KONKURS

„ZOSTAŃ EUKLIDESEM”

Klucz odpowiedzi

2013

TEST WIELOKROTNEGO WYBORU

1. Równanie $5 \cdot C_x^3 - C_{x+2}^4 = 0$ spełnia liczba:
   (a) 3 TAK
   (b) 7 NIE
   (c) 14 TAK

2. Dane są cztery odcinki o długości x, cztery o długości y $(x \neq y)$. Losowo wybieramy cztery odcinki. Wtedy:
   (a) prawdopodobieństwo, że można z nich utworzyć równoległobok nie będący rombem wynosi $\frac{18}{35}$ TAK
   (b) prawdopodobieństwo, że można z nich utworzyć romb wynosi $\frac{1}{35}$ TAK
   (c) prawdopodobieństwo, że nie można z nich utworzyć deltoidu wynosi $\frac{16}{35}$ TAK

3. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu jest ćwiartką koła o promieniu $R = 2$. Wtedy:
   (a) objętość stożka jest równa $\frac{\pi\sqrt{15}}{24}$ TAK
   (b) kąt między osią stożka a jego tworzącą ma miarę $30°$ NIE
   (c) pole podstawy stożka jest równe $\frac{\pi}{4}$ TAK

4. Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, to:
   (a) $P(A) \leqslant P(B')$ TAK
   (b) $P(B) \leqslant P(A')$ TAK
   (c) $P(A) + P(B) = 0$ NIE

5. Dana jest płaszczyzna π i rozłączna z tą płaszczyzną prosta k. Zbiór wszystkich punktów, których odległość od prostej k jest równa odległości od płaszczyzny π:

   (a) jest prostą NIE

   (b) jest płaszczyzną NIE

   (c) jest zawarty w pewnej płaszczyźnie NIE

6. Zdarzenia A i B są niezależne i $P(A) = P(B) = p$. Wówczas:

   (a) $P(A \cup B) = 2p - p^2$ TAK

   (b) $P(A \cup B) = p^2$ NIE

   (c) $P(A \cap B) = p^2$ TAK

7. Prawdziwy jest następujący wzór:

   (a) $\binom{n}{k} - \binom{n}{n-k} = 0$ TAK

   (b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ TAK

   (c) $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n+1}$ TAK

8. Wierzchołkom sześcianu można przypisać liczby całkowite w taki sposób, że suma liczb przypisanych:

   (a) wierzchołkom każdej ściany jest równa 0 TAK

   (b) wierzchołkom każdej ściany jest równa 1 TAK

   (c) dowolnym dwóm wierzchołkom, których nie łączy krawędź, jest nieparzysta NIE

9. Z równości $P(A \cap B) = P(A/B)$ wynika, że:

   (a) $P(A \cup B) = 1$ NIE

   (b) $A \subset B$ NIE

(c) zdarzenia A i B są niezależne NIE

10. Dane są dwa nieskończone ciągi arytmetyczne liczb naturalnych, pierwszy o różnicy r_1, drugi o różnicy r_2. Żadna liczba nie jest jednocześnie wyrazem obu ciągów. Wynika z tego, że:

    (a) $r_1 = r_2$ NIE

    (b) r_1 i r_2 są obie parzyste lub obie nieparzyste NIE

    (c) r_1 i r_2 nie mają wspólnych dzielników różnych od 1 NIE

11. Wierzchołki czworościanu foremnego C_2 są środkami ciężkości ścian czworościanu foremnego C_1. Wtedy:

    (a) wysokość czworościanu C_2 jest 2 razy krótsza od wysokości czworościanu C_1 NIE

    (b) objętość czworościanu C_2 jest 27 razy mniejsza od objętości czworościanu C_1 TAK

    (c) pole powierzchni czworościanu C_2 jest 9 razy mniejsze od pola powierzchni czworościanu C_1 TAK

12. Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = n^2 + (-1)^n - 2013$:

    (a) jest rosnący TAK

    (b) ma wyraz równy 11 TAK

    (c) ma wyraz podzielny przez 13 TAK

13. W sześcian o krawędzi długości 1 wpisano kulę, w tę kulę wpisano sześcian, w niego znów kulę itd. Objętości kolejnych tak otrzymanych sześcianów oznaczono $V_1, V_2, V_3, ...$ Wtedy:

    (a) ciąg (V_n) jest monotoniczny TAK

    (b) $V_1 + V_2 + V_3 + ... = 2$ NIE

    (c) granicą ciągu (V_n) jest 0 TAK

14. Wykres funkcji $y = \log_2 x$ można przekształcić przez pewną symetrię osiową na wykres funkcji:

   (a) $y = \log_2(-x)$ TAK
   (b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ TAK
   (c) $y = 2^x$ TAK

15. Długości kolejnych boków pewnego czworokąta wypukłego tworzą ciąg arytmetyczny. Wynika z tego, że:

   (a) na czworokącie tym da się opisać okrąg NIE
   (b) jeśli w ten czworokąt da się wpisać okrąg, to jest on kwadratem NIE
   (c) pewne dwa boki tego czworokąta są prostopadłe NIE

16. Równanie $\log_2(-x) = 2^x$:

   (a) jest sprzeczne NIE
   (b) ma dokładnie jedno rozwiązanie ujemne TAK
   (c) ma dokładnie jedno rozwiązanie TAK

17. Długości boków pewnego trójkąta tworzą ciąg geometryczny o ilorazie q, który jest liczbą wymierną. Wynika z tego, że:

   (a) trójkąt ten jest równoboczny NIE
   (b) cosinus każdego kąta wewnętrznego tego trójkąta jest liczbą wymierną TAK
   (c) $q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ TAK

18. Jeżeli suma pierwiastków trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ jest równa $\log_{a^2} c \cdot \log_{c^2} a$, to odcięta wierzchołka paraboli będącej wykresem tego trójmianu kwadratowego:

(a) jest równa $\frac{1}{8}$ TAK

(b) jest równa $\frac{1}{4}$ NIE

(c) jest większa od 1 NIE

19. Niech P będzie punktem wewnętrznym czworościanu foremnego o boku długości 1, zaś d niech będzie sumą odległości punktu P od wszystkich ścian czworościanu. Wtedy:

    (a) d nie zależy od położenia punktu P TAK

    (b) wysokość czworościanu ma długość d TAK

    (c) $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$ TAK

20. Istnieje ciąg mający nieskończenie wiele wyrazów ujemnych oraz nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i równocześnie:

    (a) będący ciągiem arytmetycznym NIE

    (b) będą ciągiem geometrycznym TAK

    (c) mający granicę równą 1 NIE

TEST WIELOKROTNEGO WYBORU - ROZWIĄZANIA

Numer pytania	(a)	(b)	(c)
1	TAK	NIE	TAK
2	TAK	TAK	TAK
3	TAK	NIE	TAK
4	TAK	TAK	NIE
5	NIE	NIE	NIE
6	TAK	NIE	TAK
7	TAK	TAK	TAK
8	TAK	TAK	NIE
9	NIE	NIE	NIE
10	NIE	NIE	NIE
11	NIE	TAK	TAK
12	TAK	TAK	TAK
13	TAK	NIE	TAK
14	TAK	TAK	TAK
15	NIE	NIE	NIE
16	NIE	TAK	TAK
17	NIE	TAK	TAK
18	TAK	NIE	NIE
19	TAK	TAK	TAK
20	NIE	TAK	NIE

ZADANIA OTWARTE - ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. (4 punkty) Rozwiązać nierówność

$$\frac{\binom{n}{n-3}+\binom{n}{n-2}}{\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-1}{n-4}} \geqslant 2.$$

Rozwiązanie.

Z treści zadania wynika, że $n \geqslant 4$. Wykorzystując własność symbolu Newtona

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

można dowodzoną nierówność zapisac w postaci

$$\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{n-3}} \geqslant 2.$$

Z definicji symbolu Newtona mamy dalej

$$\frac{\frac{(n+1)!}{(n-2)!3!}}{\frac{n!}{(n-3)!3!}} \geqslant 2.$$

Wykorzystując własności silni dostajemy

$$\frac{\frac{(n-2)!(n-1)n(n+1)}{(n-2)!3!}}{\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!3!}} \geqslant 2.$$

Po skróceniu mamy

$$\frac{n+1}{n-2} \geqslant 2,$$

a więc po uwzględnieniu założenia $n \geqslant 4$ otrzymujemy ostatecznie

$$n \in \{4, 5\}.$$

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Wyznaczenie dziedziny (zauważenie, że $n \geqslant 4$) - **1 punkt**.

Wykorzystanie definicji i własności symbolu Newtona i zapisanie równania w równoważnej postaci - **2 punkty.**

Rozwiązanie otrzymanego równania z uwzględnieniem dziedziny - **1 punkt.**

Zadanie 2. (6 punktów) Udowodnić,że

$$\log_3 4 + \log_4 3 > \log_4 5 + \log_5 4.$$

Rozwiązanie.

Wprowadźmy oznaczenia

$$\log_4 3 = a, \log_4 5 = b.$$

Z monotoniczności funkcji logarytmicznej mamy

$$0 < a < b.$$

Wykorzystując własność logarytmów

$$\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$$

i wprowadzone oznaczenia możemy dowodzoną nierówność zapisać w postaci

$$\left(\frac{1}{a} + a\right) - \left(b + \frac{1}{b}\right) > 0.$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy równoważną postać dowodzonej nierówności

$$\frac{(b-a)(1-ab)}{ab} > 0.$$

Ponieważ $0 < a < b$, wystarczy udowodnić, że $1 - ab > 0$, czyli że $ab < 1$.

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla różnych liczb dodatnich a, b mamy

$$\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},$$

a więc

$$ab < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Dostajemy stąd

$$ab < \left(\frac{\log_4 3 + \log_4 5}{\log_4 16}\right)^2 = \left(\frac{\log_4 15}{\log_4 16}\right)^2 < 1,$$

co kończy dowód nierówności.

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Wprowadzenie oznaczeń, wykorzystanie własności logarytmów i zapisanie dowodzonej nierówności w równoważnej postaci - **3 punkty.**

Wykorzystanie nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną - **2 punkty.**

Wyciągnięcie ostatecznych wniosków (po wykorzystaniu własności logarytmów) - **1 punkt.**

Zadanie 3. (4 punkty) Obliczyć pole powierzchni i objętość wielościanu, którego wierzchołkami są wszystkie środki krawędzi czworościanu foremnego o boku długości a.

Rozwiązanie.

Wielościan, którego wierzchołkami są wszystkie środki krawędzi czworościanu foremnego o boku długości a, to ośmiościan, w którym każda ściana jest trójkątem równobocznym o boku długości $\frac{a}{2}$, a więc pole jego powierzchni jest równe

$$P = 8 \cdot \frac{(\frac{a}{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ośmiościan ten powstaje z czworościanu foremnego o boku długości a przez "ścięcie" czterech narożnych czworościanów foremnych o boku długości $\frac{a}{2}$, stąd jego objętość jest równa

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - 4 \cdot \frac{(\frac{a}{2})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Zauważenie, że wielościan, którego wierzchołkami są wszystkie środki krawędzi czworościanu foremnego o boku długości a, to ośmiościan, w którym każda ściana jest trójkątem równobocznym o boku długości $\frac{a}{2}$ - **1 punkt.**

Obliczenie pola powierzchni tego ośmiościanu - **1 punkt.**

Zauważenie, że ośmiościan ten powstaje z czworościanu foremnego o boku długości a przez "ścięcie" czterech narożnych czworościanów foremnych o boku długości $\frac{a}{2}$ - **1 punkt.**

Obliczenie objętości tego ośmiościanu - **1 punkt.**

Zadanie 4. (5 punktów) Udowodnić, że wszystkie trójkąty prostokątne, których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny, są podobne.

Rozwiązanie.

Pokażemy, że wszystkie trójkąty prostokątne, których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny, są podobne na podstawie cechy "kk".

Oznaczmy długości przyprostokątnych przez $a, a+r$, zaś długość przeciwprostokątnej przez $a+2r$, gdzie a, r są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Z twierdzenia Pitagorasa mamy wtedy

$$(a+2r)^2 = a^2 + (a+r)^2,$$

a więc

$$3r^2 + 2ar - a^2 = 0.$$

Wyznaczając z tego równania r w zależności od a i uwzględniając, że $r > 0$ dostajemy

$$r = \frac{a}{3}.$$

Oznaczmy miarę kąta leżącego naprzeciw krótszej przyprostokątnej przez α. Mamy wtedy

$$\sin\alpha = \frac{a}{a+2r} = \frac{3}{5}.$$

Widać, że miara tego kąta nie zależy od długości boków trójkąta, a więc wszystkie trójkąty prostokątne, których długości boków tworzą ciąg arytmetyczny, mają kąty równej miary, a tym samym są podobne.

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Zauważenie, że podobieństwo trójkątów z zadania można wykazać na podstawie cechy "kk" - **1 punkt.**

Wprowadzenie oznaczeń (wykorzystanie definicji ciągu geometrycznego), wykorzystanie twierdzenie Pitagorasa - **2 punkty.**

Rozwiązanie otrzymanego równania kwadratowego - **1 punkt.**

Wykazanie, że miary kątów rozważanych trójkątów nie zależą od długości ich boków i wyciągnięcie ostatecznych wniosków - **1 punkt.**

Zadanie 5. (6 punktów) W turnieju szachowym rozgrywanym systemem "każdy z każdym" startuje 14 zawodników. W każdej rozegranej partii za zwycięstwo otrzymuje się 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$, za porażkę 0. Czy jest możliwe, by w tym turnieju każdy z zawodników uzyskał dwa razy więcej remisów niż porażek?

Rozwiązanie.

Ponieważ w każdej rozegranej partii za zwycięstwo otrzymuje się 1 punkt, za remis $\frac{1}{2}$, za porażkę 0, to łączna liczba punktów uzyskanych przez wszystkich graczy razem w całym turnieju jest równa liczbie rozegranych partii i wynosi

$$\binom{14}{2} = 91$$

.

Oznaczmy przez z_k, r_k, p_k odpowiednio liczbę zwycięstw, remisów i porażek k-tego zawodnika, $k \in \{1, 2, ..., 14\}$.

Każdy z zawodników rozegrał 13 partii, stąd

$$z_k = 13 - (r_k + p_k).$$

Przypuśćmy, że dla każdego $k \in \{1, 2, ..., 14\}$ mamy

$$r_k = 2 \cdot p_k.$$

Wtedy liczba punktów zdobytych w całym turnieju przez k-tego zawodnika wynosi

$$0 \cdot p_k + \frac{1}{2} \cdot r_k + 1 \cdot z_k = \frac{1}{2} \cdot r_k + 13 - (r_k + p_k) = 13 - 2 \cdot p_k.$$

Łączna liczba punktów uzyskanych przez wszystkich zawodników jest więc równa

$$(13 - 2 \cdot p_1) + (13 - 2 \cdot p_2) + ... + (13 - 2 \cdot p_{14}) = 182 - 2 \cdot (p_1 + p_2 + ... + p_{14}).$$

Ponieważ wiemy, że liczba ta wynosi 91, otrzymujemy

$$p_1 + p_2 + ... + p_{14} = 45,5,$$

co dowodzi sprzeczności postawionej hipotezy.

Ostatecznie wnioskujemy, że nie jest możliwe, by w tym turnieju każdy z zawodników uzyskał dwa razy więcej remisów niż porażek.

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Obliczenie liczby partii rozegranych w turnieju (a tym samym łącznej liczby punktów uzyskanych przez wszystkich zawodników) - **1 punkt.**

Wprowadzenie oznaczeń (oznaczenie liczby zwycięstw, porażek i remisów każdego gracza) i wyznacznie zależności między nimi - **2 punkty.**

Postawienie hipotezy, że każdy z graczy uzyskał dwa razy więcej remisów niż porażek - **1 punkt.**

Wykazanie sprzeczności postawionej hipotezy (np. obliczenie łącznej liczby porażek wszystkich graczy) - **2 punkty.**