KONKURS „ZOSTAŃ PITAGORASEM"

Klucz odpowiedzi

TEST JEDNOKROTNEGO WYBORU

1. Przekątną wielościanu wypukłego nazywamy odcinek łączący jego dwa wierzchołki nie leżące na tej samej ścianie. Wielościan wypukły, który ma 8 wierzchołków:
   (a) może nie mieć przekątnych POPRAWNA
   (b) ma 4 przekątne
   (c) ma więcej niż 4 przekątne

2. Różnych liczb czterocyfrowych, w których pierwsza i ostatnia cyfra są takie same, jest:
   (a) 900 POPRAWNA
   (b) 600
   (c) 300

3. Kula K_1 ma objętość 8 razy większą niż kula K_2. Powierzchnia kuli K_1 jest większa od powierzchni kuli K_2:
   (a) 2 razy
   (b) 8 razy
   (c) 4 razy POPRAWNA

4. Niech dla każdej liczby naturalnej n, a_n oznacza liczbę dzielników liczby n, większych od 1. Ciąg (a_n):
   (a) przyjmuje wartość 1 dla nieskończenie wielu n POPRAWNA
   (b) jest monotoniczny
   (c) jest arytmetyczny

5. Spośród trzech poniższych brył największą objętość ma:
   (a) sześcian o krawędzi długości 1
   (b) stożek o promieniu podstawy długości 1 i wysokości długości 1 POPRAWNA
   (c) walec o średnicy podstawy długości 1 i wysokości długości 1

6. Niech $a = \log_5 10, b = \log_{50} 100$. Wówczas:

   (a) $a = b$

   (b) $a < b$

   (c) $b < a$ POPRAWNA

7. Liczba zer na końcu liczby 26! wynosi:

   (a) 5

   (b) 6 POPRAWNA

   (c) 26

8. Długość przekątnej sześcianu wynosi $\sqrt[3]{3}$. Długość przekątnej ściany tego szescianu wynosi:

   (a) $\sqrt[6]{\frac{8}{3}}$ POPRAWNA

   (b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

   (c) $\sqrt[3]{2}$

9. Mysz w ciągu pierwszej godziny zjadła $\frac{1}{3}$ kawałka sera, a w ciągu każdej następnej godziny zjada $\frac{1}{3}$ tego, co zostało. Wynika z tego, że:

   (a) mysz zje co najwyżej $\frac{3}{4}$ kawałka sera

   (b) mysz zje co najwyżej $\frac{1}{2}$ kawałka sera

   (c) po pewnej liczbie godzin okaże się, że mysz zjadła więcj niż $\frac{2}{3}$ kawałka sera TAK

10. Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 3n - 1$ dla każdej liczby naturalnej n. Dla każdego $n > 1$ mamy:

    (a) $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ POPRAWNA

    (b) $(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$

    (c) $a_{n+1} - a_n = 1$

11. Istnieje wielościan o 15 krawędziach:

    (a) będący ostrosłupem

(b) będący graniastrosłupem POORAWNA
(c) mający ścianę ośmiokątną

12. Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = (\frac{\pi}{3{,}14})^n$ dla każdej liczby naturalnej n jest:

(a) stały
(b) rosnący POPRAWNA
(c) malejący

13. Miary kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Wynika stąd, że:

(a) suma miar pewnych dwóch kątów tego trójkąta jest równa $120°$ POPRAWNA
(b) kwadraty długości boków tego trójkąta też tworzą ciąg arytmetyczny
(c) jeden z boków tego trójkąta jest dwa razy dłuższy od innego

14. Liczba $41! + 42! + 43!$:

(a) nie dzieli się przez 42^2
(b) dzieli się przez 43^3
(c) dzieli się przez 43^2 POPRAWNA

15. Z miasta A do miasta B prowadzi 11 dróg. Trasę z A do B i z poiwrotem można przebyć na:

(a) 141 sposobów
(b) 110 sposobów nie wracając tą samą drogą POPRAWNA
(c) 120 sposobów

16. Używając cyfr ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ zapisano wszystkie liczby, których cyfry nie powtarzają się. Wobec tego zapisano:

(a) 15 liczb POPRAWNA
(b) 24 liczby
(c) 6 liczb

17. Wewnątrz sześcianu o krawędzi długości 1:

   (a) nie zmieści się czworościan foremny o krawędzi długości $\frac{7}{5}$
   (b) nie zmieści się kula o powierzchni $\frac{31}{10}$
   (c) zmieści się walec o wysokości $\frac{17}{10}$ POPRAWNA

18. Wartość wyrażenia $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$ wynosi:

   (a) $\frac{3}{4}$ POPRAWNA
   (b) $\frac{4}{3}$
   (c) $\frac{1}{2}$

19. Nierówność $a^\pi < a^3$:

   (a) zachodzi dla pewnego $a \in (1, \infty)$
   (b) zachodzi dla każdego $a \in (0, 1)$ POPRAWNA
   (c) nie zachodzi dla żadnego $a > 0$

20. Każdy z 30 uczniów wybiera 2 z zestawu 8 zadań. Czy może się zdarzyć, że każdy uczeń dokona innego wyboru?

   (a) nie można tego jednoznacznie stwierdzić
   (b) tak
   (c) nie POPRAWNA

TEST JEDNOKROTNEGO WYBORU - ROZWIĄZANIA

Numer pytania	Poprawna odpowiedź
1	(a)
2	(a)
3	(c)
4	(a)
5	(b)
6	(c)
7	(b)
8	(a)
9	(c)
10	(a)
11	(b)
12	(b)
13	(a)
14	(c)
15	(b)
16	(a)
17	(c)
18	(a)
19	(b)
20	(c)

ZADANIA OTWARTE - ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. (6 punktów) Obliczyć stosunek objętości kuli opisanej na walcu do objętości kuli wpisanej w ten walec.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez r długość promienia podstawy walca. Ponieważ w walec można wpisać kulę, to jego przekrój osiowy jest kwadratem o boku długości $2r$, stąd wysokość walca ma długość

$$h = 2r.$$

Długość promienia kuli wpisanej w walec jest równa r, stąd objętość kuli wpisanej w walec wynosi

$$V_w = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Długość promienia kuli opisanej na walcu jest z kolei połową długości przekątnej kwadratu o boku $2r$, a więc wynosi $R = r\sqrt{2}$, stąd objętość kuli opisanej na walcu jest równa

$$V_o = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(r\sqrt{2})^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi r^3.$$

Szukany stosunek objętości wynosi więc

$$\frac{V_o}{V_w} = \frac{\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2\sqrt{2}.$$

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Zauważenie, że przekrojem osiowym walca jest kwadrat - **1 punkt.**

Wyznaczenie długości promienia kuli wpisanej w walec i obliczenie jej objętości - **2 punkty.**

Wyznaczenie długości promienia kuli opisanej na walcu i obliczenie jej objętości - **2 punkty.**

Wyznaczenie szukanego stosunku objętości kul - **1 punkt.**

Zadanie 2. (4 punkty) Pierwszymi trzema wyrazami pewnego ciągu są liczby a, b, c. Każdy następny wyraz jest sumą trzech wyrazów poprzedzających go. Jeśli $a = 4$ oraz $c = -b$, to dla jakiej liczby b dziewiąty wyraz tego ciągu jest równy 0?

Rozwiązanie.
Uwględniając warunki zadania otrzymujemy ciąg o następujących wyrazach:

$$a_1 = 4, a_2 = b, a_3 = -b, a_4 = 4, a_5 = 4, a_6 = 8-b, a_7 = 16-b, a_8 = 28-2b, a_9 = 52-4b.$$

Ponieważ z założenia

$$a_9 = 0,$$

to otrzymujemy

$$52 - 4b = 0,$$

a stąd

$$b = 13.$$

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Wyznaczenie pierwszych dziewięciu wyrazów ciągu (z uwzględnieniem warunków zadania) - **3 punkty.**

Wyznaczenie wartości b, dla której dziewiąty wyraz ciągu jest równy 0 - **1 punkt.**

Zadanie 3. (4 punkty) Rozwiązać równanie:

$$\frac{(n+2)! + n!}{(n+2)! - (n+1)!} = \frac{7}{4}.$$

Rozwiązanie.

Wykorzystując własności silni możemy zapisać równanie w równoważnej postaci

$$\frac{n![(n+1)(n+2)+1]}{n![(n+1)(n+2)-(n+1)]} = \frac{7}{4}$$

i dalej

$$\frac{n^2+3n+3}{n^2+2n+1} = \frac{7}{4}.$$

Otrzymujemy więc równanie kwadratowe

$$3n^2+2n-5=0,$$

którego rozwiązaniami są liczby $n_1 = 1$ i $n_2 = -\frac{5}{3}$. Liczba n_2 nie jest liczbą naturalną, więc jedynym rozwiązaniem równania jest $n_1 = 1$.

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Zapisanie równania w równoważnej postaci (wykorzystanie własności silni) **- 2 punkty.**

Otrzymanie równania kwadratowego **- 1 punkt.**

Rozwiązanie równania kwadratowego **- 1 punkt.**

Zadanie 4. (6 punktów) Liczby

$$\log_4(x-3), \log_4(2x+2), \log_4(x^2+2x+1)$$

są trzema początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n). Wyznaczyć wyraz a_{2013}.

Rozwiązanie.

Z warunków zadania wynika, że $x > 3$. Z definicji ciągu arytmetycznego otrzymujemy, że

$$\log_4(2x+2) - \log_4(x-3) = \log_4(x^2+2x+1) - \log_4(2x+2).$$

Z własności logarytmów mamy dalej

$$\log_4 \frac{2x+2}{x-3} = \log_4 \frac{x^2+2x+1}{2x+2}.$$

Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa, a więc

$$\frac{2x+2}{x-3} = \frac{x^2+2x+1}{2x+2}$$

i dalej

$$\frac{2(x+1)}{x-3} = \frac{(x+1)^2}{2(x+1)},$$

a stąd

$$\frac{2}{x-3} = \frac{1}{2},$$

czyli ostatecznie

$$x = 7.$$

Otrzymujemy więc

$$a_1 = \log_4(x-3) = \log_4 4 = 1, a_2 = \log_4(2x+2) = \log_4 16 = 2, a_3 = \log_4(x^2+2x+1) = \log_4 64 = 3.$$

Ciąg (a_n) dany jest więc wzorem $a_n = n$, a stąd

$$a_{2013} = 2013.$$

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Wyznaczenie dziedziny **- 1 punkt.**

Wykorzystanie definicji ciągu arytmetycznego i zapisanie równania logarytmicznego- **1 punkt.**

Wykorzystanie własności logarytmów i różnowartościowości funkcji logarytmicznej i otrzymanie równania wymiernego **- 2 punkty.**

Rozwiązanie równania wymiernego **- 1 punkt.**

Wyznaczenie wzoru ciągu (a_n) i wyrazu

$$a_{2013}.$$

- 1 punkt.

Zadanie 5. (5 punktów) Jacek postanowił wypisać wszystkie liczby naturalne czterocyfrowe, w których zapisie dziesiętnym występują tylko dwie różne cyfry, zaś Placek wszystkie liczby naturalne czterocyfrowe o różnych cyfrach, podzielne przez 5. Ile liczb wypisze każdy z chłopców?

Rozwiązanie.

Obliczymy najpierw, ile liczb musi wypisać Jacek. Liczby muszą być jednej z postaci

$$xxxy, xxyx, xyxx, yxxx, xxyy, xyyx, xyxy.$$

W każdym z tych 7 przypadków cyfrę x można wybrać na 9 sposobów, cyfrę y też na 9 sposobów. Daje nam to

$$7 \cdot 9 \cdot 9 = 567$$

liczb.

Obliczymy teraz, ile liczb musi wypisać Placek. Skoro liczba ma być podzielna przez 5, to jej ostatnia cyfra musi należeć do zbioru $\{0, 5\}$. Jeśli ostatnią cyfrą jest 0, to pierwszą cyfrę możemy wybrać na 9 sposobów (nie może być równa 0), drugą na 8 sposobów (musi być różna od pierwszej i od 0), a trzecią na 7 sposobów. Daje nam to

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

liczby.

Jeśli zaś ostatnią cyfrą jest 5, to pierwszą cyfrę możemy wybrać na 8 sposobów (nie może być równa 0 ani 5), drugą na 8 sposobów (musi być różna od pierwszej i od 5), a trzecią na 7 sposobów. Daje nam to

$$8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$$

liczb.

Ostatecznie Placek musi wypisać

$$448 + 504 = 952$$

liczby.

PROPOZYCJA PODZIAŁU PUNKTÓW

Zauważenie, jakiej postaci są liczby wypisywane przez Jacka i obliczenie, ile liczb Jacek wypisze- **2 punkty.**

Zauważenie, jakiej postaci są liczby wypisywane przez Placka (wykorzystanie cechy podzielności przez 5) i obliczenie, ile liczb Placek wypisze- **3 punkty.**