KONKURS „ZOSTAŃ PITAGORASEM”

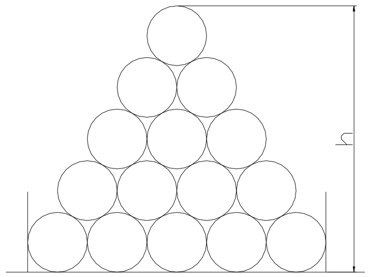
Klucz odpowiedzi

Zadania zamknięte

Nr zad.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Odp	**B**	**C**	**C**	**A**	**B**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**	**A**	**C**	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	**A**	**B**

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 1. – 5 p.



Rury ciepłownicze, każda o średnicy zewnętrznej $d = 1\ m$, ułożone są w stos, którego przekrój pokazany jest na rysunku. Oblicz wysokość tego stosu.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że łącząc środki okręgów (każdy o promieniu $r = 0{,}5\ m$) leżących na zewnątrz figury przedstawionej na rysunku otrzymujemy trójkąt równoboczny o boku $a = 4\ m$. Wysokość tego trójkąta jest równa

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ m,$$

zaś szukana wysokość stosu jest wtedy równa

$$h = H + 2r = H + 2 \cdot 0{,}5\ m = H + 1\ m = \left(2\sqrt{3} + 1\right)m.$$

Zadanie 2. – 5 p.

Liczby całkowite a, b, c dają przy dzieleniu przez 7 reszty odpowiednio 1, 2, 3. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $a^2 + b^2 + c^2$ przez 7.

Rozwiązanie:

Z warunków zadania mamy, że

$$a = 7x + 1, \quad b = 7y + 2, \quad c = 7z + 3,$$

gdzie x, y, z są liczbami całkowitymi.

Wtedy liczbę $a^2 + b^2 + c^2$ możemy przedstawić w postaci

$$a^2 + b^2 + c^2 = (7x + 1)^2 + (7y + 2)^2 + (7z + 3)^2 =$$

$$= 49x^2 + 14\,x + 1 + 49y^2 + 28\,y + 4 + 49z^2 + 42\,z + 9 =$$

$$= 49x^2 + 14\,x + 49y^2 + 28\,y + 49z^2 + 42\,z + 14 = 7(7x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2x + 4y + 6z + 2).$$

Ponieważ liczby x, y, z są całkowite, to liczba $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2x + 4y + 6z + 2$ jest również całkowita, stąd

$$a^2 + b^2 + c^2 = 7t,$$

gdzie t jest liczbą całkowitą, a więc reszta z dzielenia $a^2 + b^2 + c^2$ przez 7 wynosi 0.

Zadanie 3. - 6 p.

Paweł jest starszy od Karola. Jeśli przestawimy obie cyfry liczby całkowitej wyrażającej wiek Pawła, to otrzymamy wiek Karola. Ponadto różnica kwadratów liczb wyrażających wiek każdego z nich jest kwadratem liczby całkowitej. Wiadomo, że każdy z nich ma ponad 10 lat. Po ile lat mają obaj panowie?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x cyfrę dziesiątek, zaś przez y cyfrę jedności liczby oznaczającej wiek Pawła. Wtedy Paweł ma $(10x + y)$ lat, zaś Karol ma $(10y + x)$ lat, przy czym
$x, y \in \{1,2,\dots,9\}$ oraz $x > y$.

Zgodnie z warunkami zadania istnieje liczba całkowita t taka, że $(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = t^2$.

Po przekształceniu otrzymujemy $99x^2 - 99y^2 = t^2$, czyli równoważnie $99(x - y)(x + y) = t^2$.

Ponieważ $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, to iloczyn $(x - y)(x + y)$ musi się dzielić przez 11. Otrzymujemy więc $x + y = 11$ oraz $x - y = 1$, a stąd $x = 6$ i $y = 5$.

Ostatecznie Paweł ma 65 lat, zaś Karol 56.

Zadanie 4. - 5 p.

Średnia arytmetyczna trzech liczb wynosi 20. Gdyby jedną z nich zastąpić jej dwukrotnością, to średnia arytmetyczna wynosiłaby wtedy 25. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie:

Oznaczmy dane liczby przez x, y, z. Wtedy z warunków zadania mamy

$$\frac{x + y + z}{3} = 20.$$

Niech x będzie tą z liczb, którą zastępujemy jej dwukrotnością. Mamy wtedy

$$\frac{2x+y+z}{3}=25.$$

Otrzymujemy więc układ równań

$$\begin{cases} x+y+z & = & 60 \\ 2x+y+z & = & 75 \end{cases}.$$

Po odjęciu równań stronami otrzymujemy natychmiast, że $x=15$.

Zadanie 5. – 4 p.

Wiedząc, że $W=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a\cdot d-c\cdot b$ rozwiąż równanie:

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & \frac{1}{2}(3+3x) \\ 4 & 3x+1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -\frac{x}{3} & -1 \\ x & -27x \end{vmatrix}=0.$$

Rozwiązanie:

Zapisujemy równanie w równoważnej postaci

$$(3x-1)\cdot(3x+1)-4\cdot\frac{1}{2}(3+3x)-\left[\left(-\frac{x}{3}\right)\cdot(-27x)-x\cdot(-1)\right]=0$$

i dalej

$$9x^2-1-6-6x-9x^2-x=0,$$

skąd otrzymujemy $x=-1$.

KONKURS „ZOSTAŃ PITAGORASEM"

ETAP II, CZĘŚĆ II - ZADANIA OTWARTE – KLUCZ ODPOWIEDZI

1. Jeżeli uczeń popełnił błąd w obrębie jednego z kryterium, to otrzymuje za to kryterium 0 punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo tego błędu tok rozumowania ma poprawny, to otrzymuje dalsze punkty zgodnie z kryteriami.
3. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie inną metodą, niż zaproponowana w kluczu, otrzymuje za to zadanie maksymalna liczbę punktów.

Numer zadania	Odpowiedzi	Liczba punktów
1	<u>Zauważenie, że po połączeniu środków okręgów powstanie trójkąt równoboczny:</u> Zauważmy, że łącząc środki okręgów (każdy o promieniu $r = 0{,}5\ m$) leżących na zewnątrz figury przedstawionej na rysunku otrzymujemy trójkąt równoboczny o boku $a = 4\ m$.	2
	<u>Obliczenie wysokości trójkąta:</u> Wysokość tego trójkąta jest równa $$H = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$	1
	<u>Obliczenie wysokości stosu:</u> Szukana wysokość stosu jest wtedy równa $$h = H + 2r = H + 2 \cdot 0{,}5\ m = H + 1\ m = \left(2\sqrt{3} + 1\right)m.$$	2
	Razem	**5 pkt.**
2	<u>Zapisanie liczb a, b, c w postaci:</u> $$a = 7x + 1,\ \ b = 7y + 2,\ \ c = 7z + 3,$$ gdzie x, y, z są liczbami całkowitymi.	1
	<u>Zapisanie liczby $a^2 + b^2 + c^2$ w postaci:</u> $$a^2 + b^2 + c^2 = (7x + 1)^2 + (7y + 2)^2 + (7z + 3)^2 =$$ $$= 49x^2 + 14\,x + 1 + 49y^2 + 28\,y + 4 + 49z^2 + 42\,z + 9 =$$ $$= 49x^2 + 14\,x + 49y^2 + 28\,y + 49z^2 + 42\,z + 14$$	2

	Zauważenie, że szukana reszta wynosi 0: Ponieważ liczby x, y, z są całkowite, to liczba $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2x + 4y + 6z + 2$ jest również całkowita, stąd $$a^2 + b^2 + c^2 = 7t,$$ gdzie t jest liczbą całkowitą, a więc reszta z dzielenia $a^2 + b^2 + c^2$ przez 7 wynosi 0.	2
	Razem	**5 pkt.**
3	Wprowadzenie oznaczeń: Oznaczmy przez x cyfrę dziesiątek, zaś przez y cyfrę jedności liczby oznaczającej wiek Pawła. Wtedy Paweł ma $(10x + y)$ lat, zaś Karol ma $(10y + x)$ lat, przy czym $x, y \in \{1,2, \dots ,9\}$ oraz $x > y$.	1
	Zapisanie zależności wynikającej z treści zadania: Zgodnie z warunkami zadania istnieje liczba całkowita t taka, że $(10x + y)^2 - (10y + x)^2 = t^2$.	1
	Przekształcenie zależności do równoważnej postaci: Po przekształceniu otrzymujemy $99x^2 - 99y^2 = t^2$, czyli równoważnie $99(x - y)(x + y) = t^2$.	2
	Analiza otrzymanej równości i rozwiązanie zadania: Ponieważ $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, to iloczyn $(x - y)(x + y)$ musi się dzielić przez 11. Otrzymujemy więc $x + y = 11$ oraz $x - y = 1$, a stąd $x = 6$ i $y = 5$. Ostatecznie Paweł ma 65 lat, zaś Karol 56.	2
	Razem	**6 pkt.**
4	Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie średniej arytmetycznej: Oznaczmy dane liczby przez x, y, z. Wtedy z warunków zadania mamy $$\frac{x + y + z}{3} = 20.$$	2

	<u>Zapisanie drugiej średniej arytmetycznej:</u> Niech x będzie tą z liczb, którą zastępujemy jej dwukrotnością. Mamy wtedy $$\frac{2x+y+z}{3}=25.$$	1
	<u>Zapisanie układu równań i wyznaczenie z niego liczby x:</u> Otrzymujemy więc układ równań $$\begin{cases} x+y+z & = & 60 \\ 2x+y+z & = & 75 \end{cases}.$$ Po odjęciu równań stronami otrzymujemy natychmiast, że $x=15$.	2
	Razem	**5 pkt.**
5	<u>Obliczenie wyznaczników i zapisanie równania w równoważnej postaci:</u> Zapisujemy równanie w równoważnej postaci $$(3x-1)\cdot(3x+1)-4\cdot\frac{1}{2}(3+3x)-\left[\left(-\frac{x}{3}\right)\cdot(-27x)-x\cdot(-1)\right]=0$$	2
	<u>Przekształcenie i rozwiązanie równania:</u> Mamy dalej $$9x^2-1-6-6x-9x^2-x=0,$$ skąd otrzymujemy $x=-1$.	2
	Razem	**4 pkt.**