KONKURS "ZOSTAŃ EUKLIDESEM"

ETAP I

TEST I

Ciągi

Uwaga! Przyjmujemy, że $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$

1. A. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Zatem:

   (a) drugi wyraz tego ciągu jest równy 4

   (b) trzeci wyraz tego ciągu jest równy 9

   (c) czwarty wyraz tego ciągu jest równy 30 POPRAWNA

   (d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

   B. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = n^2$. Zatem:

   (a) prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są większe od 100 POPRAWNA

   (b) prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami parzystymi

   (c) prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami nieparzystymi

   (d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

   C. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = \frac{2n-100}{n+5}$. Zatem:

   (a) prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze od 1

   (b) prawie wszystkie wyrazy tego ciągu są większe od 1 POPRAWNA

   (c) wszystkie wyrazy tego ciągu są mniejsze od 1

   (d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

   D. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1)$. Zatem dla każdego $n \in \mathbf{N}$:

   (a) $a_{n+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) + 1$

(b) $a_{n+1} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2)$ POPRAWNA

(c) $a_{n+1} = 2 \cdot 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2)$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Wśród wyrazów ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele wyrazów ujemnych, nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i dokładnie sto wyrazów równych zero. Wynika stąd, że istnieje takie $k \in \mathbf{N}$, że:

(a) $a_k > 0$ i $a_{k+1} < 0$ POPRAWNA

(b) $a_k > 0$ i $a_{k+1} > 0$

(c) $a_k = 0$ i $a_{k+1} = 0$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. W ciągu (a_n) dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi nierówność $a_n + a_{n+1} > 0$. Wynika stąd, że:

(a) wszystkie wyrazy tego ciągu są lioczbami dodatnimi

(b) $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$

(c) $a_1 + a_2 + ... + a_{2n} > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. W ciągu (a_n) dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność $a_{n-1} \cdot a_n < 0$. Wynika stąd, że:

(a) $a_{n-1} \cdot a_{n+1} > 0$ dla każdego $n \geqslant 2$ POPRAWNA

(b) jeśli $a_1 < 0$, to $a_{100} < 0$

(c) jeśli $a_1 > 0$, to $a_{111} < 0$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Uporządkowane rosnąco wszystkie naturalne dzielniki liczby 48 tworzą skończony n-wyrazowy ciąg $(d_1, d_2, ..., d_n)$. Wówczas:

(a) $d_4 = 6$

(b) $n = 8$

(c) $d_8 = 48$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna POPRAWNA

I. n-ty wyraz ciągu (a_n) jest kołem o środku S i promieniu $\frac{1}{n}$. Wobec tego:

(a) jeśli $k < m$, to $a_k \subset a_m$
(b) dla każdego $k \in \mathbf{N}$, $a_1 \cup a_2 \cup ... \cup a_k = a_1$ POPRAWNA
(c) dla każdego $k \in \mathbf{N}$, $a_1 \cap a_2 \cap ... \cap a_k = a_1$
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. n-ty wyraz ciągu (a_n) jest kołem o środku S i promieniu n. Wobec tego:

(a) jeśli $k > m$, to $a_k \subset a_m$
(b) dla każdego $k \in \mathbf{N}$, $a_1 \cup a_2 \cup ... \cup a_k = a_1$
(c) dla każdego $k \in \mathbf{N}$, $a_1 \cap a_2 \cap ... \cap a_k = a_1$ POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

2. A. Trzeci wyraz ciągu określonego warunkami $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = 2a_n + 1$ jest równy:

(a) 11
(b) 13
(c) 15 POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Trzeci wyraz ciągu określonego warunkami $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n^2 + n$ jest równy:

(a) 5
(b) 6 POPRAWNA
(c) 7
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. Czwarty wyraz ciągu określonego warunkami $a_1 = 3, a_2 = 1$ i $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$ jest równy:

(a) -1 POPRAWNA
(b) 0
(c) 8
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Jeśli $a_5 = 0$ i dla każdego $n \in \mathbf{N}$ $a_{n+1} = 3a_n - 3$, to:

(a) $a_7 = -12$ POPRAWNA
(b) $a_4 = 3$
(c) wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. O ciągu (a_n) wiadomo, że $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = a_n + 4n + 2$ dla $n \geqslant 1$. Wynika stąd, że:

(a) pewien wyraz tego ciągu jest równy 400
(b) pewien wyraz tego ciągu jest równy 300
(c) pewien wyraz tego ciągu jest równy 200 POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. O ciągu (a_n) wiadomo, że $a_1 = 1$ i $a_{n+2} = a_n + 1$ dla $n \geqslant 1$. Wynika stąd, że:

(a) $a_{2001} = 1001$ POPRAWNA
(b) wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi
(c) pewne wyrazy tego ciągu nie są liczbami całkowitymi
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. O ciągu (a_n) wiadomo, że $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = (-1)^n \cdot a_n$ dla $n \geqslant 1$. Wynika stąd, że:

(a) $a_{20} > 0$ POPRAWNA
(b) wszystkie wyrazy tego ciągu o numerach parzystych są dodatnie
(c) wszystkie wyrazy tego ciągu o numerach nieparzystych są dodatnie
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Ciąg (a_n) jest określony warunkami $a_1 = 1, a_2 = 2$ i $a_n = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ dla $n > 2$. Wówczas:

(a) wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi
(b) pewne dwa kolejne wyrazy tego ciągu nie są liczbami całkowitymi POPRAWNA
(c) ciąg ten przyjmuje nieskończenie wiele różnych wartości
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Ciąg (a_n) jest określony warunkami $a_1 = 0, a_2 = 2$ i $a_n = \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2}$ dla $n > 2$. Wówczas:

(a) wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi

(b) wszystkie wyrazy tego ciągu są nieujemne

(c) pewne dwa kolejne wyrazy tego ciągu są ujemne POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Ciąg (a_n) jest określony warunkami $a_1 = 1, a_2 = 3$ i $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$ dla $n > 2$. Wówczas:

(a) ciąg ten przyjmuje tylko trzy różne wartości POPRAWNA

(b) wszystkie wyrazy tego ciągu są całkowite

(c) pewne wyrazy tego ciągu są ujemne

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

3. A. Jeśli ciąg (a_n) jest malejący, to:

(a) $a_2 + a_{22} + a_{222} > a_3 + a_4 + a_5$

(b) $a_1 + a_3 + a_5 > a_2 + a_4 + a_6$ POPRAWNA

(c) $a_2 + a_3 > a_1 + a_4$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Jeśli ciąg (a_n) jest rosnący, to:

(a) $a_1 + a_{11} + a_{111} < a_2 + a_3 + a_4$

(b) $a_1 + a_3 + a_5 < a_2 + a_4 + a_6$ POPRAWNA

(c) $a_2 + a_3 < a_1 + a_4$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. Niech (a_n) będzie ciągiem, w którym $a_{n+2} > a_n$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$. Wynika z tego, że:

(a) ciąg (a_n) jest rosnący

(b) ciąg (a_{n+1}) jest rosnący

(c) ciąg (a_{2n}) jest rosnący POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Niech (a_n) będzie ciągiem, w którym $a_{n+2} < a_n$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$. Wynika z tego, że:

(a) ciąg (a_n) jest malejący

(b) ciąg (a_{2n-1}) jest malejący POPRAWNA

(c) ciąg (a_{n+1}) jest rosnący

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Ciąg (b_n) jest ciągiem malejącym. Wynika stąd, że:

(a) ciąg określony wzorem $a_n = b_n + 2$ jest malejący POPRAWNA

(b) ciąg określony wzorem $a_n = -b_n$ jest malejący

(c) ciąg określony wzorem $a_n = b_n^2$ jest malejący

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. Ciąg (a_n) jest ciągiem rosnącym. Wynika stąd, że ciągiem rosnącym jest również ciąg (b_n) dany wzorem:

(a) $b_n = n \cdot a_n$

(b) $b_n = a_n^2$

(c) $b_n = 5 \cdot a_n$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. (a_n) jest ciągiem rosnącym o wyrazach dodatnich. Wynika stąd, że ciągiem rosnącym jest również ciąg (b_n) dany wzorem:

(a) $b_n = n \cdot a_n$ POPRAWNA

(b) $b_n = \frac{1}{a_n}$

(c) $b_n = -5 \cdot a_n$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Ciągi (a_n) i (b_n) są ciągami rosnącymi. Wynika stąd, że ciągiem rosnącym jest również ciąg (c_n) dany wzorem:

(a) $c_n = a_n \cdot b_n$

(b) $c_n = |a_n|$

(c) $c_n = a_n + b_n$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Wszystkie wyrazy rosnącego ciągu (a_n) są różne od zera. Wynika stąd, że:

(a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$

(b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$

(c) istnieje co najwyżej jedna taka liczba $n \in \mathbf{N}$, że $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Ciąg (b_n) jest ciągiem malejącym. Wtedy:

(a) ciąg określony wzorem $a_n = b_n^2$ może być rosnący POPRAWNA

(b) ciąg określony wzorem $a_n = b_n^2$ jest malejący

(c) ciąg określony wzorem $a_n = b_n^2$ jest rosnący

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

4. A. n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^3$. Wobec tego:

(a) $a_3 = 27$

(b) $a_3 = 19$ POPRAWNA

(c) $a_2 = 8$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2$. Wobec tego:

(a) $a_5 = 25$

(b) $a_5 = 9$ POPRAWNA

(c) $a_5 = 15$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^2$. Wobec tego:

(a) (a_n) jest ciągiem malejącym

(b) (a_n) może być ciągiem malejącym

(c) (a_n) jest ciągiem rosnącym POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^3$. Wobec tego:

(a) (a_n) jest ciągiem malejącym

(b) (a_n) może być ciągiem malejącym

(c) (a_n) jest ciągiem rosnącym POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. (S_n) jest ciągiem n-tych sum częściowych ciągu (a_n). Wynika z tego, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$:

(a) $S_{n+1} > S_n$

(b) $S_n + a_{n+1} = S_{n+1}$ POPRAWNA

(c) $S_n + a_{n+2} = S_{n+2}$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 3n^2$. Wobec tego:

(a) $a_8 + a_9 + a_{10} = 153$ POPRAWNA

(b) n-ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $3n$

(c) n-ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $6n$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. n-ta suma częściowa ciągu (a_n) wyraża się wzorem $S_n = n^3$. Wobec tego:

(a) n-ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $3n^2$

(b) n-ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $3n^2 + 3n$

(c) n-ty wyraz ciągu (a_n) jest równy $3n^2 - 3n + 1$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n). Wówczas dla dowolnych $k, m \in \mathbf{N}$:

(a) $a_m + a_{m+1} + ... + a_{m+k} = S_{m+k} - S_m$

(b) $a_m + a_{m+1} + ... + a_{m+k} = S_{m+k} - S_{m-1}$ POPRAWNA

(c) $S_k + S_m = S_{k+m}$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) danego wzorem $a_n = n^{((-1)^n)}$. Wówczas:

(a) $S_4 = \frac{22}{3}$ POPRAWNA
(b) $S_3 = \frac{1}{3}$
(c) $S_2 = 2$
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Niech S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów ciągu (a_n) danego wzorem $a_n = (-1)^n \cdot n^2$. Wówczas:

(a) $S_4 = 16$
(b) $S_3 = -6$ POPRAWNA
(c) $S_2 = -4$
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

5. A. Dany jest ciąg arytmetyczny $6, 11, 16....$ Wówczas:

(a) pięćdziesiąty wyraz tego ciągu jest mniejszy od 250
(b) n-ty wyraz tego ciągu jest równy $5n + 1$ POPRAWNA
(c) cyfra jedności pewnego wyrazu tego ciągu jest równa 4
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Liczby a, b, c, d są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Wobec tego:

(a) $d - b = a - c$
(b) $d - a = 2(c - b)$
(c) $d - a = 3(c - b)$ POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. Liczby $2p + 1, p^2 + p + 1, 2p^2 + 1$:

(a) tworzą ciąg arytmetyczny dla każdej liczby rzeczywistej p POPRAWNA
(b) nie są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego dla żadnej liczby rzeczywistej p
(c) tworzą ciąg arytmetyczny dla dokładnie jednej liczby rzeczywistej p

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Istnieje nieskończony ciąg arytmetyczny, w którym:

(a) tylko jeden wyraz jest liczbą niewymierną
(b) każde dwa sąsiednie wyrazy są różnych znaków
(c) tylko jeden wyraz jest liczbą wymierną POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym i dla pewnych różnych m i n jest $a_m = m^2$ i $a_n = n^2$. Wynika stąd, że:

(a) różnica ciągu (a_n) jest równa $m + n$ POPRAWNA
(b) różnica ciągu (a_n) jest równa $m - n$
(c) różnica ciągu (a_n) jest równa $m \cdot n$
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym i dla pewnych różnych m i n jest $a_m = m^2$ i $a_n = n^2$. Wynika stąd, że:

(a) (a_n) jest ciągiem rosnącym POPRAWNA
(b) (a_n) może być ciągiem malejącym
(c) wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są liczbami naturalnymi
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. Jeżeli rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) ma wszystkie wyrazy niewymierne, to:

(a) jego różnica jest liczbą wymierną
(b) jego różnica jest liczbą niewymierną
(c) ciąg (b_n) dany wzorem $b_n = a_n + \sqrt{2}$ też ma wszystkie wyrazy niewymierne
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna POPRAWNA

H. Niech (a_n) będzie nieskończonym ciągiem arytmetycznym takim, że $a_1 > a_2$. Wynika z tego, że :

(a) ten ciąg ma wyraz $a_n < -2012$ POPRAWNA
(b) ten ciąg jest ograniczony z dołu

(c) $a_k < a_{k+1}$ dla pewnego $k \in \mathbf{N}$
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Dane są ciągi arytmetyczne $2, 6, 10, ...$ i $9, 16, 23, ...$ Wówczas:

(a) żadna liczba rzeczywista nie jest wyrazem obu ciągów
(b) nieskończenie wiele liczb rzeczywistych jest wyrazami obu ciągów POPRAWNA
(c) liczba 2012 jest wspólnym wyrazem obu ciągów
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = |a_n|$:

(a) jest ciągiem arytmetycznym
(b) nie może być ciągiem arytmetycznym
(c) może być ciągiem arytmetycznym POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

6. A. Każdy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą naturalną i liczby $1, 12, 29$ są jego wyrazami. Wynika stąd, że:

(a) różnica tego ciągu nie musi być liczbą dodatnią
(b) każda liczba naturalna jest wyrazem tego ciągu POPRAWNA
(c) nie da się wyznaczyć jednoznacznie różnicy tego ciągu
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Suma wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 200 i dających przy dzieleniu przez 3 resztę 1 jest równa:

(a) $203 \cdot 33$
(b) $100 \cdot 66$
(c) $100 \cdot 67$ POPRAWNA
(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. Suma wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 300 i dających przy dzieleniu przez 4 resztę 1 jest równa:

(a) $149 \cdot 77$

(b) $149 \cdot 76$

(c) $149 \cdot 75$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Pięćdziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 10. Wynika stąd, że:

(a) suma dziewięćdziesięciu dziewięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 900

(b) suma pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa 500

(c) $a_{49} + a_{50} + a_{51} = 30$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Sumy n początkowych wyrazów ciągów (a_n) i (b_n) są odpowiednio równe n^2 i $n^2 + 1$. Wynika stąd, że:

(a) $a_n + 1 = b_n$ dla każdej liczby naturalnej n

(b) $a_n = b_n$ dla każdej liczby naturalnej n

(c) ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, zaś ciąg (b_n) nie jest ciągiem arytmetycznym POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. W ciągu arytmetycznych dla każdych trzech kolejnych jego wyrazów wyraz środkowy jest:

(a) średnią geometryczną wyrazów sąsiednich

(b) średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich POPRAWNA

(c) sumą wyrazów sąsiednich

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. Dla każdego $k \in \mathbf{N}$ suma $2 + 4 + 6 + ... + 2k$ jest równa:

(a) $\frac{k(k+1)}{2}$

(b) $2k(k + 1)$

(c) $k(k + 1)$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Tworzymy ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{a_1+a_n}{2}$. Ciąg (b_n) :

(a) jest ciągiem arytmetycznym POPRAWNA

(b) nie jest ciągiem arytmetycznym

(c) nie musi być ciągiem arytmetycznym

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Ciąg (a_n) jest rosnącym ciągiem arytmetycznym. Tworzymy ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = n \cdot \frac{a_1+a_n}{2}$. Ciąg (b_n) :

(a) jest ciągiem arytmetycznym

(b) nie jest ciągiem arytmetycznym POPRAWNA

(c) może być ciągiem arytmetycznym

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. W ciągu arytmetycznym (a_n) o wyrazach dodatnich suma pierwszych n jego wyrazów jest dla każdego n dwukrotnie mniejsza od sumy jego pierwszych $2n$ wyrazów. Wobec tego ciąg ten jest:

(a) ciągiem rosnącym

(b) ciągiem malejącym

(c) ciągiem stałym POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

7. A. Rozważmy ciąg geometryczny (a_n) o ilorazie q.:

(a) Jeśli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący

(b) Jeśli $a_1 < 0$ i $q \in (0, 1)$, to ciąg (a_n) jest rosnący POPRAWNA

(c) Jeśli $a_1 < 0$ i $q < 1$, to ciąg (a_n) jest rosnący

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Liczby $1, 3$ i 9 są wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Wynika stąd, że:

(a) wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami dodatnimi

(b) wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami wymiernymi

(c) mogą istnieć wyrazy tego ciągu, które nie są liczbami całkowitymi POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. Nie istnieje nieskończony ciąg geometryczny, w którym dokładnie jeden wyraz jest liczbą:

(a) wymierną

(b) niewymierną

(c) równą zero POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Istnieje nieskończony ciąg geometryczny, wśród którego wyrazów jest dokładnie pięć liczb będących liczbami:

(a) całkowitymi POPRAWNA

(b) dodatnimi

(c) wymiernymi

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Pierwszy i piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego są odpowiednio równe $\frac{3}{2}$ i $\frac{8}{27}$. Wynika stąd, że:

(a) iloraz tego ciągu jest liczbą dodatnią

(b) żaden wyraz tego ciągu nie jest liczbą całkowitą

(c) iloraz tego ciągu nie jest liczbą całkowitą POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. Nieskończony ciąg geometryczny:

(a) może zawierać dwa podciągi, z których jeden ma wyrazy wymierne, a drugi niewymierne POPRAWNA

(b) nie może zawierać dwóch podciągów, z których jeden jest rosnący, a drugi malejący

(c) jest ciągiem nieograniczonym

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. Jeżeli (c_n) jest nieskończonym ciągiem geomatrycznym o ilorazie q, to iloczyn $c_1 \cdot c_2 \cdot ... \cdot c_{99} \cdot c_{100}$ jest równy::

(a) $c_1^{100} \cdot q^{100}$

(b) $c_1^{100} \cdot q^{4950}$ POPRAWNA

(c) $c_1^{100} \cdot q^{100!}$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) ma wszystkie wyrazy dodatnie oraz spełnia warunek $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dla $n \geqslant 1$. Wynika z tego, że jego iloraz q jest:

(a) równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ POPRAWNA

(b) równy $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(c) mniejszy od 1

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Jeżeli (a_n) i (b_n) są ciągami geometrycznymi, to geometryczny jest też ciąg:

(a) $(|a_n| \cdot b_n)$ POPRAWNA

(b) $(a_n + b_n)$

(c) $(a_n - b_n)$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to:

(a) podciąg (a_{2n}) nie musi być geometryczny

(b) podciąg (a_{2n+1}) nie musi być geometryczny

(c) podciągi (a_{2n}) i (a_{2n+1}) też są geometryczne POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

8. A. Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o m wyrazach, to:

(a) dla każdego $k \leqslant m$, $a_k \cdot a_{m-k+1} = a_1 \cdot a_m$ POPRAWNA

(b) dla każdego $1 < i < m$, $a_i^2 = a_{i-2} \cdot a_{i+2}$

(c) dla każdego $1 < i < m$, $a_i^2 = a_{i-1} + a_{i+1}$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. W ciągu geometrycznym (a_n) zachodzą nierówności $a_3 < a_2 \leqslant a_4$. Zatem:

(a) $a_3 \cdot a_4 > 0$

(b) $a_2 \cdot a_3 > 0$

(c) $a_2 \cdot a_4 < 0$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna POPRAWNA

C. Niech (b_n) będzie ciągiem takim, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $b_n \cdot b_{n+1} < 0$. Wynika stąd, że:

(a) ciąg (b_n) może być ciągiem geometrycznym POPRAWNA

(b) ciąg (b_n) nie może być ciągiem geometrycznym

(c) ciag (b_n) jest ciągiem geometrycznym

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Ciąg postaci $\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}$:

(a) nie jest ciągiem geometrycznym

(b) jest ciągiem geometrycznym POPRAWNA

(c) ma nieskończenie wiele wyrazów wymiernych

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Wiadomo, że liczba bakterii w pewnej populacji codziennie się podwaja. Populacja osiąga maksymalną liczebność po 30 dniach. Wynika stąd, że populacja ta osiągnie $\frac{1}{32}$ liczebności maksymalnej dokładnie po:

(a) 15 dniach

(b) 25 dniach POPRAWNA

(c) 27 dniach

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. Miary kątów czworokąta tworzą ciąg geometryczny. Wynika stąd, że:

(a) czworokąt ten jest kwadratem

(b) czworokąt ten jest równoległobokiem

(c) czworokąt ten jest trapezem

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna POPRAWNA

G. Miary kątów trójkąta tworzą ciąg geometryczny. Wówczas:

(a) trójkąt ten jest ostrokątny

(b) trójkąt ten nie może być prostokątny

(c) trójkąt ten może być rozwartokątny POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Pewne trzy (niekoniecznie kolejne) wyrazy ciągu $x, x+1, x+2, x+3, ...,$ gdzie $x \in \mathbf{R}$, tworzą ciąg geometryczny. Wynika stąd, że:

(a) $x = 0$

(b) x jest liczbą wymierną POPRAWNA

(c) x może być liczbą niewymierną

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Dla danej liczby naturalnej k rozpatrujemy warunek: *istnieje taki ciąg geometryczny* (a_n)*, że liczby* $a_1, a_2, ..., a_k$ *są całkowite, a wszystkie dalsze wyrazy tego ciągu* $a_{k+1}, a_{k+2}, ...$ *nie są całkowite.* Prawdą jest, że:

(a) każda liczba naturalna k spełnia ten warunek POPRAWNA

(b) tylko liczba $k = 1$ spełnia ten warunek

(c) żadna liczba naturalna k nie spełnia tego warunku

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Ciąg (a_n) zdefiniowany wzorem $a_n = f((-1)^n)$ jest ciągiem geometrycznym, jeśli:

(a) $f(x) = x - x^2$

(b) $f(x) = x + x^{2012}$

(c) $f(x) = x$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

9. A. Istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego:

(a) $-27, 18, -12, 8, ...$ POPRAWNA

(b) $1, -1, 1, -1, 1, ...$

(c) $8, -12, 18, -27, ...$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego $1, q, q^2, \ldots$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $q < 1$

(b) $|q| \leqslant 1$

(c) $q \in (-1, 1)$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $|q| < 1$

(b) $|q| < 1 \vee a_1 = 0$ POPRAWNA

(c) $q \in (-1, 1) \wedge a_1 \neq 0$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego $3, x, \frac{1}{3}x^2, \ldots$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $x \in (-1, 1)$

(b) $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

(c) $x \in (-3, 3)$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego $4x, 2x, x, \ldots$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $x \in (-1, 1)$

(b) x jest dowolną liczbą rzeczywistą POPRAWNA

(c) $\frac{1}{2}x \in (-1, 1)$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. Suma nieskończonego ciągu geometrycznego $x, x(x-1), x(x-1)^2, \ldots$, gdzie $x \in \mathbf{R}$, istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) $x \in \langle 0, 2)$ POPRAWNA

(b) $x \in (0, 2)$

(c) $x \in (0, 2\rangle$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. Jeśli suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q jest liczbą ujemną, to:

(a) $a_1 < 0$ POPRAWNA

(b) $a_1 < 0 \wedge q > 0$

(c) $a_1 > 0 \wedge q < 0$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Niech S będzie sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie q, w którym pierwszy wyraz jest liczbą dodatnią. Wobec tego:

(a) $S \leqslant 0$

(b) jeśli $q < 0$, to $S > a_1$

(c) jeśli $q < 0$, to $S < a_1$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Jeśli każdy wyraz nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q jest równy sumie wyrazów następujących po nim, to:

(a) $q = 0,5$

(b) $a_1 = 0$

(c) $a_1 = 0 \vee q = 0,5$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Ciąg (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q i sumie S, zaś ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = a_n^2$. Wynika stąd, że suma ciągu (b_n):

(a) nie musi istnieć

(b) jest równa $\frac{a_1 \cdot S}{1+q}$ POPRAWNA

(c) jest równa S^2

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

10. A. Grupa 15 uczniów ustawiła się w kolejce po lody. Wiadomo, że jeśli na n-tym miejscu w tej kolejce ($n \in \{1, 2, 3, ..., 14\}$) stoi dziewczynka, to bezpośrednio za nią również stoi dziewczynka. Wynika stąd, że:

(a) w kolejce stoją tylko dziewczynki

(b) jeśli na przedostatnim miejscu w kolejce stoi dziewczynka, to w kolejce stoją co najmniej trzy dziewczynki

(c) jeśli na początku kolejki stoi dziewczynka, to w kolejce stoją tylko dziewczynki POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

B. Rozważmy twierdzenie T dotyczące liczb naturalnych. Dla dowolnej liczby naturalnej k z prawdziwości twierdzenia T dla k wynika prawdziwość tego twierdzenia dla $k + 1$. Wynika stąd, że:

(a) twierdzenie T jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej

(b) twierdzenie T jest prawdziwe dla nieskończenie wielu liczb naturalnych

(c) jeśli twierdzenie T jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej t_0, to jest prawdziwe dla nieskończenie wielu liczb naturalnych POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

C. O równości R wiadomo, że z prawdziwości tej równości dla dowolnie wybranej liczby naturalnej k wynika jej prawdziwość dla liczby $k + 1$. Wiadomo też, że równość R jest prawdziwa dla liczby 5. Wynika stąd, że równość R:

(a) jest prawdziwa dla liczby 6 POPRAWNA

(b) jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej

(c) nie jest prawdziwa dla co najmniej pięciu liczb naturalnych

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

D. Liczba 2 ma własność W. Wiadomo też, że dla dowolnej liczby naturalnej k, jeśli k ma własność W, to $k+2$ również ma własność W. Wynika stąd, że:

(a) każda liczba naturalna ma własność W

(b) żadna liczba nieparzysta nie ma własności W

(c) każda parzysta liczba naturalna ma własność W POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

E. Liczba 1 ma własność W. Wiadomo też, że dla dowolnej liczby naturalnej k, jeśli k ma własność W, to $k+3$ również ma własność W. Wynika stąd, że:

(a) każda liczba naturalna ma własność W

(b) wszystkie liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1, mają własności W POPRAWNA

(c) każda liczba naturalna podzielna przez 3 ma własność W

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

F. Dane są dwa trzyelementowe ciągi, arytmetyczny (a_n) i geometryczny (b_n). Wiadomo, że $a_1 = b_1$ oraz $a_3 = b_3$. Wówczas:

(a) jeśli ciąg arytmetyczny jest ciągiem malejącym, to ciąg geometryczny też może być ciągiem malejącym POPRAWNA

(b) jeśli ciąg arytmetyczny jest ciągiem malejącym, to ciąg geometryczny też jest ciągiem malejącym

(c) suma wyrazów ciągu arytmetycznego jest większa od sumy wyrazów ciągu geometrycznego

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

G. Niech a, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Niech liczby b_1, b_2 będą tak dobrane, że a, b_1, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego, zaś a, b_2, c są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu geometrycznego. Wówczas:

(a) $b_1 \geqslant b_2$ POPRAWNA

(b) $b_1 \leqslant b_2$

(c) $b_1 = b_2$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

H. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, zaś ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym. Jeśli $a_7 = b_{19}, a_8 = b_{18}$ oraz $a_9 = b_{17}$, to dla dowolnego naturalnego i:

(a) $a_i < a_{i+5}$

(b) $b_i < b_{i+5}$

(c) $a_i = b_{i+5}$ POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

I. Jeśli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbf{N}$, to:

(a) ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_{n+1} - a_n$ nie jest geometryczny

(b) ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest geometryczny

(c) ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = (\frac{1}{2})^{a_n}$ jest geometryczny POPRAWNA

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna

J. Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Wynika stąd, że:

(a) ciąg (a_n) nie może być ciągiem arytmetycznym POPRAWNA

(b) ciąg (a_n) nie może być ciągiem geometrycznym

(c) dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $a_{n+1} = -a_n$

(d) żadna z odpowiedzi (a), (b), (c) nie jest poprawna