



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla gimnazjów”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 20

Bryły:

21. Przykłady brył obrotowych
22. Walec - opis, siatka, przekroje
23. Obliczanie pól powierzchni walców
24. Obliczanie pól powierzchni walców w sytuacjach praktycznych
25. Obliczanie objętości walców
26. Zastosowanie tw. Pitagorasa do obliczania objętości walców
27. Stożek - opis, siatka, przekroje
28. Obliczanie pól powierzchni stożków
29. Zastosowanie tw. Pitagorasa do obliczania pól powierzchni stożków
30. Obliczanie objętości stożków
31. Obliczanie objętości stożków w sytuacjach praktycznych
32. Kula - opis, przekroje
33. Obliczanie pól powierzchni kul
34. Obliczanie objętości kul
35. Obliczanie objętości i pola powierzchni brył obrotowych

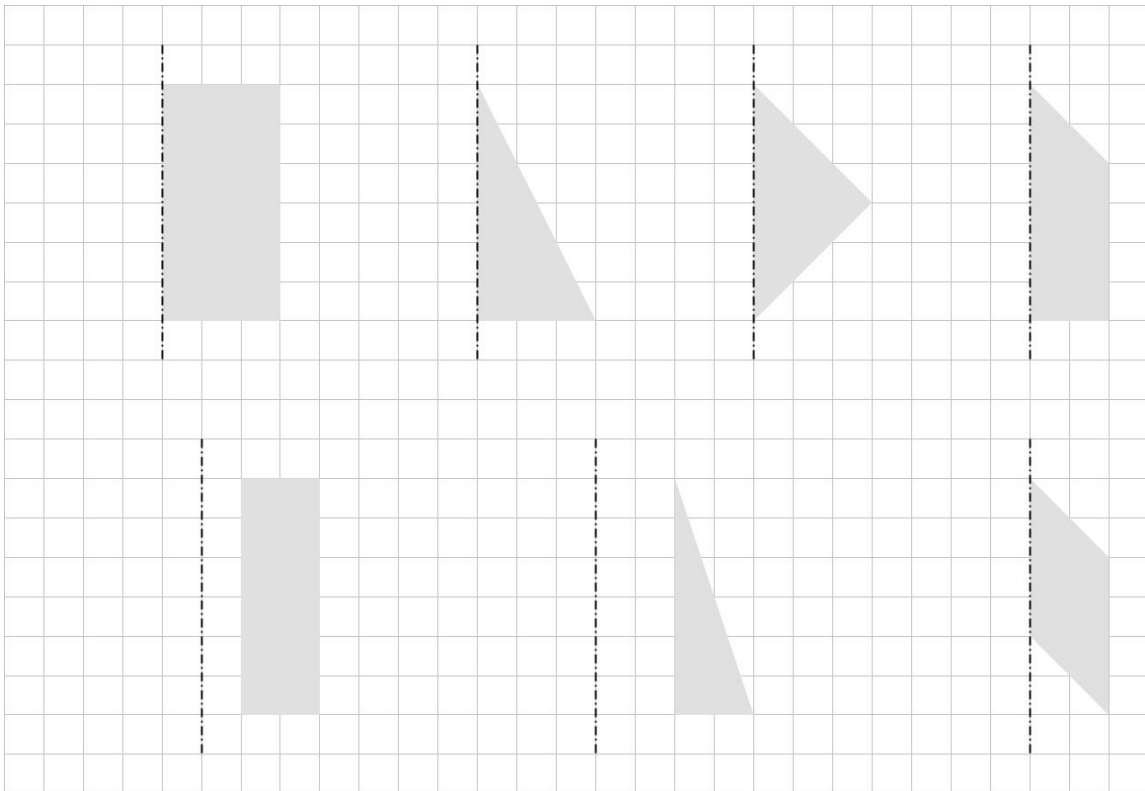
Opracowanie Jerzy Mil

Temat: Przykłady brył obrotowych

Praca z apletem *Bryły10*

Suwak zoom służy do zmiany wielkości rysunku, a zmiana położenia zielonego i czerwonego punktu na okręgach w tych samych kolorach pozwala na obracanie bryły. Zmieniając położenie granatowych punktów możesz ustalić kształt obracanego wielokąta.

Zadanie 1. Narysuj bryły obrotowe powstałe przez obrót wielokątów wokół zaznaczonej linią przerywaną osi.



Zadanie 2. Korzystając z powyższych rysunków uzupełnij poniższe zdania.

- Obracając prostokąt wokół jednego z boków otrzymamy
- Obracając trójkąt prostokątny wokół jednej z przyprostokątnych otrzymamy
- Obracając trójkąt prostokątny równoramienny wokół przeciwprostokątnej otrzymamy
- Obracając trapez prostokątny wokół dłuższej podstawy otrzymamy

Temat: Walec - opis, siatka, przekroje

Zadanie 1. Podaj promień, wysokość oraz tworzącą walca powstałego przez obrót prostokąta o bokach 12cm i 20cm wokół podanych w tabeli osi.

Oś	Promień walca	Wysokość walca	Tworząca walca
Prosta zawierająca krótszy bok			
Prosta zawierająca dłuższy bok			
Symetralna krótszego boku			
Symetralna dłuższego boku			

Praca z apletem *Bryły11*

Suwak zoom służy do zmiany wielkości rysunku, a zmiana położenia zielonego i czerwonego punktu na okręgach w tych samych kolorach pozwala na obracanie bryły. Suwaki r i h pozwalają ustalić odpowiednio promień i wysokość walca. Pole wyboru pozwala włączyć wyświetlanie wybranych przekrojów walca, typ przekroju wybieramy suwakiem n.

Zadanie 2. Uzupełnij zdania.

- Przekrój poprzeczny walca jest
- Przekrój osiowy walca jest

Praca z apletem *Bryły12*

Suwak r pozwala ustalić promień walca, a suwak h jego wysokość. Pole wyboru Legenda wyświetla objaśnienie użytych w aplecie kolorów (linie o jednakowej długości i powierzchni o tym samym polu mają ten sam kolor). Pole wyboru Pokaż pola figur wyświetla wartości liczbowe pól powierzchni.

Temat: Obliczanie pól powierzchni walców

Praca z apletem *Bryły12* (patrz temat: Walec – opis, siatka, przekroje)

Zadanie 1. Korzystając z apletu SiatkaWalca uzupełnij tabelę.

Promień walca	Wysokość walca	Pole podstawy	Pole powierzchni bocznej	Pole powierzchni całkowitej
1cm	5cm			
3cm	3cm			
4cm	1cm			
2cm	6cm			

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę.

Promień walca	Wysokość walca	Pole podstawy	Pole powierzchni bocznej	Pole powierzchni całkowitej
2cm			$8\pi\text{cm}^2$	
		$9\pi\text{cm}^2$	$12\pi\text{cm}^2$	
	1cm		$6\pi\text{cm}^2$	
	3cm	$4\pi\text{cm}^2$		
			$10\pi\text{cm}^2$	$12\pi\text{cm}^2$
		$16\pi\text{cm}^2$		$80\pi\text{cm}^2$

Zadanie 3. Ze wzoru $P_c = 2P_p + P_b$ wyznacz:

$$P_b = \dots\dots\dots$$

$$2P_p = \dots\dots\dots$$

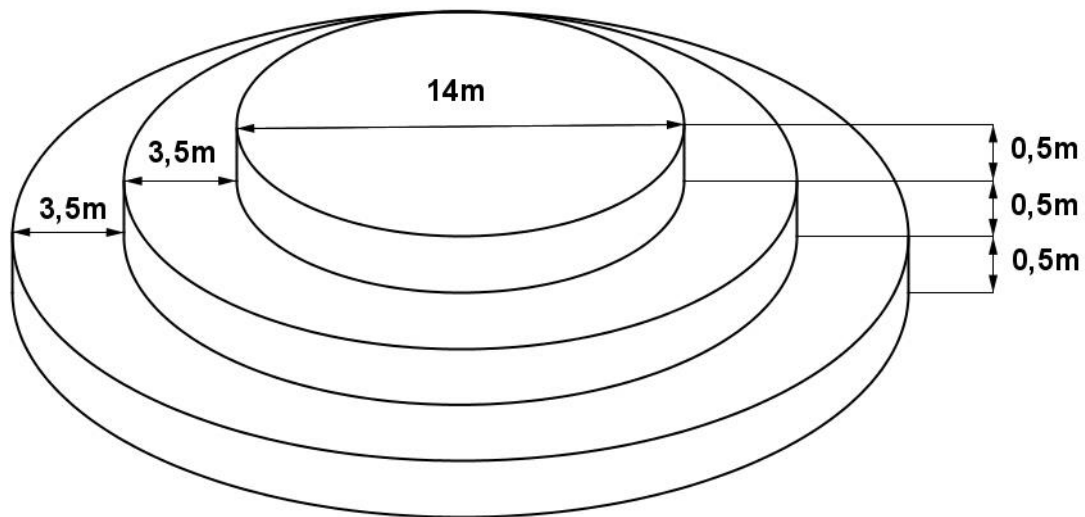
$$P_p = \dots\dots\dots$$

Temat: Obliczanie pól powierzchni walców w sytuacjach praktycznych

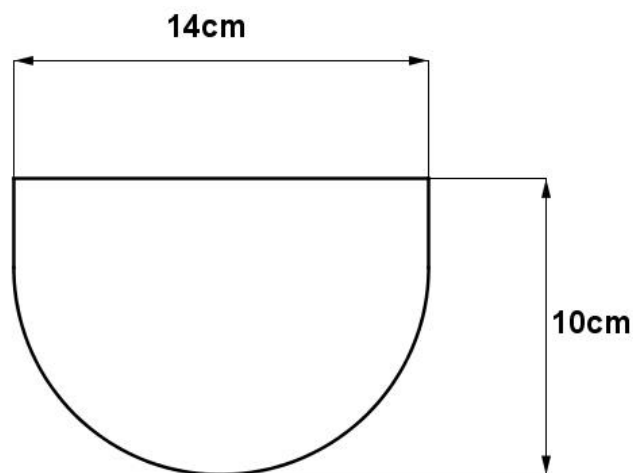
Zadanie 1. Basen fontanny ma kształt walca o średnicy 8m i wysokości 60cm. Oblicz koszt pokrycia basenu ceramicznymi płytkami, gdy 1m^2 płytek kosztuje 52zł. Przyjmij, że $\pi = 3,1$.

Zadanie 2. Wał drogowy ma średnicę 0,9m i szerokość 1,4m. Jaka powierzchnię wyrównał wał, jeśli obrócił się 1500 razy? Ile razy musiałby się obrócić wał o średnicy 0,7m i szerokości 1,5m, aby wyrównać taką samą powierzchnię? Przyjmij, że $\pi = 3,1$.

Zadanie 3. Scena w parku ma kształt trzech walców ustawionych jeden na drugim o wymiarach podanych na poniższym rysunku. Przed koncertem ma być ona dwukrotnie pomalowana? Ile puszek farby trzeba zakupić do pomalowania sceny, jeżeli jedna puszka wystarczy do jednokrotnego pomalowania 8m^2 powierzchni. Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.



Zadanie 4. Ile blachy potrzeba do wykonania rynny o długości 4m i półkolistym dnie, której przekrój poprzeczny przedstawiony jest na poniższym rysunku? Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.



Temat: Obliczanie objętości walców

Praca z apletem *Bryły03*

Suwak zoom służy do zmiany wielkości rysunku, a zmiana położenia zielonego i czerwonego punktu na okręgach w tych samych kolorach pozwala na obracanie bryły. Zwiększaj wartość suwaka n.

Zadanie 1. Jaką bryłę obrotową będziemy przybliżać zwiększając liczbę boków graniastosłupa?

Zadanie 2. Obracamy wokół podanej osi prostokąt o bokach 4cm i 6cm. Wyznacz promień i wysokość, oblicz objętość powstałego walca.

Oś	Promień walca	Wysokość walca	Objętość walca
Prosta zawierająca krótszy bok			
Prosta zawierająca dłuższy bok			
Symetralna krótszego boku			
Symetralna dłuższego boku			

Zadanie 3. Wyznacz ze wzoru na objętość walca

$$V = \pi r^2 h$$

$$r^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h = \underline{\hspace{2cm}}$$

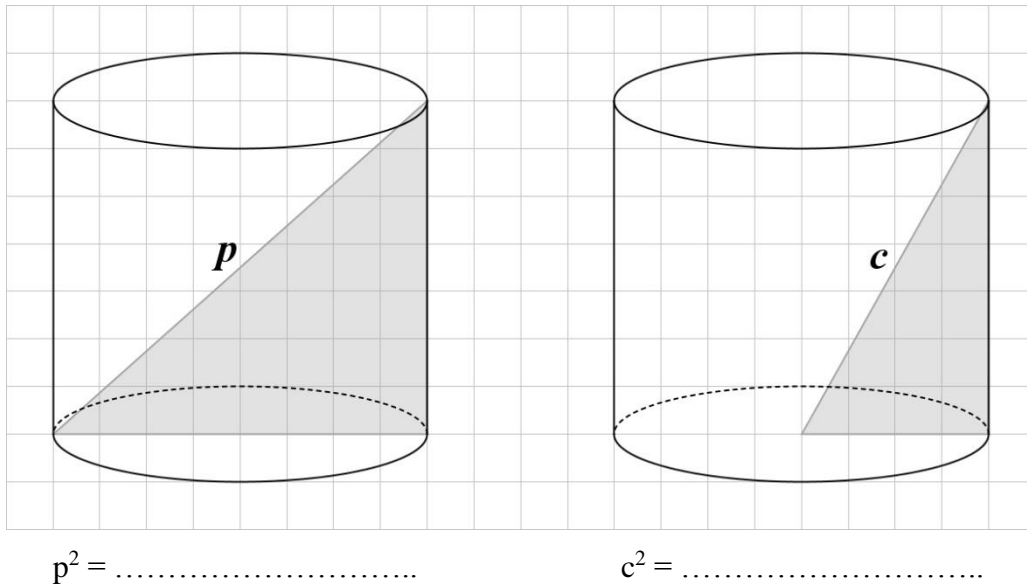
$$r = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$$

Zadanie 4. Uzupełnij tabelę

Promień walca	Wysokość walca	Objętość walca
2 cm		$40\pi \text{ cm}^3$
	7 cm	$63\pi \text{ cm}^3$
8 cm		$12\pi \text{ cm}^3$
	4 cm	$9\pi \text{ cm}^3$

Temat: Zastosowanie tw. Pitagorasa do obliczania objętości walców

Zadanie 1. Opisz długości odcinków w zaciętych trójkątach. Zaznacz kąt prosty. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa zapisz związki pomiędzy odcinkami.



Praca z apletem *Bryly13*

Suwakiem n zmieniasz ilustrację do zadania (zad. 2: $n=1$, zad. 3: $n=2$, zad. 4: $n=3$, zad. 5: $n=4$). Włączając pole wyboru Pokaż przekrój osiowy wyświetlisz prostokąt będący przekrojem osiowym walca. Pole wyboru Pokaż dane zaznacza na rysunku pomocniczym wielkości dane i szukane z zadania. Pole wyboru Pokaż odpowiedź wyświetla zależność pozwalającą obliczyć potrzebne w zadaniach wielkości.

Zadanie 2. Oblicz objętość walca, jeżeli przekątna jego przekroju osiowego ma długość 10cm a wysokość jest równa 6cm.

Zadanie 3. Promień walca ma długość 2,5dm, a przekątna przekroju osiowego ma 13dm. Jaką objętość ma walec?

Zadanie 4. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $12\sqrt{2}$ cm i tworzy ze średnicą walca kąt 45° . Oblicz objętość walca.

Zadanie 5. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z wysokością walca kąt 60° . Jaka jest objętość walca, jeżeli przekątna ma długość 16cm?

Temat: Stożek - opis, siatka, przekroje

Zadanie 1. Podaj tworzącą, promień i wysokość stożka powstałego przez obrót danego trójkąta wokół podanej osi.

Trójkąt	Oś	Promień	Wysokość	Tworząca
prostokątny o bokach 3cm, 4cm i 5cm	prosta zawierająca najkrótszy bok			
prostokątny o bokach 5cm, 12cm i 13cm	prosta zawierająca dłuższą przeciwprostokątną			
równoramienny o podstawie 16cm i ramieniu 10 cm	oś symetrii trójkąta			
równoramienny o podstawie 10cm i ramieniu 13cm	oś symetrii trójkąta			

Praca z apletem *Bryły15*

Suwak l pozwala ustalić długość tworzącej stożka, a suwak r jego promień. Pole wyboru Legenda wyświetla objaśnienie użytych w aplecie kolorów (linie o jednakowej długości mają ten sam kolor). Pole wyboru Pokaż pola figur wyświetla wartości liczbowe pól powierzchni, a pole Pokaż kąt środkowy wyświetla miarę kąta środkowego wycinka koła.

Zadanie 2. Korzystając z apletu *Bryły15* uzupełnij tabelę. Ustaw wartość suwaka l na 4,8. Włącz opcję Pokaż kąt środkowy. Dla jakich wartości r kąt środkowy przyjmuje wartości z pierwszego wiersza tabeli

	45°	60°	90°	180°	270°
r					
r:l					

Na podstawie tabeli zaproponuj sposób obliczenia kąta środkowego wycinka kołowego będącego powierzchnią boczną stożka.

$\alpha = \dots\dots\dots$

Praca z apletem *Bryły15*

Suwak zoom służy do zmiany wielkości rysunku, a zmiana położenia zielonego i czerwonego punktu na okręgach w tych samych kolorach pozwala na obracanie bryły. Suwaki r i h pozwalają ustalić odpowiednio promień i wysokość stożka. Pola wyboru wyświetlają przekrój osiowy, wysokość, tworzącą i promień stożka.

Zadanie 3. Uzupełnij zdania.

Przekrój osiowy stożka jest

.....

Przekrój poprzeczny stożka jest

.....

Temat: Obliczanie pól powierzchni stożków

Praca z apletem *Bryły15* (patrz temat: Stożek – opis, siatka, przekroje)

Zadanie 1. Korzystając z apletu SiatkaStozka uzupełnij tabelę.

Promień stożka	Tworząca stożka	Pole podstawy	Pole powierzchni bocznej	Pole powierzchni całkowitej
1 cm	2 cm			
2 cm	4 cm			
1 cm	4 cm			
2 cm	3 cm			

Zadanie 2. Ze wzoru $P_b = \pi r l$ wyznacz:

$r = \dots\dots\dots$

$l = \dots\dots\dots$

Zadanie 3. Ze wzoru $P_c = P_p + P_b$ wyznacz:

$P_b = \dots\dots\dots$

$P_p = \dots\dots\dots$

Zadanie 4. Uzupełnij tabelę.

Promień stożka	Tworząca stożka	Pole podstawy	Pole powierzchni bocznej	Pole powierzchni całkowitej
2 cm			$16\pi \text{ cm}^2$	
	7 cm		$21\pi \text{ cm}^2$	
		$9\pi \text{ cm}^2$	$15\pi \text{ cm}^2$	
	10cm	$16\pi \text{ cm}^2$		
		$4\pi \text{ cm}^2$		$24\pi \text{ cm}^2$
			$48\pi \text{ cm}^2$	$57\pi \text{ cm}^2$

Temat: Zastosowanie tw. Pitagorasa do obliczania pól powierzchni stożków

Zadanie 1. Uzupełnij wzory korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

$$l^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad r^2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad h^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$l = \sqrt{\hspace{2cm}} \quad r = \sqrt{\hspace{2cm}} \quad h = \sqrt{\hspace{2cm}}$$

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę

Promień stożka	Wysokość stożka	Tworząca stożka
8cm	15cm	
	40cm	41cm
20cm		29cm
6cm	14cm	
	9cm	20cm
10cm		30cm

Praca z apletem *Bryły13*

Suwakiem n zmieniasz ilustrację do zadania (zad. 3: $n=5$, zad. 4: $n=6$, zad. 5: $n=7$). Włączając pole wyboru Pokaż przekrój osiowy wyświetlisz trójkąt będący przekrojem osiowym stożka. Pole wyboru Pokaż dane zaznacza na rysunku pomocniczym wielkości dane i szukane z zadania. Pole wyboru Pokaż odpowiedź wyświetla zależność pozwalającą obliczyć potrzebne w zadaniach wielkości.

Zadanie 3. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka o wysokości 35cm i promieniu 12cm.

Zadanie 4. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka o tworzącej 20cm i wysokości 16cm.

Zadanie 5. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka, którego przekrój osiowy jest trójkątem prostokątnym równoramiennym o ramieniu 10cm.

Temat: Obliczanie objętości stożków

Zadanie 1. Uzupełnij tabelę.

Promień stożka	Wysokość stożka	Objętość stożka
2cm	6cm	
3cm	8cm	
4cm	12cm	

Zadanie 2. Przekształć wzór na objętość stożka

$$\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = V$$
$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \underline{\hspace{2cm}} \cdot V$$

$$r^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$r = \sqrt{\underline{\hspace{2cm}}}$$

$$\frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = V$$
$$\pi \cdot r^2 \cdot h = \underline{\hspace{2cm}} \cdot V$$

$$h = \underline{\hspace{2cm}}$$

Zadanie 3. Uzupełnij tabelę

Promień stożka	Wysokość stożka	Objętość stożka
	5cm	$\frac{20}{3}\pi \text{ cm}^3$
3cm		$21\pi \text{ cm}^3$
	11cm	$\frac{275}{3}\pi \text{ cm}^3$
7cm		$539\pi \text{ cm}^3$
	12cm	$400\pi \text{ cm}^3$
8cm		$\frac{832}{3}\pi \text{ cm}^3$

Zadanie 4. Uzupełnij zdanie

Jeżeli walec i stożek mają taką samą podstawę i równą objętość to wysokość stożka jest od wysokości walca.

Temat: Obliczanie objętości stożków w sytuacjach praktycznych

Zadanie 1. Gospodyni przygotowuje lody w pucharkach o kształcie stożka o wysokości 6cm i średnicy 14cm. Ile musi przygotować lodów do wypełnienia 15 pucharków? Przyjmij, że $\pi = \frac{22}{7}$.

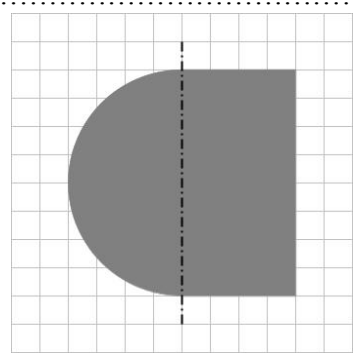
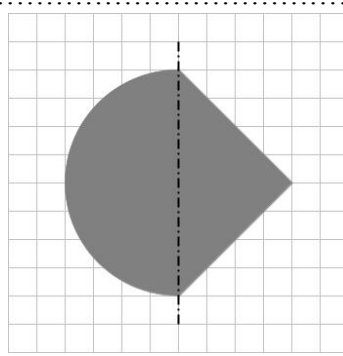
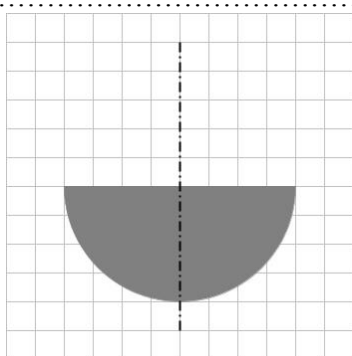
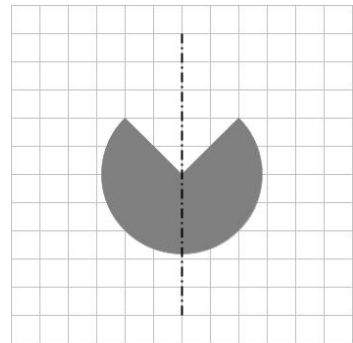
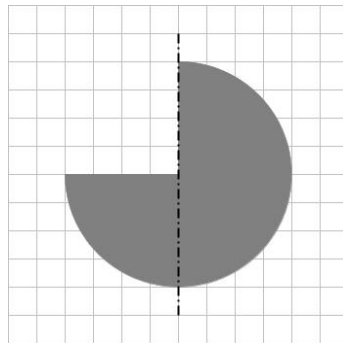
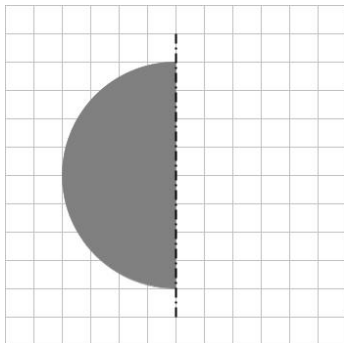
Zadanie 2. Rożek na cukierki został skleiony z wycinka koła o promieniu 13cm tak, że ma kształt stożka o średnicy 10cm. Oblicz objętość tego rożka. Przyjmij, że $\pi = 3,1$.

Zadanie 3. Zakupiono woskową świecę w kształcie walca o promieniu 6cm i wysokości 20cm. Postanowiono stopić ją i odlać świecek w kształcie stożków o promieniu 3cm i wysokości 10cm. Ile świecek można w ten sposób wykonać.

Zadanie 4. Pokrycie namiotu w kształcie stożka ma kształt wycinka koła o promieniu 4m i kącie środkowym 90° . Jaka jest objętość tego namiotu?

Temat: Kula - opis, przekroje

Zadanie 1. Czy obrót narysowanej figury wokół zaznaczonej osi utworzy kulę? Zapisz Tak albo Nie.



Praca z apletem *Bryły16*

Suwak zoom służy do zmiany wielkości rysunku, a zmiana położenia zielonego i czerwonego punktu na okręgach w tych samych kolorach pozwala na obracanie bryły. Suwak R pozwala ustalić promień kuli. Pole wyboru Promień kuli wyświetla odcinek będący promieniem kuli. Włączenie pola wyboru Przekrój wyświetla przekrój kuli oraz elementy sterujące nim: suwak a – zmieniający odległość płaszczyzny przekroju od środka kuli, pola wyboru Odległość środków kuli i przekroju, Promień przekroju i Promień kuli. Włączenie tych pól wyboru wyświetli na rysunku kuli podanych w opisie kul odcinków.

Zadanie 2. Uzupełnij zdania.

- Każdy przekrój kuli ma kształt
- Przekrój kuli ma największą powierzchnię, gdy zawiera
- Promień koła będącego nie może być większy niż

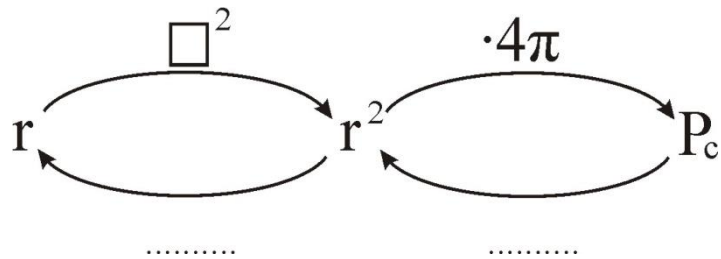
Zadanie 3. Kulę o promieniu 10cm przecięto płaszczyzną w odległości 4cm od środka kuli. Oblicz promień i pole powierzchni przekroju kuli.

Temat: Obliczanie pól powierzchni kul

Zadanie 1. Uzupełnij tabelę.

Promień kuli	Średnica kuli	Pole powierzchni kuli
2cm		
	5cm	
3,5cm		
	6cm	

Zadanie 2. Uzupełnij graf wpisując działania odwrotne. Uzupełnij wzór na promień kuli o danym polu powierzchni.



$$r = \sqrt{\frac{P_c}{4\pi}}$$

Zadanie 3. Korzystając z powyższego wzoru uzupełnij tabelę.

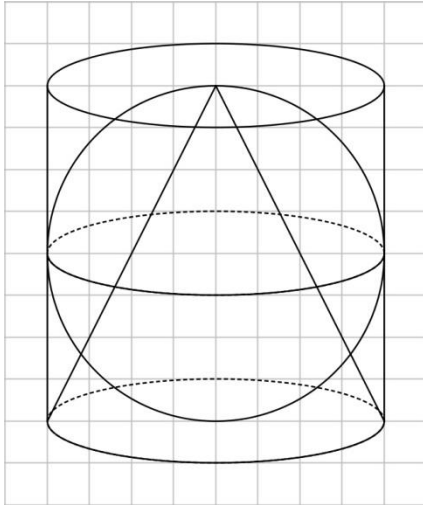
Promień kuli	Średnica kuli	Pole powierzchni kuli
		$16\pi \text{ cm}^2$
		$36\pi \text{ cm}^2$
		$9\pi \text{ cm}^2$
		$25\pi \text{ cm}^2$

Zadanie 4. Kulisty balon ma średnicę 6m. Oblicz pole powierzchni powłoki balonu.

Zadanie 5. Namiot typu igloo ma kształt połówki kuli o promieniu 1,2m. Oblicz powierzchnię dachu namiotu.

Temat: Obliczanie objętości kul

Zadanie 1. Uzupełnij luki we wzorach.



$$V_{\text{walca}} : V_{\text{kuli}} : V_{\text{stożka}} = 3 : 2 : 1$$

Wysokość walca i stożka: $h =$ _____

$$V_{\text{walca}} = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

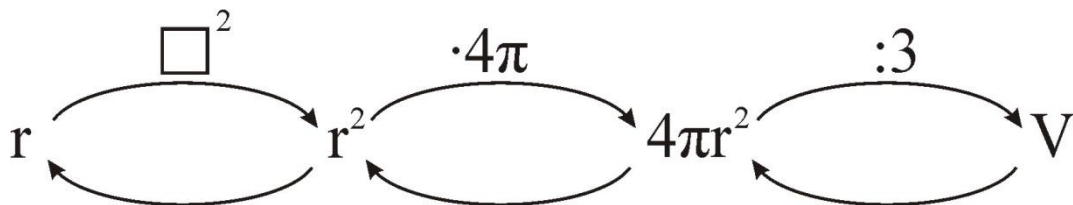
$$V_{\text{stożka}} = \frac{1}{3} V_{\text{walca}} = \frac{1}{3} \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$V_{\text{kuli}} = 2 \cdot V_{\text{stożka}} = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$$

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę

Promień kuli	Średnica kuli	Objętość kuli
1,5cm		
	6cm	
2cm		
	8cm	

Zadanie 3. Uzupełnij graf wpisując działania odwrotne. Uzupełnij wzór na promień kuli o danym polu powierzchni.



$$r = \sqrt{\frac{\quad \cdot V}{\quad}}$$

Zadanie 4. Korzystając z powyższego wzoru oblicz promień kuli o objętości $972\pi \text{ cm}^3$.

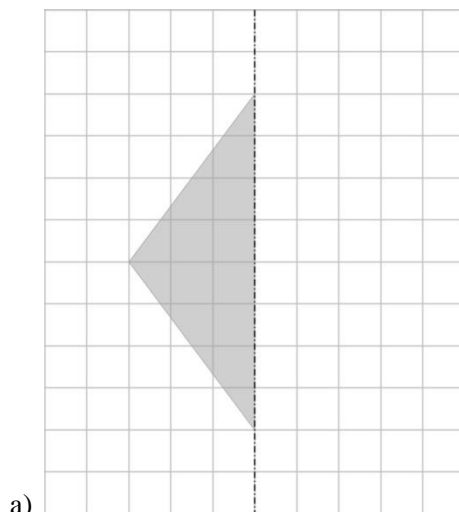
Zadanie 5. Woskowe kule o promieniach 1,5cm, 2cm i 2,5cm stopiono i sformowano z nich nową kulę. Oblicz jej promień.

Temat: Obliczanie objętości i pola powierzchni brył obrotowych

Praca z apletem *Bryły17*

Otwórz aplet. Suwakiem n zmieniasz kształt obracanej figury (1 – a, 2 – b, 3 – c itd.). Włączając pola wyboru: Opis słowny, Objętość bryły i Pole powierzchni całkowitej bryły uzyskasz odpowiedzi, dzięki którym sprawdzisz poprawność swoich odpowiedzi.

Zadanie 1. Bryła obrotowa powstaje poprzez obrót narysowanej figury wokół osi zaznaczonej przerywaną linią. Opisz jaka bryła obrotowa powstanie i podaj sposób obliczania objętości i pola powierzchni całkowitej powstałej bryły.



Opis słowny:

.....

Objętość bryły =

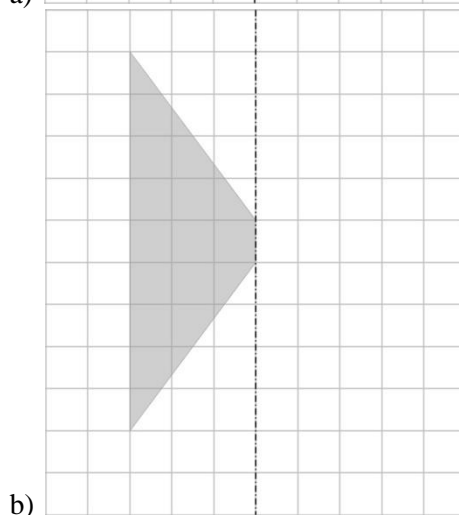
.....

.....

Pole powierzchni całkowitej bryły =

.....

.....



Opis słowny:

.....

Objętość bryły =

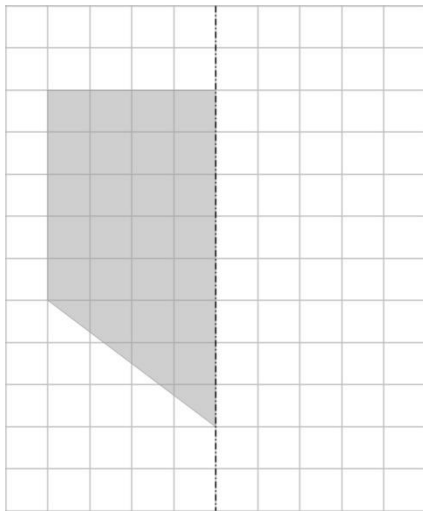
.....

.....

Pole powierzchni całkowitej bryły =

.....

.....

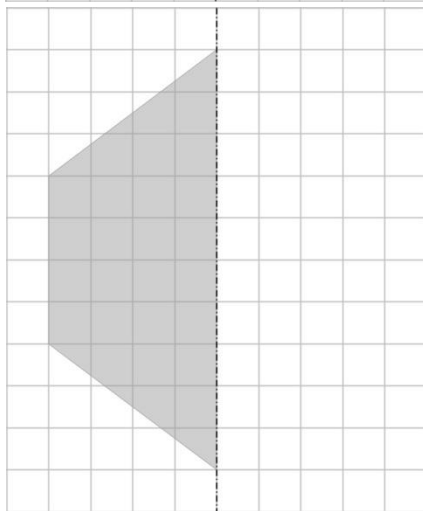


c)

Opis słowny:

Objętość bryły =

Pole powierzchni całkowitej bryły =

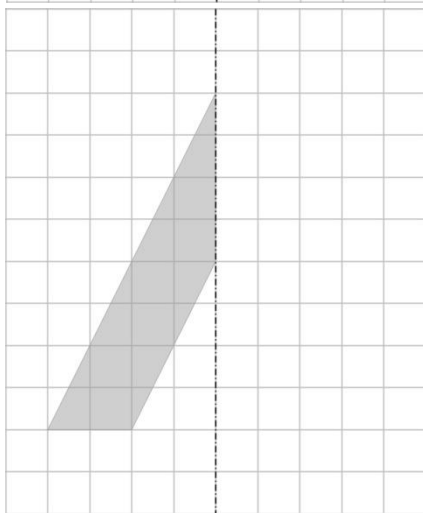


d)

Opis słowny:

Objętość bryły =

Pole powierzchni całkowitej bryły =



e)

Opis słowny:

Objętość bryły =

Pole powierzchni całkowitej bryły =

Zadanie 2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej brył z zadania 1a i 1b przyjmując, że 1 kratka odpowiada 1cm.

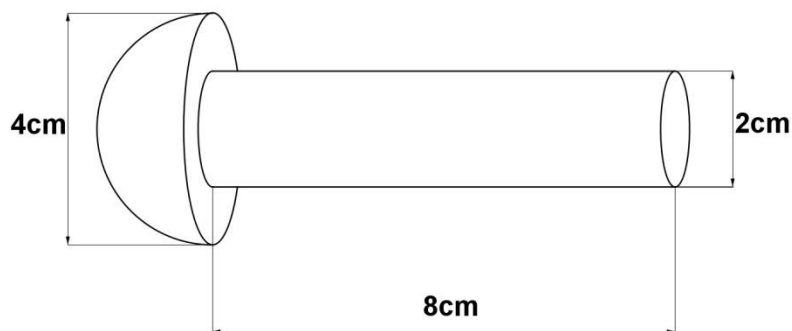
Temat: Obliczanie objętości i pola powierzchni brył obrotowych w sytuacjach praktycznych

Uwaga: W poniższych zadaniach przyjmij, że $\pi=3,1$

Zadanie 1. Hala planetarium ma kształt walca o promieniu 4,5m i wysokości 2m zwieńczonego półkulistą kopułą o tym samym promieniu.

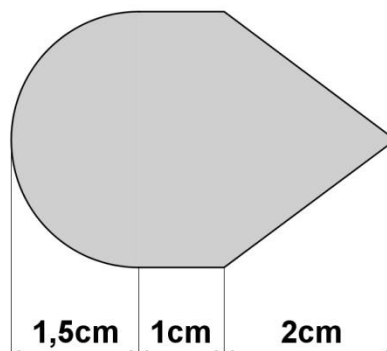
- Oblicz powierzchnię ścian planetarium
- Oblicz ile litrów powietrza mieści się w hali planetarium.

Zadanie 2. Stalowy trzpień ma kształt przedstawiony na rysunku poniżej.



- Oblicz jego wagę przyjmując, że gęstość stali to $7,5 \text{ g/cm}^3$.
- Trzpień ma być pokryty warstwą antykorozyjną. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego trzpienia.

Zadanie 3. Sporządzono wisiorek z miedzi, którego przekrój osiowy przedstawiono na rysunku.



- Oblicz wagę wisiorka, jeżeli gęstość miedzi wynosi 9 g/cm^3 .
- Producent chce pokryć wisiorek srebrem zużywając $0,1 \text{ g}$ srebra na 1 cm^2 powierzchni wisiorka. Oblicz ile srebra potrzeba na posrebrzenie jednego wisiorka.