okręgu wpisanego w wielokąt, zwróć uwagę, że można opisywać tę sytuację na dwa sposoby, okrąg jest wpisany w wielokąt, ale równocześnie wielokąt jest opisany na okręgu.
 - Wykonaj ćwiczenie - odpowiedz czy na rysunkach okrąg jest wpisany w wielokąt, wpisz **tak** lub **nie** w każde pole tekstowe, pojawi się komentarz do udzielonej odpowiedzi pisz tylko małymi literami, klikając przycisk ***Wyczyść odpowiedź***, dostaniesz puste trzy pola i możesz wykonać ćwiczenie ponownie.
- Przypomnij sobie sposób konstrukcji okręgu opisanego na trójkącie, naciśnij przycisk ***Konstrukcja okręgu wpisanego w trójkąt***, odkrywaj kolejne kroki poprzez pola wyboru. Równocześnie wykonuj konstrukcję w zeszytach za pomocą cyrkla, ołówka i linijki.
- Zmieniaj długość odcinka ciągnąc za jego końce, zauważ, że pomimo różnej długości odcinka, konstrukcja przebiega identycznie.
- Kliknij na przycisk ***Okrąg wpisany w trójkąt - własności*** i spróbuj przypomnieć sobie te własności. Wielkość i rodzaj trójkąta możesz zmieniać przesuwając jego wierzchołki myszą.
- Odkrywaj kolejne pola wyboru i analizuj opisane zależności.
- Uzupełnij właściwą odpowiedzią, na podstawie spostrzeżeń, poniższy tekst:

Promień okręgu *wpisanego/opisanego w/na trójkąt/trójkącie*, poprowadzony do punktu styczności jest zawsze *prostopadły/równoległy* do boku trójkąta.

Odległość *każdego/ jednego* wierzchołka trójkąta *wpisanego/opisanego w/na okrąg/okręgu* od punktu styczności z bokiem wychodzącym z tego wierzchołka jest zawsze taka sama.

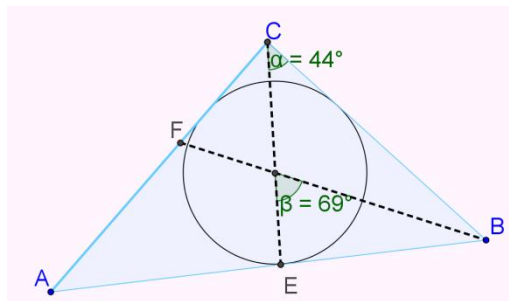
Temat: Okrąg wpisany w trójkąt - rozwiązywanie zadań

Praca z apilem *figury19*:

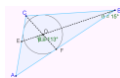
- Aplet pomoże ci w rozwiązywaniu zadań polegających na obliczaniu miar kątów w trójkącie opisanym na okręgu.
- Rozwiąż Zadanie 1, którego treść ukaże się po kliknięciu w przycisk **Zadanie 1**. Spróbuj pracować samodzielnie, jednak jeśli będziesz miał wątpliwości korzystaj ze wskazówek, które są ukryte pod kolejnymi polami wyboru. Opierając się na jego rozwiązaniu wykonaj poniższe zadanie.

Zadanie 1. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkącie ABC. Odcinki CE oraz BF zawierają się w dwusiecznych kątów

a)

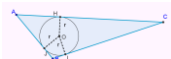


b)

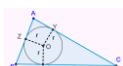


- Rozwiąż Zadanie 2, którego treść ukaże się po kliknięciu w przycisk **Zadanie 2**. Spróbuj pracować samodzielnie, jednak jeśli będziesz miał wątpliwości korzystaj ze wskazówek, które są ukryte pod kolejnymi polami wyboru. Opierając się na jego rozwiązaniu wykonaj poniższe zadania.

Zadanie 2. Oblicz obwód trójkąta ABC, jeśli $|AH| = 7\text{cm}$, $|BJ| = 270\text{mm}$ a $|CI| = 2,3\text{dm}$.



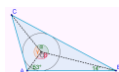
Zadanie 3. Oblicz pole trójkąta wiedząc, że X, Y i Z to punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z bokami a promień tego okręgu ma długość 3cm oraz $|BZ| = 3,6\text{cm}$, $|AY| = 0,43\text{dm}$ i $|XC| = 450\text{mm}$. Poprowadź odcinki łączące środek okręgu z wierzchołkami trójkąta i oblicz pole trójkąta ABC jako sumę pól utworzonych w ten sposób trójkątów.



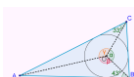
- Rozwiąż Zadanie 3 z apletu, którego treść ukaze się po kliknięciu w przycisk **Zadanie 3**. Spróbuj pracować samodzielnie, jednak jeśli będziesz miał wątpliwości korzystaj ze wskazówek, które są ukryte pod kolejnymi polami wyboru. Opierając się na jego rozwiązaniu wykonaj poniższe zadanie.

Zadanie 4. Podaj miary wszystkich kątów wewnętrznych w trójkącie ABC.

a)



b)



Temat: Wielokąt foremny. Miara kąta wewnętrznego wielokąta foremnego

Praca z apletem *figury20*:

- Aplet pokazuje wielokąt foremny o różnej liczbie boków i różnych długościach boków.
- Aplet ilustruje, w jaki sposób obliczyć miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego oraz jak wykorzystać tę umiejętność w rozwiązywaniu zadań.
- Kolejne części apletu są widoczne po kliknięciu w odpowiedni przycisk, pamiętaj, że przycisk Strona główna pozwoli Ci wrócić na początek apletu.

Zadanie 1. Otwórz aplet, zmieniaj liczbę boków wielokąta za pomocą suwaka. Obserwuj jak wyglądają te wielokąty. Uzupełnij zdania:

- a) Im większa liczba boków, tym wielokąt kształtem przypomina coraz bardziej.....
- b) Spośród trójkątów wielokątem foremnym jest, natomiast wśród czworokątów wielokątem foremnym jest

Zadanie 2. Przejdź do kolejnej części apletu, klikając przycisk *Jak obliczyć miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego?* Ustaw czarny suwak na wartość 6. Postaraj się obliczyć miarę kąta wewnętrznego sześciokąta foremnego. W razie problemów korzystaj z kolejnych wskazówek przesuważąc niebieski suwak.

Oblicz następnie miarę kąta wewnętrznego w 10- kącie foremnym. Sprawdź poprawność swoich obliczeń, korzystając z apletu (ustaw czarny suwak na 10).

Zadanie 3. Kliknij przycisk na stronie głównej *Spróbuj rozwiązać zadanie*, następnie przycisk *Zadanie*, pojawi się treść zadania oraz pola wyboru - kolejne wskazówki, które naprowadzą Cię na jego rozwiązanie. Wykonaj to zadanie. Postaraj się pracować samodzielnie, korzystaj z podpowiedzi, tylko w razie potrzeby.

Zadanie 4. Oblicz, w jakim wielokącie foremnym miara kąta wewnętrznego wynosi 160° .

Temat: Podstawowe wielokąty foremne ich własności, okręgi wpisane i opisane na wielokątach

Praca z apletem *figury21*:

- Aplet pokazuje podstawowe wielokąty foremne: trójkąt równoboczny, kwadrat oraz sześciokąt foremny.
- Kolejne przyciski przenoszą do ilustracji zależności między dwusiecznymi, symetralnymi oraz przekątnymi w tych figurach.
- Aplet przedstawia zależności między okręgiem opisanym oraz wpisanym w te wielokąty.

Zadanie 1. Otwórz aplet, kliknij przycisk *Trójkąt równoboczny*. Zmieniaj za pomocą myszy wielkość trójkąta (ciągnąc za punkty A lub B). Czy miary kątów wewnętrznych się zmieniają?

Zadanie 2. Kliknij przycisk *Konstrukcja trójkąta równobocznego*. zapoznaj się z nią a następnie skonstruuj trójkąt równoboczny o boku długości 3 cm w zeszyście.

Zadanie 3. Kliknij przycisk *Symetralne, dwusieczne i wysokości*. Włączaj kolejno poszczególne obiekty, obserwuj zależność między nimi. Spróbuj sformułować swoje spostrzeżenia, następnie sprawdź je klikając na wniosek. Zapisz go do zeszytu.

Zadanie 4. Przejdź do części *Okrąg opisany i wpisany w trójkąt równoboczny*, przeanalizuj jak narysować te okręgi. Zapisz wzory na długość ich promieni w zeszyście, a następnie oblicz:

- a) długość promienia okręgu opisanego na trójkącie o boku długości 6 cm
- b) długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt o boku długości 8 dm

Zadanie 5. Kolejnym wielokątem foremnym, jeśli chodzi o liczbę boków jest kwadrat. zapoznaj się z jego opisem, klikając przycisk *Kwadrat*. Narysuj dowolny kwadrat w zeszyście.

Zadanie 6. Kliknij przycisk *Symetralne i dwusieczne w kwadracie*. Włączaj kolejno poszczególne obiekty, obserwuj zależność między nimi. Spróbuj sformułować swoje spostrzeżenia, następnie sprawdź je klikając na wniosek. Zapisz go do zeszytu.

Zadanie 7. Przejdź do części *Okrąg opisany i wpisany w kwadrat*, przeanalizuj jak narysować te okręgi. Zapisz wzory na długość ich promieni w zeszyście, a następnie oblicz:

- a) długość promienia okręgu opisanego na kwadracie o boku długości 5 cm
- b) długość promienia okręgu wpisanego w kwadrat o boku długości 9 dm

Zadanie 8. Przejdź do kolejnej części apletu, kliknij przycisk *Sześciokąt foremny*. Zmieniaj za pomocą myszy wielkość trójkąta (ciągnąc za punkty A lub B). Czy miary kątów wewnętrznych się zmieniają?

Zadanie 9. Kliknij przycisk *Konstrukcja sześciokąta foremnego*. zapoznaj się z nią a następnie skonstruuj sześciokąt foremny o boku długości 2 cm w zeszycie.

Zadanie 10. Kliknij przycisk *Symetralne, dwusieczne i przekątne*. Włączaj kolejno poszczególne obiekty, obserwuj zależność między nimi. Spróbuj sformułować swoje spostrzeżenia, następnie omów je z kolegą z ławki oraz zweryfikuj na forum klasy. Uzupełnij tekst;

Punkt przecięcia siękątów oraz symetralnycha także dłuższych przekątnychpokrywa się.

Zadanie 11. Przejdź do części *Okrąg opisany i wpisany w sześciokąt foremny*, przeanalizuj jak narysować te okręgi. Zapisz wzory na długość ich promieni w zeszycie, a następnie oblicz:

- a) długość promienia okręgu opisanego na sześciokącie o boku długości 2 cm
- b) długość promienia okręgu wpisanego w sześciokąt o boku długości 4 m