KONKURS

„ZOSTAŃ EUKLIDESEM”

Klucz odpowiedzi

2012

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

TEST WIELOKROTNEGO WYBORU - ROZWIĄZANIA

W teście wielokrotnego wyboru oceniamy każdą z trzech możliwych odpowiedzi. Do każdego zadania są podane trzy odpowiedzi. Obok każdej z nich należy wpisać TAK jeśli odpowiedź jest poprawna lub NIE jeśli odpowiedź jest niepoprawna. Uczeń otrzymuje $0,5$ pkt za każdą poprawnie zaznaczoną odpowiedź.

Numer pytania	(a)	(b)	(c)
1	NIE	NIE	TAK
2	TAK	NIE	TAK
3	TAK	NIE	TAK
4	TAK	TAK	NIE
5	TAK	NIE	NIE
6	TAK	TAK	NIE
7	NIE	NIE	TAK
8	NIE	TAK	TAK
9	NIE	TAK	NIE
10	TAK	TAK	NIE
11	TAK	NIE	TAK
12	TAK	NIE	NIE
13	NIE	NIE	TAK
14	NIE	NIE	NIE
15	TAK	TAK	TAK
16	TAK	TAK	TAK
17	NIE	TAK	NIE
18	NIE	NIE	TAK
19	NIE	NIE	NIE
20	TAK	TAK	TAK

TEST WIELOKROTNEGO WYBORU

1. Wiadomo, że liczba $m = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ jest pierwiastkiem równania $ax^2+bx+c=0$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi i $a \neq 0$. Wynika z tego, że :
   (a) równanie to nie ma innych pierwiastków NIE
   (b) $a = 1, b = -10, c = 1$ NIE
   (c) drugim pierwiastkiem równania jest liczba $\frac{1}{m}$ TAK

2. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$, przy czym $a \neq 0$. Jeśli $f(n) > 0$ dla każdej liczby naturalnej n, to:
   (a) $a > 0$ TAK
   (b) $b > 0$ NIE
   (c) $c > 0$ TAK

3. Układ równań $xy = a^2$ i $x^2 + y^2 = b^2$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, może w zależności od wartości parametrów a, b:
   (a) nie mieć rozwiązań TAK
   (b) mieć dokładnie jedno rozwiązanie NIE
   (c) mieć dokładnie dwa rozwiązania TAK

4. Rozwiązaniem nierówności $ax^2 + bx + c < 0$ jest przedział (α, β). Wówczas dla $a, b, \alpha, \beta \neq 0$ zachodzi:
   (a) $a > 0$ TAK
   (b) $\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$ TAK
   (c) $\alpha + \beta = \frac{b}{a}$ NIE

5. W równaniu $x^2 + 2x + c = 0$ współczynnik c jest dodatni oraz $\Delta > 0$. Wówczas:

   (a) $x_1 < 0$ i $x_2 < 0$ TAK
   (b) $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$ NIE
   (c) $x_1 < 0$ i $x_2 > 0$ NIE

6. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{x - x^2}$. Wówczas:

   (a) dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle 0, 1\rangle$ TAK
   (b) zbiorem wartości tej funkcji jest przedział $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$ TAK
   (c) $f(\frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$ NIE

7. Funkcja $f(x) = x^2 + ax + b$ ma ten sam niepusty zbiór miejsc zerowych, co funkcja $g(x) = ax + b$. Warunek ten:

   (a) oznacza, że zbiorem miejsc zerowych jest $\{0\}$ NIE
   (b) oznacza, że $b = 0$ NIE
   (c) nigdy nie jest spełniony TAK

8. Zbiór liczb niewymiernych spełniających nierówność $x(x-3)(x^2-3) \leqslant 0$:

   (a) ma element największy NIE
   (b) ma element najmniejszy TAK
   (c) jest ograniczony z góry TAK

9. Wielomian $x^n + x^{n-1} + ... + x + 1$ jest podzielny przez wielomian $x^m + x^{m-1} + ... + x + 1$, jeśli:

   (a) n dzieli się przez m NIE
   (b) $n + 1$ dzieli się przez $m + 1$ TAK

(c) liczby n i m są obie parzyste lub obie nieparzyste NIE

10. Dane są wielomiany $W(x) = x^4 + ax^2 + (a+6)x + 3$ oraz $V(x) = x^3 - x^2 + (a+1)x + 4$, gdzie a jest pewną liczbą rzeczywistą. Wówczas:

    (a) jeśli dla pewnej wartości parametru a wielomiany te mają wspólny pierwiastek, to jest on liczbą całkowitą TAK

    (b) jeśli dla pewnej wartości parametru a wielomiany te mają wspólny pierwiastek, to jest on równy 1 TAK

    (c) istnieją co najmniej dwie wartości parametru a, dla których te wielomany mają wspólny pierwiastek NIE

11. Pierwiastkami równania $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ są 2 i 3. Jeśli trzeci pierwiastek równania jest liczbą całkowitą, to:

    (a) $b^2 - 4ac > 0$ TAK

    (b) $2a + 3b > c$ NIE

    (c) c jest liczbą całkowitą podzielną przez 6 TAK

12. Niech $W(x) = x^4 + 4$. Wówczas:

    (a) wielomian W nie ma pierwiastów rzeczywistych TAK

    (b) wielomian W nie jest iloczynem wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopni niższych niż 4 NIE

    (c) liczba $W(0)$ jest największą wartością funkcji $f(x) = W(x) + 4x^2$ NIE

13. Niech $f(x) = \frac{7x+2}{x+1}$. Wówczas:

    (a) jeśli x_1 i x_2 są różne od -1 oraz $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ NIE

    (b) dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje taka liczba rzeczywista b, że $a = f(b)$ NIE

(c) wykres funkcji f przecina obie osie układu współrzędnych TAK

14. W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne przecinają się w takim punkcie P, że pola trójkątów ADP i BCP są równe. Wynika z tego, że czworokat ten jest:

    (a) kwadratem NIE

    (b) rombem NIE

    (c) trapezem równoramiennym NIE

15. Oznaczmy przez a, b, c długości boków trójkąta prostokątnego; przez r długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt; zaś przez R długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie. Wówczas:

    (a) jeśli $2R = c$, to bok o długości c jest przeciwprostokątną tego trójkąta TAK

    (b) jeśli $r(a+b+c) = ab$, to boki o długościach a, b są przyprostokątnymi tego trójkąta TAK

    (c) jeśli boki o długościach a, b są przyprostokątnymi tego trójkąta, to $a + b = 2r + 2R$ TAK

16. Na każdym boku kwadratu o boku długości a wybieramy po jednym punkcie tak, by stanowiły one wierzchołki pewnego rombu. Wówczas:

    (a) środek symetrii takiego rombu pokrywa się ze środkiem symetrii kwadratu TAK

    (b) każdy taki romb jest kwadratem TAK

    (c) najmniejsza wartość pola takiego rombu wynosi $\frac{a^2}{2}$ TAK

17. Miary czterech kątów, które w sumie tworzą kąt pełny, pozostają w stosunku $2 : 1 : 5 : 4$. Wówczas:

    (a) jeden z tych kątów jest prosty NIE

(b) kąty te mogą być wszystkimi kątami wewnętrznymi pewnego trapezu TAK

(c) trzy z tych kątów mogą być wszystkimi kątami wewnętrznymi pewnego trójkąta NIE

18. Niech h_A, h_B, h_C oznaczają długości wysokości trójkąta ABC. Można zbudować trójkąt z odcinków o długościach:

    (a) h_A, h_B, h_C NIE

    (b) h_A^2, h_B^2, h_C^2 NIE

    (c) $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}, \frac{1}{h_C}$ TAK

19. Dwa czworokąty wypukłe są przystające, jeśli:

    (a) długości boków jednego z nich są równe długościom odpowiednich boków drugiego z nich NIE

    (b) długości odpowiadających sobie przekątnych są sobie równe NIE

    (c) miary odpowiadających sobie kątów są równe NIE

20. W trójkącie ABC punkty A', B', C' są środkami jego boków. Wówczas:

    (a) wysokości trójkąta $A'B'C'$ zawierają się w odpowiednich symetralnych boków trójkąta ABC TAK

    (b) jeśli środek okręgu opisanego na trójkącie ABC nie należy do trójkąta ABC, to również środek okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$ nie należy do trójkąta $A'B'C'$ TAK

    (c) promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest dwa razy dłuższy od promienia okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$ TAK

ZADANIA OTWARTE - KLUCZ ODPOWIEDZI

1. Jeżeli uczeń popełni błąd w obrębie jednego kryterium, to otrzymuje za to kryterium 0 punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo tego błędu ma poprawny tok rozumowania, to otrzymuje dalsze punkty zgodnie z kryteriami.
3. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiąże zadanie inną metodą, niż zaproponowana w kluczu, to otrzymuje za to zadanie maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. (4 punkty)

Funkcja kwadratowa

$$f(x) = x^2 + px + q$$

ma dwa różne miejsca zerowe. Znaleźć wzór funkcji kwadratowej g, której miejsca zerowe są liczbami o 1 większymi od miejsc zerowych funkcji f.

Rozwiązanie - punktacja.

1. Wykorzystanie wzorów Viete'a dla funkcji f - **1 punkt**

   Oznaczmy przez x_1, x_2 miejsca zerowe funkcji $f(x) = x^2 + px + q$. Ze wzorów Viete'a mamy wtedy

   $$x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q.$$

2. Wykorzystanie wzorów Viete'a dla szukanej funkcji g - **1 punkt**

   Niech szukana funkcja g dana będzie wzorem

   $$g(x) = x^2 + bx + c.$$

   Jej miejscami zerowymi są z założenia liczby $x_1 + 1,\ x_2 + 1$. Ponownie korzystając ze wzorów Viete'a dostajemy, że

   $$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -b,\ (x_1 + 1) \cdot (x_2 + 1) = c.$$

3. Wyznaczenie współczynników szukanej funkcji g - **1 punkt**

Mamy więc

$$x_1 + x_2 + 2 = -b, \; x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = c.$$

Otrzymujemy stąd, że

$$b = p - 2, \; c = q - p + 1,$$

a więc szukana funkcja g jest postaci

$$g(x) = x^2 + (p - 2)x + (q - p + 1).$$

4. Wyznaczenie wszystkich funkcji spełniających warunki zadania - **1 punkt**

Zauważmy, że warunki zadania spełnia każda funkcja postaci

$$g(x) = a(x^2 + (p - 2)x + (q - p + 1)), \; a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Zadanie 2. (6 punktów)

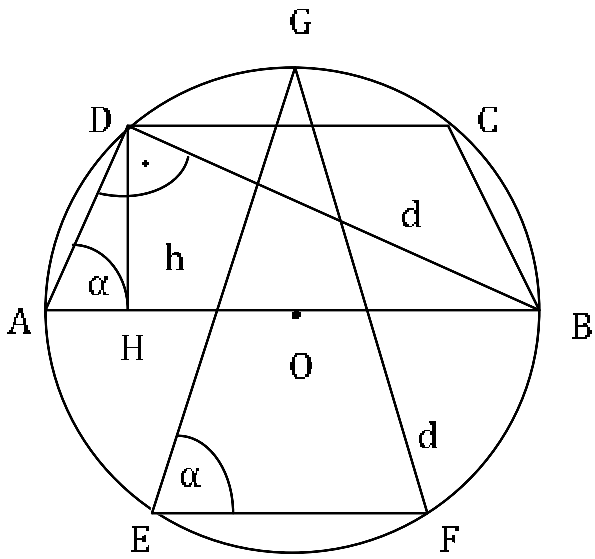
W okrąg wpisano trapez równoramienny o dłuższej podstawie będącej średnicą okręgu oraz trójkąt o bokach równoległych do boków tego trapezu. Udowodnić, że trapez i trójkąt mają równe pola.

Rozwiązanie + punktacja.

1. Wykonanie odpowiedniego rysunku - **1 punkt**

Rysunek 1. przedstawia figury z treści zadania.

Rysunek 1.



2. Zauważenie, że kąt przy podstawie trapezu i kąt przy podstawie trójkąta mają równe miary oraz, że kąt między przekątna trapezu a jego bokiem jest kątem prostym - **2 punkty**

   Zauważmy, że ponieważ trapez i trójkąt mają boki równoległe, to $\angle DAB$ i $\angle GEF$ mają równe miary (oznaczmy je przez α), a tym samym łuki DCB i GCF mają równe długości, stąd bok trójkąta i przekątna trapezu mają też równe długości (oznaczmy je przez d).

   Ponadto $\angle ADB$, jako kąt wpisany oparty na średnicy okręgu, jest kątem prostym.

3. Obliczenie pola trójkąta - **1 punkt**

   Pole trójkąta EFG jest równe

   $$P_1 = \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot |EG| \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot \cos\alpha \cdot d \cdot \sin\alpha = d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

4. Obliczenie pola trapezu - **2 punkty**

Pole trapezu $ABCD$ jest z kolei równe

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot h,$$

gdzie h oznacza długość wysokości tego trapezu. Z trójkąta prostokątnego ABD otrzymujemy, że

$$|AB| = \frac{d}{\sin\alpha},\ h = d\cdot\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = d\cdot\cos\alpha,\ |AH| = h\cdot\cot\alpha = d\cdot\cos\alpha\cdot\cot\alpha = d\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},$$

a stąd mamy, że

$$|CD| = |AB| - 2 \cdot |AH|,$$

a więc

$$|AB|+|CD| = 2\cdot|AB|-2\cdot|AH| = 2\cdot\frac{d}{\sin\alpha} - 2\cdot d\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot d \cdot (1 - \cos^2\alpha)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot d \cdot \sin^2\alpha}{\sin\alpha} = 2 \cdot d \cdot \sin\alpha.$$

Pole trapezu jest więc równe

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot d \cdot \sin\alpha \cdot d \cdot \cos\alpha = d^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że

$$P_1 = P_2,$$

czyli trójkąt i trapez z treści zadania mają równe pola.

Zadanie 3. (4 punkty)

Dany jest wielomian

$$W(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x.$$

Udowodnić, że wartość $W(n)$ tego wielomianu dla dowolnej liczby naturalnej n jest podzielna przez 12. Dla jakich naturalnych n liczba $W(n)$ nie jest podzielna przez 60?

Rozwiązanie - punktacja.

1. Zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej - **1 punkt**

   Zapisując wielomian W w postaci iloczynowej otrzymujemy

   $$W(x) = (x-1)x(x+1)(x+2).$$

2. Zauważenie, że liczba $W(n)$ jest podzielna przez 12 dla wszystkich n - **1 punkt**

   Dla dowolnej liczby naturalnej n (przyjmujemy, że $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$) liczba

   $$W(n) = (n-1)n(n+1)(n+2)$$

   jest iloczynem czterech kolejnych liczb naturalnych, wśród których jest na pewno liczba podzielna przez 3 i liczba podzielna przez 4, a więc $W(n)$ dzieli się przez 12.

3. Zauważenie, dla jakich n liczba $W(n)$ nie jest podzielna przez 60 - **2 punkty**

   Aby liczba $W(n)$ nie była podzielna przez 60, wśród liczb

   $$n-1,\ n,\ n+1,\ n+2$$

   nie może być liczby podzielnej przez 5. Warunek ten bedzie spełniony, jeśli np.

   $$n+2 = 5k-1,$$

   gdzie k jest liczbą naturalną, czyli

   $$n = 5k-3,$$

   gdzie k jest liczbą naturalną.

Zadanie 4. (5 punktów)

Dla jakich wartości parametru a dziedziną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2}}$$

jest zbiór liczb rzeczywistych?

Rozwiązanie - punktacja.

1. Zauważenie, że dziedziną funkcji f będzie zbiór liczb rzeczywistych, jeśli funkcja podpierwiastkowa będzie przyjmować wartości dodatnie dla wszystkich rzeczywistych x - **1 punkt**

   Oznaczmy funkcję podpierwiastkową przez g. Mamy wtedy

   $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2}} = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}.$$

   Dziedziną funkcji f będzie zbiór liczb rzeczywistych, jeśli funkcja g będzie przyjmować wartości dodatnie dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

2. Rozważenie przypadku, gdy funkcja podpierwiastkowa jest funkcją liniową **- 1 punkt**

   Zauważmy, że jeśli

   $$a^2 - 1 = 0,$$

   to funkcja g jest funkcją liniową.
   Dla $a = 1$ otrzymujemy $g(x) \equiv 2$, a więc $a = 1$ spełnia warunki zadania.
   Dla $a = -1$ mamy z kolei $g(x) = -4x + 2$, a więc $a = -1$ nie spełnia warunków zadania.

3. Rozważenie przypadku, gdzy funkcja podpierwiastkowa jest funkcją kwadratową **- 2 punkty**

   Jeśli

   $$a^2 - 1 \neq 0,$$

   to funkcja g jest funkcją kwadratową. Będzie ona przyjmować wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, jeśli

   $$(a^2 - 1 > 0) \wedge (\Delta < 0).$$

Pierwszy z warunków jest spełniony dla

$$a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego $(a^2-1)x^2+2(a-1)x+2$ otrzymujemy

$$\Delta = 4(a-1)^2-8(a^2-1) = -4a^2-8a+12 = -4(a^2+2x-3) = -4(a-1)(a+3).$$

Warunek drugi jest więc spełniony dla

$$a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

4. Wyznaczenie tych wartości parametru a, które spełniają warunki zadania - **1 punkt**

Ostatecznie dziedziną funkcji f jest zbiór liczb rzeczywistych dla

$$a \in (-\infty, -3) \cup \langle 1, \infty).$$

Zadanie 5. (6 punktów)

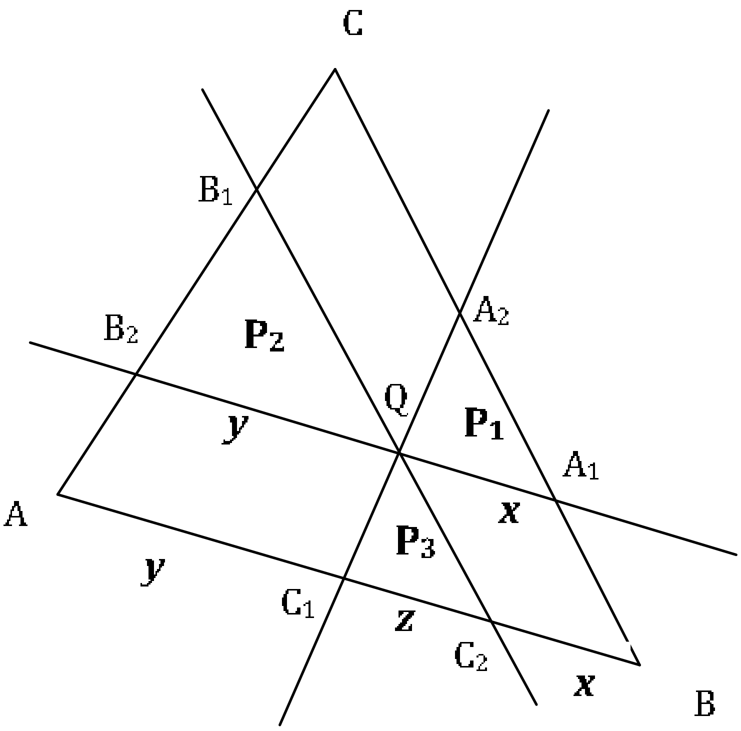
Przez punkt wewnętrzny Q trójkąta ABC poprowadzono proste równoległe do boków trójkąta. Proste te dzielą trójkąt na sześć części, z których trzy są trójkątami o polach P_1, P_2, P_3. Obliczyć pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie - punktacja.

1. Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń - **1 punkt**

Wewnątrz trójkąta ABC wybieramy punkt Q (jak na rysunku 2). Przez punkt Q prowadzimy proste równoległe do boków trójkąta. Oznaczmy punkty przecięcia tych prostych z bokami trójkąta przez $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$.

Rysunek 2.



Przyjmijmy, że pole trójkąta ABC jest równe P, pole trójkąta A_1A_2Q jest równe P_1, pole trójkąta B_1B_2Q jest równe P_2, zaś pole trójkąta C_1C_2Q jest równe P_3.

2. Zauważenie podobieństwa trójkąta ABC do trójkątów powstałych z jego podziału i wyznaczenie skali tych podobieństw - **2 punkty**

Zauważmy, że trójkąt QA_1A_2 jest podobny do trójkąta ABC w skali

$$\frac{|QA_1|}{|AB|} = \frac{x}{|AB|},$$

trójkąt B_2QB_1 jest podobny do trójkąta ABC w skali

$$\frac{|B_2Q|}{|AB|} = \frac{y}{|AB|},$$

zaś trójkąt C_1C_2Q jest podobny do trójkąta ABC w skali

$$\frac{|C_1C_2|}{|AB|} = \frac{z}{|AB|}.$$

3. Zauważenie zależnosci pomiędzy polami tych trójkątów - **1 punkt**

Stąd

$$\frac{P_1}{P} = \left(\frac{x}{|AB|}\right)^2, \ \frac{P_2}{P} = \left(\frac{y}{|AB|}\right)^2, \ \frac{P_3}{P} = \left(\frac{z}{|AB|}\right)^2.$$

4. Wyznaczenie pola trójkata ABC - **2 punkty**

Pierwiastkując stronami te równości otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{|AB|}, \ \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{y}{|AB|}, \ \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{z}{|AB|}.$$

Dodając stronami powyższe równości dostajemy

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{x+y+z}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AB|} = 1,$$

a stąd

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3} = \sqrt{P}$$

i ostatecznie

$$P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2.$$