KONKURS „ZOSTAŃ PITAGORASEM”

Klucz odpowiedzi

2012

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

TEST JEDNOKROTNEGO WYBORU - ROZWIĄZANIA

Uczeń zaznacza na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź. Każda poprawna odpowiedź to 1 pkt.

Numer pytania	Poprawna odpowiedź
1	(b)
2	(c)
3	(a)
4	(b)
5	(a)
6	(b)
7	(c)
8	(c)
9	(b)
10	(a)
11	(b)
12	(c)
13	(a)
14	(c)
15	(c)
16	(a)
17	(c)
18	(a)
19	(b)
20	(b)

TEST JEDNOKROTNEGO WYBORU

1. Równanie $x^2 - \pi x + 2 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych:
   (a) nie ma pierwiastków
   (b) ma dwa pierwiastki POPRAWNA
   (c) ma dokładnie jeden pierwiastek
2. Funkcja $f(x) = kx^2 + k$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego x rzeczywistego:
   (a) tylko dla $k = 1$
   (b) dla $k \geqslant 0$
   (c) dla $k > 0$ POPRAWNA
3. Liczba punktów wspólnych prostej o równaniu $y = 3$ i wykresu funkcji $f(x) = x^2, x \in \mathbf{W}$ wynosi:
   (a) 0 POPRAWNA
   (b) 1
   (c) 2
4. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2x^2$ dla $x \in (-1, 1)$ jest przedział:
   (a) $\langle 0, 2 \rangle$
   (b) $\langle 0, 2)$ POPRAWNA
   (c) $(-2, 2)$
5. Jeśli wiadomo, że miejscami zerowymi funkcji $f(x) = 2x^2 + bx + c$ są liczby -3 i 1, to $f(0)$ równa się:
   (a) -6 POPRAWNA
   (b) 0
   (c) 4
6. Równanie $x + \sqrt{x} = 2$:

(a) nie ma rozwiązań

(b) ma dokładnie jedno rozwiązanie POPRAWNA

(c) ma dwa rozwiązania

7. O wykresie funkcji kwadratowej wiemy, że jest parabolą mającą wierzchołek w punkcie $(1, 3)$ i przechodzącą przez punkt $(5, 5)$. Wynika stąd, że:

   (a) jest nieskończenie wiele takich funkcji

   (b) są dokładnie dwie takie funkcje

   (c) jest dokładnie jedna taka funkcja POPRAWNA

8. Wielomian $W(x) = x^4 + x^2 - 2$ jest podzielny przez:

   (a) $x - 3$

   (b) $x - 2$

   (c) $x - 1$ POPRAWNA

9. Suma wszystkich współczynników wielomianu $W(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)...(x - 100)(x + 100)$ jest równa:

   (a) 100

   (b) 0 POPRAWNA

   (c) 100!

10. Niech $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Wtedy dziedziną funkcji $g(x) = f(f(x))$ jest zbiór:

   (a) $\mathbf{R} \setminus \{-1, -2\}$ POPRAWNA

   (b) $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$

   (c) $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$

11. T jest trapezem, który nie jest równoległobokiem. Oznaczmy przez k sumę miar kątów przyległych do krótszej podstawy, zaś przez d sumę miar kątów przyległych do dłuższej podstawy. Wówczas:

   (a) zawsze zachodzi $k < d$

   (b) zawsze zachodzi $k > d$ POPRAWNA

(c) czasem zachodzi $k < d$, a czasem $k > d$

12. Długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC są liczbami nieparzystymi. Wówczas:

    (a) długość przeciwprostokątnej tego trójkąta może być liczbą całkowitą parzystą

    (b) długość przeciwprostokątnej tego trójkąta może być liczbą całkowitą nieparzystą

    (c) długość przeciwprostokątnej tego trójkąta nie jest liczbą całkowitą POPRAWNA

13. Pole pewnego koła jest równe P, zaś jego obwód jest równy t. Wynika z tego, że:

    (a) P jest liczbą niewymierną lub t jest liczbą niewymierną POPRAWNA

    (b) t jest liczbą niewymierną

    (c) P jest liczbą niewymierną

14. Trójkąty ABC i ABD są wpisane w ten sam okrąg. Wynika z tego, że:

    (a) trójkąty te mają równe pola

    (b) trójkaty te mają równe obwody

    (c) miary kątów ACB i ADB są równe POPRAWNA

15. Jeżeli długość jednego z boków trójkąta jest równa długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie, to:

    (a) trójkąt ten jest prostokątny

    (b) trójkąt ten jest ostrokątny

    (c) jeden z kątów tego trójkąta ma miarę równą $\frac{\pi}{6}$ lub ma miarę równą $\frac{5\pi}{6}$ POPRAWNA

16. Figura, która powstaje przez połączenie środków boków trapezu równoramiennego jest:

    (a) rombem POPRAWNA

(b) kwadratem

(c) prostokątem

17. Niech A - będzie okręgiem, B - kołem, C - odcinkiem bez jednego punktu, D - punktem, E - płaszczyzną bez jednego punktu, F - trójkątem, G - trapezem. Wtedy figurami wypukłymi są figury:

    (a) A, B, C, D

    (b) B, C, D, E

    (c) B, D, F, G POPRAWNA

18. Okręgi $o_1 : (x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ i $o_2 : x^2 + (y+2)^2 = \frac{3}{2}$:

    (a) nie mają punktów wspólnych POPRAWNA

    (b) mają jeden punkt wspólny

    (c) mają dwa punkty wspólne

19. Jeżeli pole kwadratu zwiększymy 4 razy, to promień okręgu opisanego na tym kwadracie zwiększy się o 1. Wynika stąd, że promień tego okręgu:

    (a) jest liczbą niewymierną

    (b) jest liczbą wymierną POPRAWNA

    (c) wynosi 2

20. Pola dwóch kwadratów różnią się o 16 cm^2, a ich boki o 2 cm. Zatem długości boków tych kwadratów wynoszą::

    (a) 2 cm i 4 cm

    (b) 3 cm i 5 cm POPRAWNA

    (c) 4 cm i 6 cm

ZADANIA OTWARTE - ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. (4 punkty)

Ile liczb całkowitych spełnia nierówność

$$((x-1)^2-1)^2 \leqslant 9?$$

Rozwiązanie.

Nierówność

$$((x-1)^2-1)^2 \leqslant 9$$

można zapisać w równoważnej postaci

$$((x-1)^2-1)^2 - 3^2 \leqslant 0$$

i dalej (wykorzystując wzór na różnicę kwadratów) w postaci

$$((x-1)^2-1-3)((x-1)^2-1+3) \leqslant 0$$

i dalej

$$((x-1)^2-4)((x-1)^2+2) \leqslant 0.$$

Ponieważ wyrażenie w drugim nawiasie jest dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x, to mamy

$$(x-1)^2-4 \leqslant 0.$$

Ponownie wykorzystując wzór na różnicę kwadratów dostajemy

$$((x-1)-2)((x-1)+2) \leqslant 0,$$

czyli

$$(x-3)(x+1) \leqslant 0.$$

Rozwiązaniem tej nierówności jest przedział $\langle -1, 3\rangle$. Jest więc pięć liczb całkowitych spełniających nierówność z treści zadania: $-1, 0, 1, 2, 3$.

Zadanie 2. (6 punktów)

W trapez $ABCD$ można wpisać okrąg. Ramiona tego trapezu są średnicami okręgów. Udowodnić, że okręgi te są styczne zewnętrznie.

Rozwiązanie.

Aby wykazać, że okręgi są styczne zewnętrznie, musimy udowodnić, że odległość ich środków jest równa sumie długości ich promieni.
Oznaczmy przez a, b długości podstaw tego trapezu, zaś przez c, d długości jego ramion. Środki okręgów, których średnicami są ramiona trapezów, leżą w środkach jego ramion (oznaczmy je przez O_1, O_2), zaś długości ich promieni są równe

$$r_1 = \frac{c}{2}, \ r_2 = \frac{d}{2},$$

a więc suma długości tych promieni wynosi

$$r_1 + r_2 = \frac{c+d}{2}.$$

Wiadomo, że odcinek łączący środki ramion trapezu ma długość równą średniej arytmetycznej długości podstaw trapezu, stąd

$$|O_1O_2| = \frac{a+b}{2}.$$

Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, to

$$a + b = c + d.$$

Widać więc, że

$$|O_1O_2| = r_1 + r_2,$$

a więc okręgi są styczne zewnętrznie.

Zadanie 3. (4 punkty)

W okrąg o promieniu długości r wpisano trójkąt równoramienny o podstawie długości r. Obliczyć pole tego trójkąta.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez H długość wysokości trójkąta z treści zadania. Wtedy jego pole będzie równe
$$P = \frac{r \cdot H}{2}.$$
Zauważmy, że łącząc środek okręgu z końcami podstaw tego trójkąta otrzymujemy trójkąt równoboczny w boku długości r. Oznaczmy długość wysokości tego trójkąta równobocznego przez h. Mamy wtedy
$$H = h + r.$$
Wykorzystując wzór na długość wysokości trójkąta równobocznego otrzymujemy
$$H = \frac{r\sqrt{3}}{2} + r = \frac{r(\sqrt{3}+2)}{2}.$$
Ostatecznie pole trójkąta z treści zadania jest równe
$$P = \frac{r^2(\sqrt{3}+2)}{4}.$$

Zadanie 4. (5 punktów)

Dla jakich wartości parametru m okrąg o równaniu
$$o : x^2 + y^2 - 2my + m^2 - 9 = 0$$
nie ma punktów wspólnych z prostą o równaniu
$$k : 4x + 3y - 3 = 0?$$

Rozwiązanie.

Oznaczmy środek danego okręgu przez O, zaś długość promienia tego okręgu przez r. Zapiszmy równanie okręgu w równoważnej postaci
$$o : x^2 + (y - m)^2 = 9.$$
Z postaci tej odczytujemy, że
$$O = (0, m),\ r = 3.$$

Obliczamy odległość środka okręgu $O=(0,m)$ od prostej $k: 4x+3y-3=0$. Otrzymujemy

$$d(O,k)=\frac{|4\cdot 0+3\cdot m-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|3m-3|}{5}.$$

Aby okrąg nie miał punktów wspólnych z prostą, to odległość jego środka od tej prostej musi być większa od długości jego promienia.
Otrzymujemy wiec nierówność

$$\frac{|3m-3|}{5}>3,$$

a więc równoważnie

$$|3m-3|>15.$$

Rozwiązujac tę nierówność otrzymujemy

$$x\in(-\infty,-4)\cup(6,\infty).$$

Zadanie 5. (6 punktów)

Obliczyć sumę pierwiastków równania

$$\frac{1}{1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+\frac{4}{x}}}}=5+x.$$

Rozwiązanie.

Wyznaczmy najpierw dziedzinę równania. Muszą być spełnione warunki

$$(x\neq 0)\wedge(1+\frac{4}{x}\neq 0)\wedge(1+\frac{3}{1+\frac{4}{x}}\neq 0)\wedge(1+\frac{2}{1+\frac{3}{1+\frac{4}{x}}}\neq 0),$$

a więc

$$(x\neq 0)\wedge(\frac{x+4}{x}\neq 0)\wedge(\frac{4x+4}{x+4}\neq 0)\wedge(\frac{6x+12}{4x+4}\neq 0).$$

Otrzymujemy stąd, że

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -4, -1, -2\}.$$

Po przekształceniu lewej strony równania możemy zapisać je w równoważnej postaci

$$\frac{6x + 12}{4x + 4} = 5 + x$$

i dalej

$$3x^2 + 19x + 28 = 0.$$

Równaie to ma dwa rozwiązania $x = -4$ oraz $x = -\frac{7}{3}$. Pierwsze rozwiązanie nie należy do dziedziny równania. Zatem sumarozwiązań jest równa drugiemu rowiązaniu i wynosi

$$-\frac{7}{3}.$$

Ocena:

Zadanie 1.

Sposób I (z klucza)
Skorzystanie z wzoru skróconego mnożenia – 2 punkty
Obliczenia – 1 punkt
Wnioski i odpowiedź – 1 punkt
Za błędy rachunkowe – -1 punkt

Sposób II (wykonanie działań i rozłożenie wielomianu na czynniki)
Obliczenia– 2 punkty
Znalezienie pierwiastków – 1 punkt
Wnioski i odpowiedź – 1 punkt
Za błędy rachunkowe – -1 punkt

Zadanie 2.

Poprawny rysunek – 1 punkt
Zauważenie że suma promieni to średnia z podstaw 2 - punkty
Skorzystanie z własności wpisywalności okręgu 2 - punkty
Połączenie tych faktów 1 - punkt
Za błędy rachunkowe – -1 punkt

Zadanie 3.

Poprawny rysunek – 1 punkt
Wyznaczenie wysokości jako sumę promieni i wysokości trójkąta równobocznego – 1 punkt
Wykorzystanie wzoru (albo inne wyliczenie) promienia trójkąta równobocznego – 1 punkt
Połączanie tych faktów i ostateczny wynik – 1 punkt
Za błędy rachunkowe – -1 punkt

Zadanie 4.

Znalezienie środka okręgu – 1 punkt
Podanie wzoru na odległość punktu od prostej – 1 punkt Rozwiązanie równania – 3 punkty
Za błędy rachunkowe – -1 punkt
(brak punktów za nieudane próby rozwiązywania układu równań)

Zadanie 5.
Wyznaczenie dziedziny – 1 punkt
Sprowadzenie do ostatecznego równania – 3 punkty Rozwiązanie równania – 2 punkty
Za błędy rachunkowe – -1 punkt