KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KONKURS

„ZOSTAŃ EUKLIDESEM”

CZĘŚĆ I

Imię i nazwisko: ....

Szkoła: ....

1. Sprawdź, czy arkusz konkursowy zawiera 8 stron (zadania 1–20). Ewentualny brak zgłoś pracownikowi zespołu nadzorującego konkurs.

2. Test jest testem wielokrotnego wyboru.

3. Do każdego zadania są podane trzy odpowiedzi. Obok każdej z nich należy wpisać **TAK** jeśli odpowiedź jest poprawna lub **NIE** jeśli odpowiedź jest niepoprawna. Uczeń otrzymuje 0,5 pkt za każdą poprawnie zaznaczoną odpowiedź.

4. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym lub niebieskim tuszem lub atramentem.

5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.

6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.

7. Czas pracy 90 minut. Liczba punktów do uzyskania: 30

8. Przez zbiór liczb naturalnych rozumiemy zbiór złożony z liczb 0,1,2,3,4, ...

Wypełnia oceniający

Nr zad.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	
Pkt																					

28 kwietnia 2012

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Zadanie 1. (1,5 pkt) Wiadomo, że liczba $m = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ jest pierwiastkiem równania $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi i $a \neq 0$. Wynika z tego, że :

(a) równanie to nie ma innych pierwiastków

(b) $a = 1, b = -10, c = 1$

(c) drugim pierwiastkiem równania jest liczba $\frac{1}{m}$

Zadanie 2. (1,5 pkt) Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$, przy czym $a \neq 0$. Jeśli $f(n) > 0$ dla każdej liczby naturalnej n, to:

(a) $a > 0$

(b) $b > 0$

(c) $c > 0$

Zadanie 3. (1,5 pkt) Układ równań $xy = a^2$ i $x^2 + y^2 = b^2$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, może w zależności od wartości parametrów a, b:

(a) nie mieć rozwiązań

(b) mieć dokładnie jedno rozwiązanie

(c) mieć dokładnie dwa rozwiązania

Zadanie 4. (1,5 pkt) Rozwiązaniem nierówności $ax^2 + bx + c < 0$ jest przedział (α, β). Wówczas dla $a, b, \alpha, \beta \neq 0$ zachodzi:

(a) $a > 0$

(b) $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

(c) $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$

Zadanie 5. (1,5 pkt) W równaniu $x^2 + 2x + c = 0$ współczynnik c jest dodatni oraz $\Delta > 0$. Wówczas:

(a) $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$

(b) $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$

(c) $x_1 < 0$ i $x_2 > 0$

Zadanie 6. (1,5 pkt) Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x - x^2}$. Wówczas:

(a) dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle 0, 1\rangle$

(b) zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$

(c) $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$

Zadanie 7. (1,5 pkt) Funkcja $f(x) = x^2 + ax + b$ ma ten sam niepusty zbiór miejsc zerowych, co funkcja $g(x) = ax + b$. Warunek ten:

(a) oznacza, że zbiorem miejsc zerowych jest $\{0\}$

(b) oznacza, że $b = 0$

(c) nigdy nie jest spełniony

Zadanie 8. (1,5 pkt) Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $x(x-3)(x^2-3) \leqslant 0$:

(a) ma element największy

(b) ma element najmniejszy

(c) jest ograniczony z góry

Zadanie 9. (1,5 pkt) Wielomian $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^m + x^{m-1} + ... + x + 1$, jeśli:

(a) n dzieli się przez m

(b) $n + 1$ dzieli się przez $m + 1$

(c) liczby n i m są obie parzyste lub obie nieparzyste

Zadanie 10. (1,5 pkt) Dane są wielomiany $W(x) = x^4+ax^2+(a+6)x+3$ oraz $V(x) = x^3 - x^2 + (a + 1)x + 4$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wówczas:

(a) jeśli dla pewnej wartości parametru a wielomiany te mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to jest on liczbą całkowitą

(b) jeśli dla pewnej wartości parametru a wielomiany te mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to jest on równy 1

(c) istnieją co najmniej dwie wartości parametru a, dla których te wielomany mają wspólny pierwiastek rzeczywisty

Zadanie 11. (1,5 pkt) Pierwiastkami równania $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ są 2 i 3. Jeśli trzeci pierwiastek równania jest liczbą całkowitą, to:

(a) $b^2 - 4ac > 0$

(b) $2a + 3b > c$

(c) c jest liczbą całkowitą podzielną przez 6

Zadanie 12. (1,5 pkt) Niech $W(x) = x^4 + 4$. Wówczas:

(a) wielomian W nie ma pierwiastów rzeczywistych

(b) wielomian W nie jest iloczynem wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopni niższych niż 4

(c) liczba $W(0)$ jest największą wartością funkcji $f(x) = W(x) + 4x^2$

Zadanie 13. (1,5 pkt) Niech $f(x) = \frac{7x+2}{x+1}$. Wówczas:

(a) jeśli x_1 i x_2 są różne od -1 oraz $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$

(b) dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje taka liczba rzeczywista b, że $a = f(b)$

(c) wykres funkcji f przecina obie osie układu współrzędnych

Zadanie 14. (1,5 pkt) W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w takim punkcie P, że pola trójkątów ADP i BCP są równe. Wynika z tego, że czworokat ten jest:

(a) kwadratem

(b) rombem

(c) trapezem równoramiennym

Zadanie 15. (1,5 pkt) Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta prostokątnego; przez r długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; zaś przez R długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Wówczas:

(a) jeśli $2R = c$, to bok o długości c jest przeciwprostokątną tego trójkąta

(b) jeśli $r(a + b + c) = ab$, to boki o długościach a, b są przyprostokątnymi tego trójkąta

(c) jeśli boki o długościach a, b są przyprostokątnymi tego trójkąta, to $a + b = 2r + 2R$

Zadanie 16. (1,5 pkt) Na każdym boku kwadratu o boku długości a wybieramy po jednym punkcie tak, by stanowiły one wierzchołki pewnego rombu. Wówczas:

(a) środek symetrii takiego rombu pokrywa się ze środkiem symetrii kwadratu

(b) każdy taki romb jest kwadratem

(c) najmniejsza wartość pola takiego rombu wynosi $\frac{a^2}{2}$

Zadanie 17. (1,5 pkt) Miary czterech kątów, które w sumie tworzą kąt pełny, pozostają w stosunku $2 : 1 : 5 : 4$. Wówczas:

(a) jeden z tych kątów jest prosty

(b) kąty te mogą być wszystkimi kątami wewnętrznymi pewnego trapezu

(c) trzy z tych kątów mogą być wszystkimi kątami wewnętrznymi pewnego trójkąta

Zadanie 18. (1,5 pkt) Niech h_A, h_B, h_C oznaczają długości wysokości trójkąta ABC. Można zbudować trójkąt z odcinków o długościach:

(a) h_A, h_B, h_C

(b) h_A^2, h_B^2, h_C^2

(c) $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}, \frac{1}{h_C}$

Zadanie 19. (1,5 pkt) Dwa czworokąty wypukłe są przystające, jeśli:

(a) długości boków jednego z nich są równe długościom odpowiednich boków drugiego z nich

(b) długości odpowiadających sobie przekątnych są sobie równe

(c) miary odpowiadających sobie kątów są równe

Zadanie 20. (1,5 pkt) W trójkącie ABC punkty A', B', C' są środkami jego boków. Wówczas:

(a) wysokości trójkąta $A'B'C'$ zawierają się w odpowiednich symetralnych boków trójkąta ABC

(b) jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie ABC nie należy do trójkąta ABC, to również środek okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$ nie należy do trójkąta $A'B'C'$

(c) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$

BRUDNOPIS