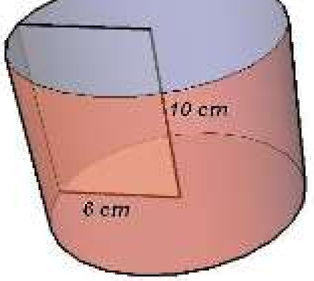
REGUŁA GULDINA

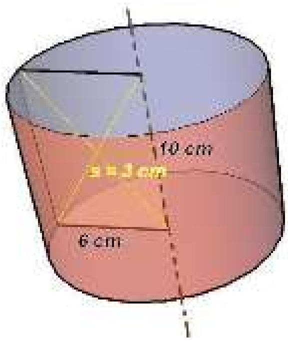
dr Bronisław Pabich

Rzeszów 2 marca 2013

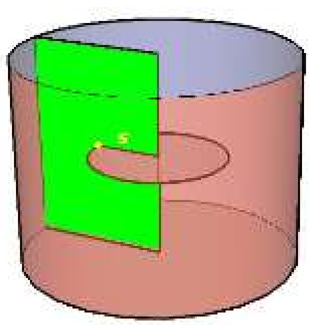
EKSPERYMENT1
Obliczmy objętość walca powstałego przez obrót prostokąta o wymiarach 6 x 10 cm wokół prostej w której zawiera się odcinek długości tego prostokąta – rys. 1.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Znając wymiary prostokąta Łatwo ją wyznaczyć:

$$V_{walca} = \pi \cdot 6^2 \cdot 10$$

Ale przedstawmy wynik w trochę innej postaci:

$$V_{walca} = 6 \cdot 10 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 3 = Pole_{prostok} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3$$

$$V_{walca} = Pole_{prostok} \cdot Obwód_{koło\ o\ proms}$$

Okazuje się, że objętość tego walca to iloczyn pola prostokąta, który obracaliśmy wokół jego dłuższego boku przez obwód koła, które zakreśli w przestrzeni środek ciężkości S tego prostokąta – rys. 2 i 3.
W ten sposób odkryliśmy na konkretnym przykładzie zasadę, którą odkrył na początku XVII wieku szwajcarski matematyk i astronom Paul Guldin (właśc. Habakkuk Guldin) (1577 – 1643) – rys. 4


Rys. 4

Jego zasada zwana pierwszą regułą Guldina brzmi następująco:

1 REGUŁĄ GULDINA
Objętość bryły powstającej przez obrót figury płaskiej dookoła nie przecinającej jej osi jest równa iloczynowi pola tej figury przez długość okręgu, jaki vzakreśla przy tym obrocie jej środek ciężkości.

EKSPERYMENT 2
Obliczmy pole walca powstałego przez obrót prostokąta o wymiarach 6 cm x 10 cm wokół prostej w której zawiera się odcinek długości tego prostokąta.
I znowu łatwo wyznaczyć pole całkowite walca:

$$S_{walca} = 2 \cdot \pi \cdot 6^2 + 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10$$

Ale po małych przekształcenia przyjmie ono inną postać:

$$S_{walca} = 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 2 \cdot 10 =$$
$$= 2\pi \cdot 3 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 10) = 2\pi \cdot 3 \cdot =$$
$$= Obwód_{koło\ o\ proms} \cdot Obwód_{prostok}$$

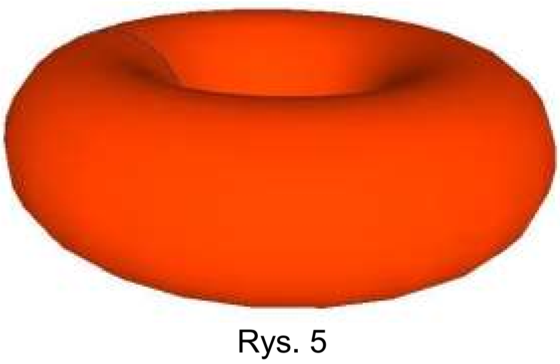
która przedstawia drugą powierzchniową regułę Guldena:

2 REGUŁĄ GULDINA

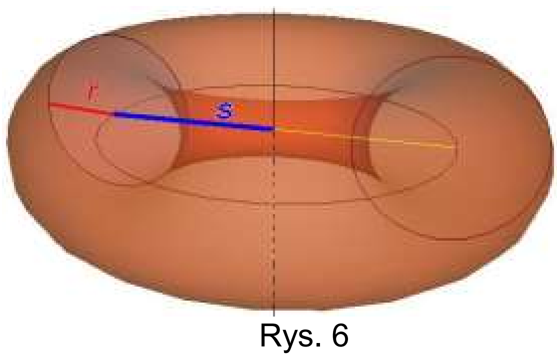
Pole powierzchni, powstałej przez obrót płaskiej linii dokoła osi leżącej w płaszczyźnie tej linii i nie przecinającej jej, jest równe długości tej linii pomnożonej przez długość okręgu, jaki przy obrocie zakreśla środek ciężkości danej linii

Do czego mogą się przydać te reguły? Otóż jak widać fizyk może dzięki niej określić dokładnie środek ciężkości płaskiego obszaru, jeśli potrafi znaleźć pole lub objętość bryły powstałej z obrotu tego obszaru wokół osi nie przecinającej go w żadnym punkcie.
Matematyk zaś może wyznaczyć pole lub objętość bryły obrotowej, pod warunkiem, że zna środek ciężkości płaskiej figury, która po obrocie dała kształt tej bryły.

POLE I OBJĘTOŚĆ TORUSA
Wykorzystajmy te reguły w wyznaczeniu pola i objętości torusa – rys. 5.
Wydaje się to łatwe z uwagi na fakt, że torus powstaje z obrotu koła a jego środek ciężkości jest jego środkiem. Wszystko zależy więc od wielkości tego koła i odległości jego środka od osi obrotu.
Przyjmijmy:
r = promień koła tworzącego torus
s =odległość środka ciężkości od osi obrotu (rys. 6



Rys. 5

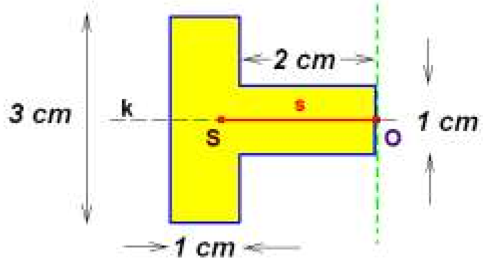


Rys. 6

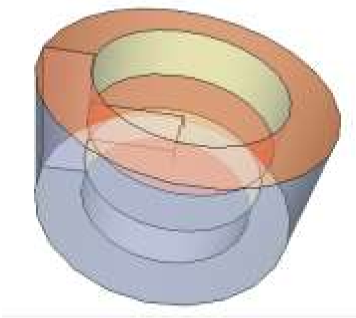
Oto wyznaczone wartości:

$P_{torusa} = 2\pi \cdot r \cdot 2\pi \cdot s = 4\pi^2 \cdot r \cdot s$ $\qquad$ $V_{torusa} = \pi \cdot r^2 \cdot 2\pi \cdot s = 2\pi^2 r^2 s$

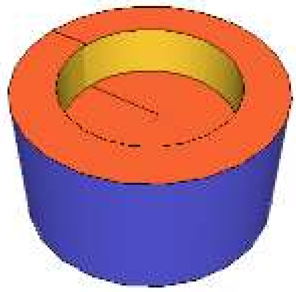
WYZNACZANIE ŚRODKA CIĘŻKOŚCI
Chcemy wyznaczyć środek ciężkości figury w kształcie litery T, której wymiary ilustruje rysunek 7:



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Gdybyśmy obrócili tę figurę wokół prostej prostopadłej do osi symetrii figury przechodzącej przez punkt O, wówczas otrzymalibyśmy bryłę w kształcie walca z wyciętymi w niej dwoma walcami – rys. 8 i 9.

Objętość tej bryły łatwo wyznaczyć:

$$V_T = V_{walca1} - 2 \cdot V_{walca2} = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 - 2 \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = 19\pi$$

Według reguły Guldena ta sama objętość wynosi:

$$V_t = 5 \cdot 2\pi \cdot s$$

Porównując obie wartości otrzymamy równanie:

$$5 \cdot 2\pi \cdot s = 19\pi$$

Skąd:

$$s = 1{,}9\ cm$$

Czy taki sam wynik otrzymamy stosując 2 regułę Guldina?

$$P_T = P_{walca1} + 2 \cdot P_{boczne\_walca2} = (2 \cdot \pi \cdot 3^2 + 2\pi \cdot 3 \cdot 3) + 2 \cdot 2\pi \cdot 2 =$$

$$18\pi + 18\pi + 8\pi = 44\pi$$

To samo pole wyznaczone regułą Guldina wynosi:

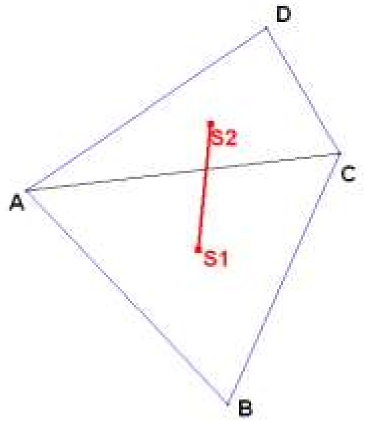
$$P_T = 12 \cdot 2\pi \cdot s$$

Porównując obie wartości otrzymamy

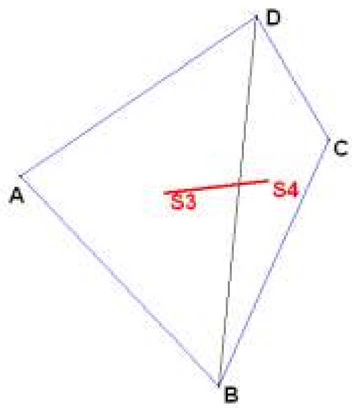
$$s = \frac{44}{24} cm = 1{,}833$$

ŚRODEK CIĘŻKOŚCI CZWOROKĄTA

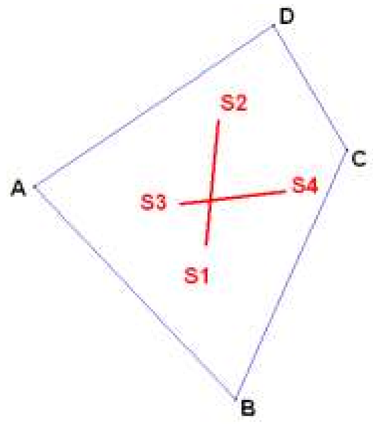
Sposób wyznaczania środka ciężkości trójkąta jest na ogół znany. Znajdujemy go jako punkt przecięcia się jego środkowych.
Dla czworokąta sprawa się nieco komplikuje. Środek ten wyznaczamy według opisu poniższej konstrukcji:



Rys. 10



Rys. 11

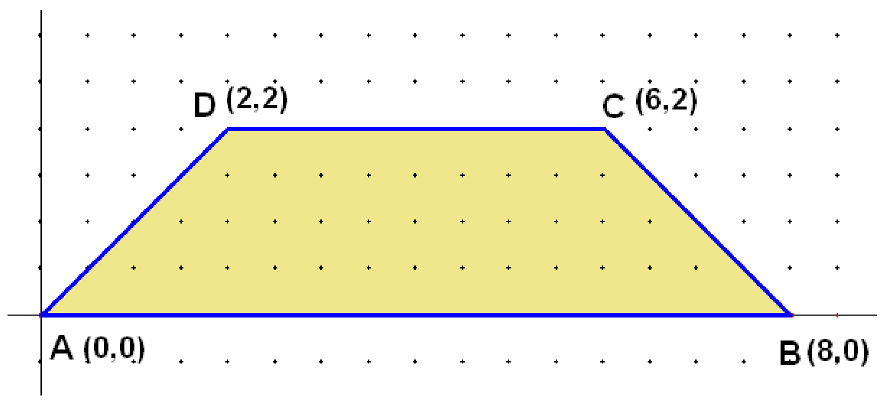


Rys 12

- prowadzimy w czworokącie ***ABCD*** jedną z jego przekątnych,
- podzieliła ona czworokąt na dwa trójkąty ***ABC*** i ***ACD***,
- wyznaczamy środek ciężkości każdego nich,
- łączymy odcinkiem wyznaczone środki ciężkości,
- prowadzimy w czworokącie ***ABCD*** drugą z jego przekątnych,
- podzieliła ona czworokąt na dwa trójkąty ***ABD*** i ***BCD***,
- wyznaczamy środek ciężkości każdego nich,
- łączymy odcinkiem wyznaczone środki ciężkości,
- punkt przecięcia obu odcinków jest środkiem ciężkości całego czworokąta ***ABCD***.

Reguła Guldina pozwala wyznaczyć środek ciężkości dowolnego czworokąta. Wyznaczmy go w konkretnym przypadku:

Niech czworokąt ma wierzchołki ***A***(0,0), ***B***(0,8), ***C***(6,2) i ***D***(2,2).



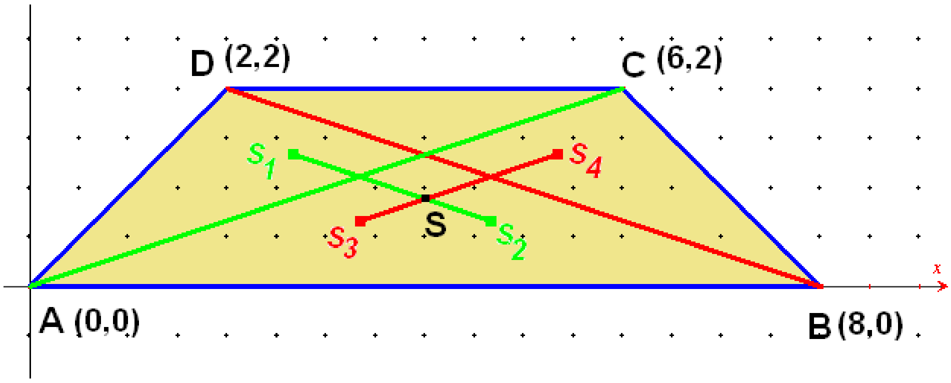
Współrzędne środka ciężkości trójkąta można wyznaczyć szybko jako średnie arytmetyczne jego odpowiednich współrzędnych wierzchołków.

$$S_1(\Delta ACD) = \left(\frac{0+2+6}{3}, \frac{0+2+2}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

$$S_2(\Delta ABC)=\left(\frac{0+8+6}{3},\frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{14}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$S_3(\Delta ABD)=\left(\frac{0+8+2}{3},\frac{0+0+2}{3}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$S_4(\Delta BCD)=\left(\frac{8+6+2}{3},\frac{0+2+2}{3}\right)=\left(\frac{16}{3},\frac{4}{3}\right)$$



Prosta ***S₁S₂*** ma równanie:

$$\frac{x-\frac{8}{3}}{\frac{14}{3}-\frac{8}{3}}=\frac{y-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}}\Rightarrow\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)=\left(y-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{6}{3}\right)\Rightarrow x+3y=\frac{20}{3}$$

Prosta ***S₃S₄*** ma równanie:

$$\frac{x-\frac{10}{3}}{\frac{16}{3}-\frac{10}{3}}=\frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}\Rightarrow\left(x-\frac{10}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\left(y-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{6}{3}\right)\Rightarrow x-3y=\frac{4}{3}$$

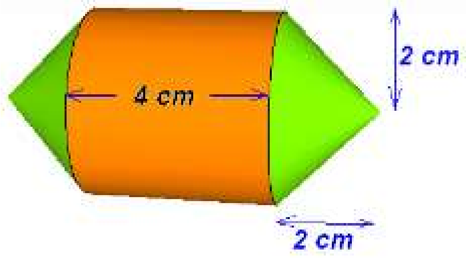
Rozwiązując układ tych równań

$$\begin{cases} x+3y=\frac{20}{3} \\ x-3y=\frac{4}{3} \end{cases}$$

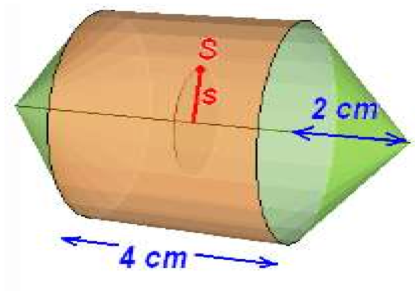
otrzymamy x=4, y=$\frac{8}{9}$

Po obrocie trapezu uzyskamy bryłę obrotową złożoną z walca i dwóch przystających stożków.
Objętość bryły obliczona tradycyjnie wynosi:

$$V=\pi\cdot 2^2\cdot 4+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot 2=\frac{64}{3}\pi$$



Ta sama objętość obliczona na zasadzie reguły Guldina wynosi:



$$V = \frac{(8+4)}{2} \cdot 2 \cdot (2\pi \cdot s) = 24\pi \cdot s$$

Porównując obie wartości

$$V = \frac{64}{3}\pi \qquad\qquad V = 24 \cdot \pi \cdot s$$

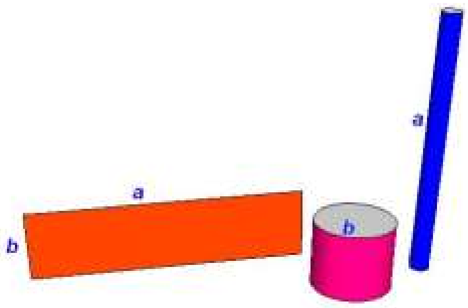
możemy wyznaczyć odległość ***s*** środka ciężkości od dłuższej podstawy trapezu:

$$s = \frac{8}{9}$$

Co w porównaniu z geometrycznym środkiem symetrii trapezu równoramiennego daje dokładny rezultat:

CZY ZAWSZE STOSUJEMY REGUŁĘ GULDINA?

Rozważmy w tym celu pewien problem optymalizacyjny. Jest dany arkusz kartki, którą zwijamy na dwa sposoby tak, by uzyskać za każdym razem powierzchnię walca.
W jednym przypadku będzie to szeroki walec o małej wysokości, a w drugim wąski o dużej wysokości.
Który z nich ma większą objętość?



Na pierwszy rzut oka wydaje się, że ten szerszy jest większy, ale gdy kartka, z której zwijamy walce zbliżona jest swym kształtem do kwadratu, wówczas trudno rozstrzygnąć, który z walców ma większa objętość.

Niech kartka prostokątna ma wymiary
długość = a
szerokość = b

Wówczas szerszy walec ma objętość:

$$V_{walca1} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \cdot b = \frac{a^2 b}{4\pi} = a \cdot \frac{ab}{4\pi}$$

Zaś węższy ma objętość:

$$V_{walca2} = \pi \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 a = \frac{b^2 a}{4\pi} = b \cdot \frac{ab}{4\pi}$$

Dla obu rozwiązań pojawia się ten sam współczynnik: $\frac{ab}{4\pi}$

Zatem: ten walec ma większą objętość, którego wartość obwodu (***a*** lub ***b***) jest większa.
Ponieważ w naszym przypadku ***a***>***b***, więc walec o obwodzie ***a*** ma większą objętość.

Wartość objętości każdego z tych walców obliczona metodą Guldina nie wyrazi się poprzez długość ani szerokość kartki papieru, którą zwijamy w walec. Ta reguła niestety nie nadaje się do rozwiązania tego problemu.