Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przygotowanie uczniów do nowej matury z matematyki

mgr Adam Kawałek

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Opracowano na podstawie materiału z konferencji dla nauczycieli doradców metodycznych I konsultantów organizowanych przez CKE . Zadania pochodzą głównie z propozycji prof. Wojciecha Guzickiego i Piotra Ludwikowskiego

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Rodzaje zadań egzaminacyjnych w arkuszu maturalnym na poziomie rozszerzonym:

- Zadania zamknięte (wielokrotnego wyboru lub prawda fałsz)
- Zadania z kodowaną odpowiedzią
- Zadania otwarte krótkiej odpowiedzi
- Zadania otwarte rozszerzonej odpowiedzi.

Podstawa programowa z komentarzami

Tom 6.

Edukacja matematyczna i techniczna w szkole podstawowej, gimnazjum i liceum

matematyka, zajęcia techniczne, zajęcia komputerowe, informatyka

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

MATEMATYKA

GIMNAZJUM I LICEUM

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

II. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji.

III. Modelowanie matematyczne.

IV. Użycie i tworzenie strategii.

V. Rozumowanie i argumentacja.

Najważniejsze zmiany dla zakresu podstawowego

Treści, które przeszły z gimnazjum:

- wzory skróconego mnożenia (a ± b)2oraz a2 – b2
- nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- funkcja i jej własności
  (w gimnazjum tylko odczytywanie własności funkcji z wykresu)
- funkcja liniowa
- graniastosłupy pochyłe
- cechy podobieństwa trójkątów
- interpretacja graficzna układu równań

Treści nowe:

- własności potęg i funkcje wykładnicze w opisie zjawisk fizycznych, chemicznych itp.
- symetria w układzie współrzędnych
- przekroje prostopadłościanów płaszczyzną
- rozszerzenie zakresu funkcji trygonometrycznych do kątów rozwartych

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Najważniejsze zmiany dla zakresu rozszerzonego

Treści, które przeszły z gimnazjum:
- twierdzenie Talesa

Treści nowe:
- granice ciągów liczbowych typu 1/n, 1/n2
- suma szeregu geometrycznego zbieżnego
- rachunek różniczkowy (granice funkcji, pochodne funkcji wymiernych, pochodna jako narzędzie do wyznaczania przedziałów monotoniczności oraz ekstremów funkcji, zadania optymalizacyjne z użyciem pochodnej)
- prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Treści przesunięte między poziomami

Treści przesunięte z podstawowego do rozszerzonego:

- wartość bezwzględna (interpretacja na osi liczbowej)
- działania na wyrażeniach algebraicznych: wzory skróconego mnożenia na (a ± b)3 oraz a3 ± b3, rozkład wielomianu na czynniki, działania na wielomianach i wyrażeniach wymiernych
- układy równań prowadzące do równań kwadratowych
- równanie okręgu

PODSTAWA PROGRAMOWA PRZEDMIOTU *MATEMATYKA*

II etap edukacyjny

$P=1/2\ a \cdot b$

6. Elementy algebry. Uczeń:
   1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, zamienia wzór na formę słowną;
   2) stosuje oznaczenia literowe nieznanych wielkości liczbowych i zapisuje proste wyrażenie algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym;
   3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego).

III etap edukacyjny

$(a+3b) \cdot (4+6d)$

$s = (a \cdot t^2) : 2$

$a = 2s : t^2$

3) redukuje wyrazy podobne w sumie algebraicznej;
4) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne;
5) mnoży jednomiany, mnoży sumę algebraiczną przez jednomian oraz, w nietrudnych przykładach, mnoży sumy algebraiczne;
6) wyłącza wspólny czynnik z wyrazów sumy algebraicznej poza nawias;
7) wyznacza wskazaną wielkość z podanych wzorów, w tym geometrycznych i fizycznych.

IV etap edukacyjny

1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.

MATEMATYKA

II etap edukacyjny: klasy IV–VI

$2x+5=11$
$x=3$

3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (poprzez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania odwrotnego).

III etap edukacyjny

$2x+5=11+x$
$2x-x=11-5$
$x=6$

2) wskazuje na osi liczbowej zbiór liczb spełniających warunek typu: $x \geq 3$, $x < 5$;

3) rozwiązuje równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą;

7) za pomocą równań lub układów równań opisuje i rozwiązuje zadania osadzone w kontekście praktycznym.

IV etap edukacyjny

3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;

$2x+5>11+x$
$2x-x>11-5$
$x>6$

- Interpretując dowolne sformułowanie z podstaw, należy stosować też zasadę:
- (III) Jeżeli w podstawach zapisane jest jakieś wymaganie A, to również wymaga się wszystkiego, co w oczywisty sposób jest niezbędne dla A.
- Nie obejmuje to jednak uogólnień pojęć wykorzystywanych w A, ani bloku wiedzy teoretycznej z nimi związanej.

Komentarz do podstawy programowej przedmiotu *matematyka*– Zbigniew Semadeni, Marcin Karpiński, Krystyna Sawicka, Marta Jucewicz, Anna Dubiecka, Wojciech Guzicki, Edward Tutaj:

„O tym, jaka będzie wykładnia podstawy programowej, zadecyduje praktyka nauczania i praktyka egzaminów maturalnych. Po kilku latach funkcjonowania nowej podstawy programowej, w wyniku współdziałania szkoły, komisji egzaminacyjnych i uczelni wyższych, ustali się pewien poziom interpretowania i realizowania obowiązujących wymagań."

Przykłady zadań przedstawione podczas warsztatów dla nauczycieli doradców metodycznych i konsultantów przez zespół pod kierunkiem profesora Guzickiego pracujący w ramach CZEM

Zadanie 1.

Oblicz granicę ciągu: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+4}+\frac{3n-4}{6n+5}\right).$

Zadanie 1.a

Uzasadnij, że $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+4}+\frac{3n-4}{6n+5}\right)=\frac{7}{8}.$

Zadanie 2. Granica ciągu

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5-2n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^3+5n^4+6n^5}$. Zakoduj odpowiedź.

Zadanie 2. Granica ciągu (rozwiązanie)

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5-2n^3+3n}{1+2n+3n^2+4n^3+5n^4+6n^5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)}{n^5\left(\frac{1}{n^5}+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^3}+\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n}+6\right)}=\frac{1}{6}$$

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry 0,1,6.

Zadanie 3. Granica ciągu

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = \dfrac{(7p-1)n^2 - 3pn + 2p}{1+pn^2}$ dla $n \geq 1$ i $p \neq 0$. Oblicz, dla jakiej wartości p granica ciągu (a_n) jest równa 0. Zakoduj odpowiedź.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 3. Granica ciągu (rozwiązanie)

Wyznaczamy granicę ciągu (a_n) w zależności od p:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(7p-1)n^2-3pn+2p}{1+pn^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(7p-1-\frac{3p}{n}-\frac{2p}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}+p\right)}=\frac{7p-1}{p}$$

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{7p-1}{p}=0$$

$$p=\frac{1}{7}$$

W arkuszu odpowiedzi należy zakodować cyfry $0,1,4$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 4. Granica ciągu

Ciągi (a_n), (b_n) określone są następująco: $a_n = \frac{1}{2}n^2 - 2$ oraz $b_n = \frac{n^3 - 11n + 5}{2n}$, dla $n \geq 1$.

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n)$. Zakoduj odpowiedź.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 5.

Granica $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^8 - 2n^3 + 3n}{12 + 5n^4 + 6n^5}$ jest równa

A. $-\infty$ B. $-\dfrac{1}{2}$ C. 0 D. $+\infty$

Rozwiązanie

Obliczamy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8 - 2n^3 + 3n}{12 + 5n^4 + 6n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^8\left(1 - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7}\right)}{n^5\left(\frac{12}{n^5} + \frac{5}{n} + 6\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1 - \frac{2}{n^5} + \frac{3}{n^7}\right)}{\left(\frac{12}{n^5} + \frac{5}{n} + 6\right)} = \infty .$$

Odp.: D

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 6. Szereg geometryczny

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, o ilorazie $q = \frac{2}{3}$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa -6. Oblicz $a_3 - a_1$.

Zakoduj odpowiedź.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 6. Szereg geometryczny (rozwiązanie)

Ze wzoru na sumę wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego $S=\frac{a_1}{1-q}$ $(\text{dla } |q|<1)$ obliczamy a_1:

$-6=\frac{a_1}{1-\frac{2}{3}}$, stąd $a_1=-2$.

$$a_3=a_1\cdot q^2=(-2)\cdot\frac{4}{9}=-\frac{8}{9}$$

Zatem $a_3-a_1=-\frac{8}{9}-(-2)=1\frac{1}{9}$.

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
11. Rachunek różniczkowy. Uczeń:	
	1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych; 2) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej; 4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji; 5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych; 6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zadanie 7. Granica funkcji

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2-x^2}{x+2}$ dla $x \neq -2$. Granica $\lim_{x\to 2} f(x)$ jest równa

A. $-\infty$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $+\infty$

Rozwiązanie:

Obliczamy $f(2)$.

$$f(2)=\frac{2-4}{2+2}=-\frac{1}{2}$$

Odp.: B

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 8. Granica funkcji

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ dla $x \neq 3$. Granica $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ jest równa

A. $-\infty$ B. 0 C. 6 D. $+\infty$

Rozwiązanie:

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty$$

Odp.: A.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 9.

Dana jest funkcja *f* określona wzorem: $f(x)=\frac{2x+7}{x^2+3}$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=-\frac{1}{2}$.

Zadanie 9.a

Dana jest funkcja *f* określona wzorem: $f(x)=\frac{2x+7}{x^2+3}$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Uzasadnij, że $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{200}{169}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 10.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=x^3-3x+1$ i leżący na wykresie tej funkcji punkt A o współrzędnej x równej 2. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie A.

Zadanie 10.a

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=x^3-3x+1$ i leżący na wykresie tej funkcji punkt A o współrzędnej x równej 2. Uzasadnij, że styczna do wykresu funkcji f w punkcie A ma równanie $y=9x-15$.

Rozwiązanie

Styczna do wykresu funkcji o wzorze $y=f(x)$ w punkcie $A=(x_0,f(x_0))$ ma równanie postaci $y=ax+b$, gdzie współczynnik kierunkowy a jest równy $a=f'(x_0)$. W naszym przypadku $f(x)=x^3-3x+1$ oraz $x_0=2$.

Mamy zatem $f'(x)=3x^2-3$, skąd dostajemy $a=9$. Punkt A ma współrzędne $(2,f(2))$, czyli $A=(2,3)$. Prosta o równaniu $y=9x+b$ ma przechodzić przez punkt A. Zatem $b=-15$ i ostatecznie równanie stycznej ma postać $y=9x-15$.

Zadanie 11. Monotoniczność

Funkcja f dana jest wzorem $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+1$.

Wykaż, że dla $m\in\langle 1,3\rangle$ funkcja f jest rosnąca w całej dziedzinie.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 12.

Dany jest wykres funkcji kwadratowej $f(x)=x^2$ oraz punkt $A=(3,0)$. Znajdź punkt na wykresie funkcji f leżący najbliżej punktu A.

Zadanie 12.a

Dany jest wykres funkcji kwadratowej $f(x)=x^2$ oraz punkt $A=(3,0)$. Uzasadnij, że punktem na wykresie funkcji f leżącym najbliżej punktu A jest punkt o współrzędnych $(1,1)$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Rozwiązanie

Dowolny punkt leżący na wykresie funkcji f ma współrzędne: $\left(x,x^2\right)$. Obliczamy odległość takiego punktu od punktu A: $d=\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(x^2-0\right)^2}$.

Weźmy funkcję $g\left(x\right)=\left(x-3\right)^2+\left(x^2-0\right)^2=x^4+x^2-6x+9$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą.

Obliczamy pochodną tej funkcji i rozkładamy na czynniki:

$$g'\left(x\right)=4x^3+2x-6=2\left(2x^3+x-3\right)=2\left(x-1\right)\left(2x^2+2x+3\right).$$

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $2x^2+2x+3$:

$\Delta=4-4\cdot 2\cdot 3<0$, zatem $2x^2+2x+3>0$, więc jedynym miejscem zerowym funkcji $g'\left(x\right)$ jest $x=1$.

Zauważamy również, że:

$g'\left(x\right)<0$ dla $x<1$,

$g'\left(x\right)>0$ dla $x>1$,

A więc funkcja g ma minimum w punkcie $x=1$.

Zatem punktem na wykresie funkcji f leżącym najbliżej punktu A jest punkt $\left(1,1\right)$.

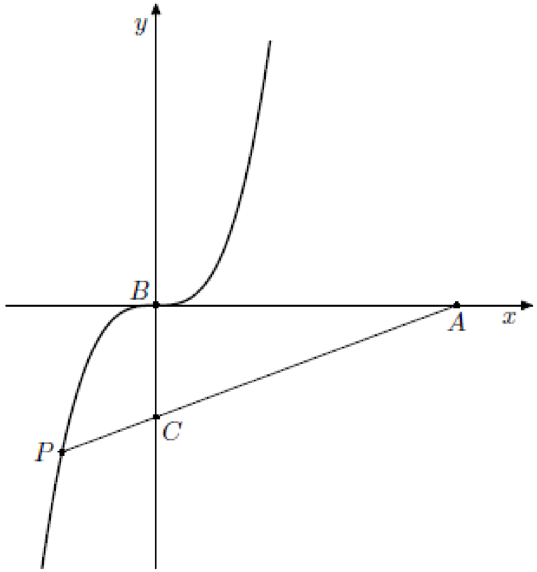
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 13.

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x)=x^3$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x. Wyznacz punkt $P=(p,p^3)$ leżący na wykresie funkcji f najbliżej punktu $A=(4,0)$.

Rozwiązanie

Wystarczy rozpatrywać punkty $P=\left(p,p^3\right)$ dla $p\geq 0$, gdyż dla $p<0$ punkt o współrzędnych $(0,0)$ leży bliżej punktu A niż punkt P: $|AP|>|AC|>|AB|$.



Odległość $|AP|$ dla $p\geq 0$ jest równa $|AP|=\sqrt{(p-4)^2+\left(p^3\right)^2}$.

Mamy zatem znaleźć $p \geq 0$, dla którego wielomian $W(p) = p^6 + (p-4)^2 = p^6 + p^2 - 8p + 16$ przyjmuje najmniejszą wartość. Rozważamy zatem pochodną wielomianu W:

$$W'(x) = 6x^5 + 2x - 8 = 2(x-1)(3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4).$$

$$W'(x) < 0 \text{ dla } x \in (0,1),\ W'(x) > 0 \text{ dla } x \in (1,+\infty).$$

Zatem szukaną wartością p, dla której wartość wielomianu $W(p)$ jest najmniejsza, jest $p = 1$. Szukanym punktem P jest zatem $P = (1,1)$.

Własność Darboux

1) Jeśli funkcja ciągła przyjmuje w pewnym przedziale dwie różne wartości, to przyjmuje w tym przedziale również wszystkie wartości pośrednie.

2) Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest ciągła oraz* $f(a) < f(b)$, *to dla dowolnej liczby* $y \in (f(a), f(b))$ *istnieje takie* $x \in (a,b)$, *że* $f(x) = y$.

Zadanie 14. Liczba rozwiązań równania

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=(x-2)(x+6)^2$.

Wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x)=12$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 14. Liczba rozwiązań równania (rozwiązanie)

Obliczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x)=1\cdot(x+6)^2+(x-2)(2x+12)=(x+6)(x+6+2x-4)=(x+6)(3x+2)=$$
$$=3(x+6)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Wyznaczamy ekstrema lokalne funkcji f. Miejscami zerowymi pochodnej są liczby -6 i $-\frac{2}{3}$. Rozwiązujemy nierówności $f'(x)>0$ oraz $f'(x)<0$ i otrzymujemy:

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-6)\cup\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$ oraz $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-6,-\frac{2}{3}\right)$. Dla $x=-6$ spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum i jest to maksimum lokalne, które jest równe $f(-6)=0$. Dla $x=-\frac{2}{3}$ również spełniony jest warunek wystarczający istnienia ekstremum i jest to minimum lokalne, które jest równe

$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{16}{3}\right)^2=-\frac{248}{27}$. Funkcja f przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x>2$ i jest w tym przedziale rosnąca. Wynika stąd, że równanie $f(x)=12$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 1.

Wykaż, że równanie $x^9 - 9x + 15 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste.

Rozwiązanie

Rozważmy wielomian $W(x)=x^9-9x+15$. Wyznaczamy pochodną tego wielomianu: $W'(x)=9x^8-9$. Miejscami zerowymi pochodnej są liczby $x_1=-1$, $x_2=1$.

Teraz zauważamy, że:

1. jeśli $x<-1$, to $W'(x)>0$,
2. jeśli $-1<x<1$, to $W'(x)<0$,
3. jeśli $x>1$, to $W'(x)>0$.

Zatem funkcja W jest rosnąca w przedziale $(-\infty,-1\rangle$, malejąca w przedziale $\langle -1,1\rangle$ i rosnąca w przedziale $\langle 1,+\infty)$. Ponadto $W(-1)=23$, $W(1)=7$.

Stąd wynika, że:

1. jeśli $x\geq 1$, to $W(x)\geq 7$,
2. jeśli $-1\leq x\leq 1$, to $7\leq W(x)\leq 23$,
3. jeśli $x\leq -1$, to $W(x)\leq 23$.

Zatem dla $x\geq -1$ wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków, więc równanie nie ma rozwiązania w przedziale $\langle -1,+\infty)$.

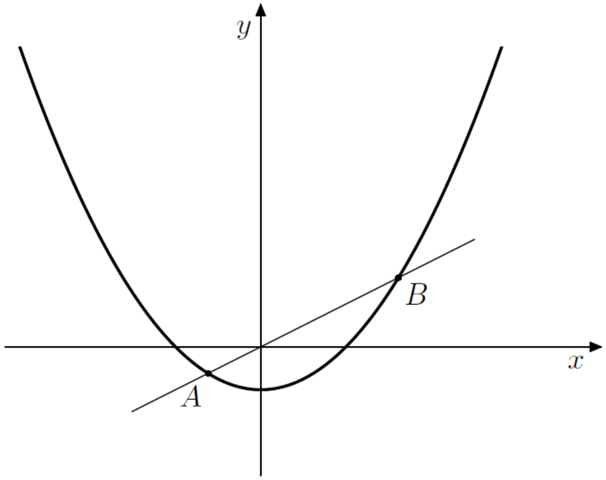
W przedziale $(-\infty,-1\rangle$ wskazujemy takie dwa argumenty, dla których wielomian przyjmuje wartości różnych znaków np. $W(-2)=-512+18+15<0$, $W(-1)=23>0$. Ponieważ wielomian jest funkcją ciągłą, więc ma miejsce zerowe w przedziale $(-2,-1)$. Ponadto wielomian W jest funkcją rosnącą w przedziale $(-\infty,-1\rangle$, zatem przyjmuje wartość zero dokładnie raz. Wobec tego równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste i należy ono do przedziału $(-2,-1)$.

Zadanie 16.

Prosta o równaniu $y = kx$ przecina parabolę o równaniu $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ w dwóch punktach A i B. Udowodnij, że styczne do tej paraboli w punktach A i B są prostopadłe.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Rozwiązanie



Najpierw wyznaczamy współrzędne punktów A i B. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} y = kx \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Stąd $A = \left(k - \sqrt{k^2+1}, k^2 - k\sqrt{k^2+1}\right)$, $B = \left(k + \sqrt{k^2+1}, k^2 + k\sqrt{k^2+1}\right)$.

Wyznaczamy teraz współczynniki kierunkowe stycznych. Niech $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

Wówczas mamy równania stycznych $y=a_Ax+b_A$ oraz $y=a_Bx+b_B$. Ponieważ $f'(x)=x$, więc $a_A=f'\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)$ oraz $a_B=f'\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)$.

$$a_A\cdot a_B=\left(k-\sqrt{k^2+1}\right)\cdot\left(k+\sqrt{k^2+1}\right)=k^2-\left(k^2+1\right)=-1.$$

Zatem obie styczne są prostopadłe.

Zadanie 17.

Oblicz, ile jest nieparzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występuje co najmniej jedna siódemka?

Zadanie 17.a

Uzasadnij, że istnieje dokładnie 1908 nieparzystych liczb czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występuje co najmniej jedna siódemka.

I sposób rozwiązania (dopełnienie)

Obliczamy, ile jest nieparzystych liczb naturalnych czterocyfrowych. Pierwszą cyfrę (tysięcy) możemy wybrać na 9 sposobów, następne dwie cyfry na 10 sposobów i ostatnią (jedności) na 5 sposobów. Mamy zatem $9\cdot 10^2\cdot 5=4500$ liczb czterocyfrowych nieparzystych.

Obliczamy, ile jest nieparzystych liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których nie występuje cyfra 7. Pierwszą cyfrę możemy wówczas wybrać na 8 sposobów, każdą z następnych dwóch na 9 sposobów i cyfrę jedności na 4 sposoby. Mamy zatem $8\cdot 9^2\cdot 4=2592$ takich liczb czterocyfrowych nieparzystych.

Stąd wnioskujemy, że liczb nieparzystych czterocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym co najmniej jedna cyfra jest siódemką, jest $4500-2592=1908$

Uwaga

Możemy także zauważyć, że jest 9000 liczb czterocyfrowych, a ponieważ co druga jest nieparzysta, to istnieje 4500 liczb czterocyfrowych nieparzystych.

Zadanie 18.

Wykaż, że jeżeli zdarzenia losowe $A, B \subset \Omega$ są takie, że $P(A) = 0,6$ oraz $P(B) = 0,8$ to $P(A|B) \geq 0,5$. ($P(A|B)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B).

Rozwiązanie

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. **Nierówność** $P(A|B)\geq 0,5$ **jest równoważna nierówności** $\frac{P(A\cap B)}{0,6}\geq 5$, **więc wystarczy wykazać, że** $P(A\cap B)\geq 0,4$.

Ponieważ $P(A\cup B)\leq 1$ **oraz** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, **więc** $P(A\cap B)\geq 0,6+0,8-1=0,4$.

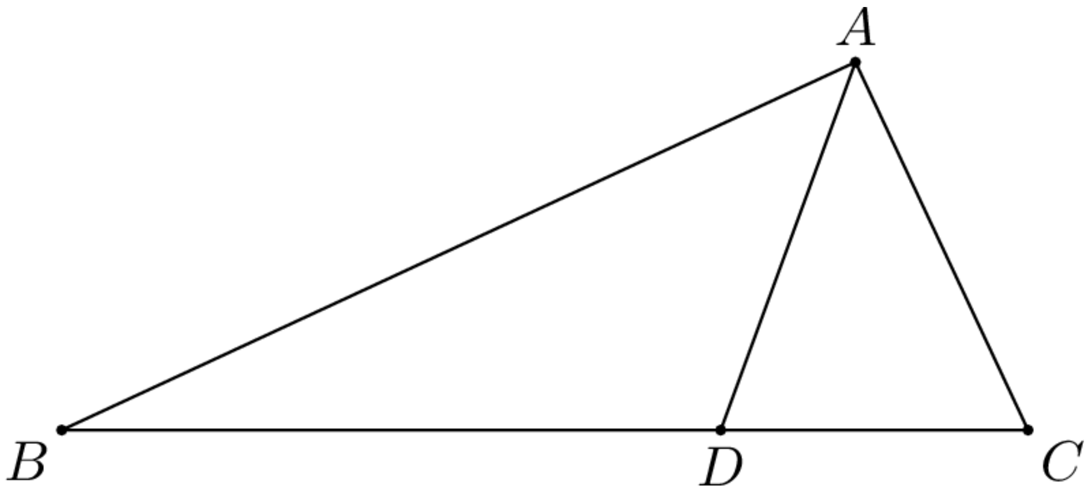
Co należało udowodnić.

Zadanie 19.

Dany jest trójkąt prostokątny *ABC*, w którym |□ .

Przeciwprostokątna *BC* ma długość *a*, dwusieczna *AD* kąta prostego ma długość *d*. Udowodnij, że pole trójkąta *ABC* jest równe

$$P=\frac{1}{4}\left(d^2+d\sqrt{d^2+2a^2}\right).$$



Rozwiązanie

Oznaczmy, tak jak na rysunku: $|AB| = c$, $|AC| = b$.

Pole trójkąta ABC **jest równe:** $P = \frac{bc}{2}$, **skąd** $bc = 2P$.

Obliczamy inaczej pole trójkąta ABC**:** $P = \frac{cd\sqrt{2}}{4} + \frac{bd\sqrt{2}}{4} = (b+c) \cdot \frac{d\sqrt{2}}{4}$.

Chcemy obliczyć $b+c$. **Zauważamy, że** $(b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2$.

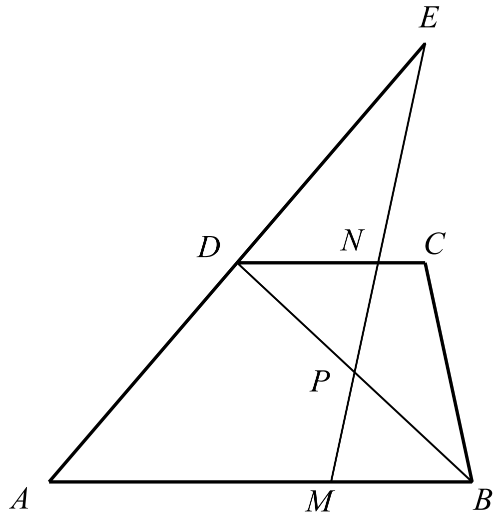
Z twierdzenia Pitagorasa: $b^2 + c^2 = a^2$, **więc** $(b+c)^2 = a^2 + 2bc$. **Zatem** $(b+c)^2 = a^2 + 4P$, **czyli** $b+c = \sqrt{a^2+4P}$. **Wobec tego** $P = (b+c) \cdot \frac{d\sqrt{2}}{4} = \sqrt{a^2+4P} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{4}$, **czyli** $P = \sqrt{a^2+4P} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{4}$. **Chcemy z tego równania wyznaczyć** P.

Otrzymujemy kolejno: $P^2 = (a^2+4P) \cdot \frac{d^2}{8}$, $8P^2 - 4d^2P - a^2d^2 = 0$.

Rozwiązujemy to równanie kwadratowe: $P = \frac{d^2 + d\sqrt{d^2+2a^2}}{4}$ **(drugie rozwiązanie odrzucamy, gdyż jest ujemne). To kończy dowód.**

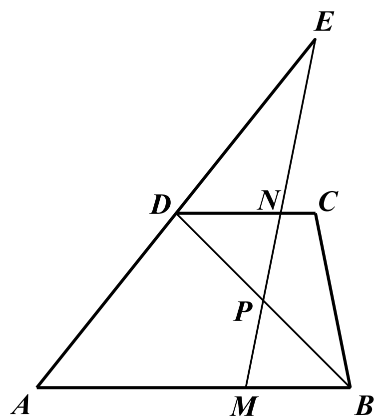
Zadanie 21.

Ramię AD trapezu $ABCD$ (w którym $AB \parallel CD$) przedłużono do punktu E takiego, że $|AE| = 2 \cdot |AD|$. Punkt M leży na podstawie AB oraz $|AM| = 2 \cdot |MB|$. Odcinek ME przecina przekątną BD w punkcie P. Udowodnij, że $|BP| = |PD|$.



<u>I sposób rozwiązania</u>

Niech N będzie punktem przecięcia odcinka EM z prostą DC.



Ponieważ $AB \parallel CD$, więc odcinek DN jest równoległy do AM, a ponieważ D jest środkiem odcinka AE, więc N jest środkiem odcinka ME . Oznacza to, że odcinek DN łączy środki boków AE i ME trójkąta AME. Stąd wnioskujemy, że $|DN| = \frac{1}{2}|AM|$.

Stąd i z założenia $|AM| = 2 \cdot |MB|$ wynika, że $|DN| = |MB|$.

Równoległość odcinków DN i MB oznacza, że □ □ i □ □ ,
a więc trójkąty PDN i PBM są przystające. Stąd wynika, że $|BP| = |PD|$.

To właśnie należało udowodnić.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 22.

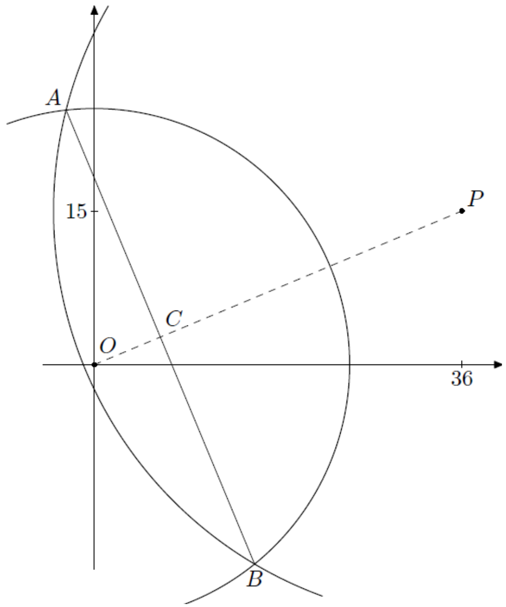
Okręgi o równaniach $x^2+y^2=625$ i $(x-36)^2+(y-15)^2=1600$ mają dwa punkty przecięcia: A i B. Oblicz długość odcinka AB.

Zadanie 22.a

Okręgi o równaniach $x^2+y^2=625$ i $(x-36)^2+(y-15)^2=1600$ mają dwa punkty przecięcia: A i B. Uzasadnij, że $|AB|=48$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

I sposób rozwiązania



Oznaczmy:
środek pierwszego okręgu – O,
środek drugiego okregu – P,
punkty przecięcia okręgów – A i B.
Niech C będzie punktem przecięcia odcinków AB i OP,
$|AC| = h$, $|OC| = x$.

Zauważmy, że $|AB| = 2h$ oraz $|OP| = 39$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $h^2 = 25^2 - x^2$ oraz $h^2 = 40^2 - (39-x)^2$. Rozwiązujemy równanie $25^2 - x^2 = 40^2 - (39-x)^2$, otrzymując $x = 7$. Zatem $h^2 = 25^2 - 7^2 = 576$, stąd $h = 24$, czyli $|AB| = 2h = 48$.

<u>II sposób rozwiązania</u> ze wzoru Herona

Oznaczamy wszystko tak jak w sposobie I. Boki trójkąta oznaczamy tak jak na rysunku. Obliczamy pole trójkąta *OPA* z wzoru Herona.

Niech *p* oznacza połowę obwodu trójkąta *OPA*. Wtedy $p=52$, $p-a=13$, $p-b=27$, $p-c=12$ **i** $h_1^2+\frac{1}{4}a^2=b^2$.

Z drugiej strony $P_{OPA}=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot h$. **Zatem** $h=24$, **czyli** $|AB|=2h=48$.

Uwaga. Pole trójkąta *OPA* można obliczyć również z twierdzenia cosinusów:

$25^2+40^2-2\cdot 25\cdot 40\cos\alpha=39^2$, **stąd** $\cos\alpha=\frac{625+1600-1521}{2000}=\frac{704}{2000}=\frac{44}{125}$.

Zatem $\sin\alpha=\frac{117}{125}$. **Obliczamy pole trójkąta *OPA*:** $P_{OPA}=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 40\cdot\frac{117}{125}=468$.

<u>III sposób rozwiązania</u> punkty przecięcia okręgu

Rozwiązujemy układ równań, aby znaleźć punkty przecięcia dwóch okręgów:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 625 \\ (x-36)^2 + (y-15)^2 = 1600 \end{cases}$$

Odejmując stronami drugie równanie od pierwszego otrzymujemy równanie:

$12x + 5y = 91$. **Stąd** $y = \dfrac{91-12x}{5}$ **wstawiamy do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie kwadratowe:** $x^2 + \left(\dfrac{91-12x}{5} - 3\right)^2 = 625$.

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe: $169x^2 - 2184x - 7344 = 0$, **którego pierwiastki to** $x_1 = -\dfrac{36}{13}$, $x_2 = \dfrac{204}{13}$.

Mamy zatem 2 punkty przecięcia: $A = \left(-\dfrac{36}{13}, \dfrac{323}{13}\right)$ **oraz** $B = \left(\dfrac{204}{13}, -\dfrac{253}{13}\right)$.

Obliczamy odległość między nimi: $|AB|^2 = 48^2$. **Zatem** $|AB| = 48$.

Zadanie 23.

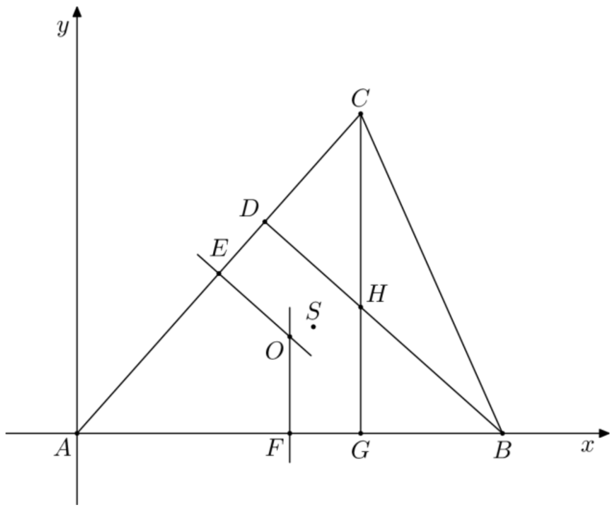
Dany jest trójkąt ABC, w którym $A=(0,0)$, $B=(6,0)$, $C=(6p,6q)$, gdzie $p,q>0$ oraz $p\neq\frac{1}{2}$.

Punkt H jest punktem przecięcia wysokości (ortocentrum) tego trójkąta.

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Punkt S jest środkiem ciężkości tego trójkąta.

Wyznacz równanie prostej OH i wykaż, że punkt S leży na tej prostej.



Rozwiązanie

Oznaczmy, tak jak na rysunku:

E – środek odcinka AC

F – środek odcinka AB

BD i CG – wysokości trójkąta ABC.

Zauważmy, że: $E=(3p,3q)$, $F=(3,0)$, $G=(6p,0)$.

Równanie prostej AC ma postać $y=ax$. Punkt C leży na tej prostej, więc $6q=a\cdot 6p$, zatem $a=\dfrac{q}{p}$. Stąd wynika, że prosta AC ma równanie: $y=\dfrac{q}{p}\cdot x$.

Równanie prostej *EO* ma postać: $y=-\frac{p}{q}\cdot x+c$ **dla pewnego *c*. Punkt *E* leży na tej prostej, więc** $3q=-\frac{p}{q}\cdot 3p+c$**. Stąd** $c=3q+\frac{3p^2}{q}=\frac{3\left(p^2+q^2\right)}{q}$.

Prosta *EO* ma zatem równanie: $y=-\frac{p}{q}\cdot x+\frac{3\left(p^2+q^2\right)}{q}$.

Prosta *FO* ma równanie: $x=3$**. Stąd punkt *O* ma współrzędne:**

$$O=\left(3,-\frac{3p}{q}+\frac{3\left(p^2+q^2\right)}{q}\right),\ \text{czyli}\ O=\left(3,\frac{3\left(p^2+q^2-p\right)}{q}\right).$$

Równanie prostej *BD* ma postać $y=-\frac{p}{q}\cdot x+d$ **dla pewnego *d*. Punkt *B* leży na prostej *BD*, więc** $0=-\frac{p}{q}\cdot 6+d$**, stąd** $d=\frac{6p}{q}$**. Prosta *BD* ma zatem równanie:** $y=-\frac{p}{q}\cdot x+\frac{6p}{q}$.

Prosta *CG* ma równanie $x=6p$**. Zatem punkt *H* ma współrzędne:**

$$H=\left(6p,\frac{6\left(p-p^2\right)}{q}\right).$$

Wreszcie $S=\left(\frac{0+6+6p}{3},\frac{0+0+6q}{3}\right)$, czyli $S=(2p+2,2q)$.

Wyznaczamy równanie prostej *OH*. Równanie to jest postaci: $y=ax+b$.

$O=\left(3,\frac{3(p^2+q^2-p)}{q}\right)$ oraz $H=\left(6p,\frac{6(p-p^2)}{q}\right)$ spełniają to równanie, zatem:

$$\frac{3(p^2+q^2-p)}{q}=a\cdot 3+b \text{ oraz } \frac{6(p-p^2)}{q}=a\cdot 6p+b.$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest: $a=\frac{3p-3p^2-q^2}{q(2p-1)}$ $b=\frac{6p(p^2+q^2-1)}{q(2p-1)}$.

Zatem prosta *OH* ma równanie: $y=\frac{3p-3p^2-q^2}{q(2p-1)}\cdot x+\frac{6p(p^2+q^2-1)}{q(2p-1)}$.

Sprawdzamy, że współrzędne punktu *S* spełniają to równanie, tzn. że zachodzi równość: $2q=\frac{3p-3p^2-q^2}{q(2p-1)}\cdot(2p+2)+\frac{6p(p^2+q^2-1)}{q(2p-1)}$.

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu wyrażeń otrzymujemy równość prawdziwą, co kończy dowód, że współrzędne punktu *S* spełniają równanie prostej *OH*.

Zadanie 24.

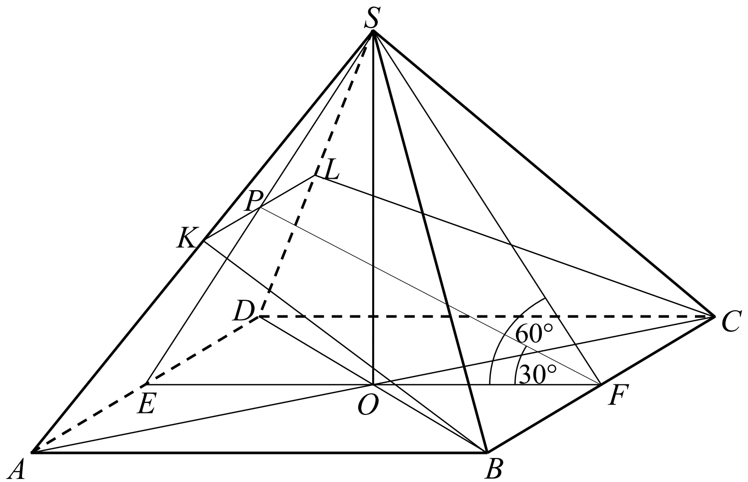
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest równa 10cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 60 stopni. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 30 stopni. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 24.a

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy jest równa 10 cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 60 stopni. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem 30 stopni. Uzasadnij, że pole otrzymanego przekroju jest równe $P=\frac{75}{2}\sqrt{3}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

<u>Rozwiązanie</u>



Przekrojem, którego pole należy obliczyć, jest trapez równoramienny *BCLK*. Rozważmy przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek *S* i środki *E, F* krawędzi *AD* i *BC*. Ponieważ |□ 60°, więc trójkąt równoramienny *FES* jest trójkątem równobocznym o boku 10, stąd wysokość *PF* przekroju *BCLK* (jako wysokość trójkąta *FES*) jest równa $5\sqrt{3}$. Punkt *P* jest spodkiem wysokości trójkąta równobocznego *FES*, czyli jest środkiem odcinka *ES*. Odcinek *KL* jest równoległy do *AD*, stąd *K* jest środkiem odcinka *AS*.
Z twierdzenia o odcinku łączącym środki boków trójkąta otrzymujemy: $KL = 5$. Pole przekroju jest zatem równe $P = \frac{1}{2}(10+5)\cdot 5\sqrt{3} = \frac{75}{2}\sqrt{3}$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 25.

Rozwiąż równanie $\sin 4x - \cos 5x = 0$ w przedziale $\langle 0, 90^\circ \rangle$.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

I sposób rozwiązania

Równanie możemy zapisać w postaci równoważnej $\sin 4x = \cos 5x$.
Ponieważ $\cos 5x = \sin(90° - 5x)$, więc równanie możemy zapisać w postaci $\sin 4x = \sin(90° - 5x)$.
Zatem $x = 10° + k \cdot 40°$ lub $x = -90° - k \cdot 360°$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Wybierając te rozwiązania, które należą do przedziału $\langle 0, 90° \rangle$, dostajemy: $x = 10°$, $x = 50°$, $x = 90°$.

II sposób rozwiązania

Ponieważ $\cos 5x = \sin(90° - 5x)$, więc równanie możemy zapisać w postaci $\sin 4x - \sin(90° - 5x) = 0$. Ze wzoru na różnicę sinusów otrzymujemy $2\cos\frac{4x + 90° - 5x}{2}\sin\frac{4x - (90° - 5x)}{2} = 0$.

Stąd $\cos\left(45° - \frac{x}{2}\right) = 0$ lub $\sin\left(\frac{9}{2}x - 45°\right) = 0$.

Zatem $x = -90° - k \cdot 360°$ lub $x = 10° + k \cdot 40°$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wybierając te rozwiązania, które należą do przedziału $\langle 0, 90°\rangle$, dostajemy: $x = 10°$, $x = 50°$, $x = 90°$.

Zadanie 26.

Udowodnij, że jeśli $a > 0$, to dokładnie jedna liczba rzeczywista x spełnia równanie

$$x^3 + ax^2 + a(a+1)x - (a+1)^2 = 0.$$

Rozwiązanie.

I sposób. Zauważamy, że 1 jest pierwiastkiem tego równania, więc równanie możemy zapisać w postaci: $(x-1)\left(x^2+(a+1)x+(a+1)^2\right)=0$.

Stąd $x=1$ **lub** $x^2+(a+1)x+(a+1)^2=0$.

Równanie $x^2+(a+1)x+(a+1)^2=0$ **nie ma rozwiązania, gdyż** $\Delta=-3(a+1)^2<0$.

Zatem jedyną liczbą x**, która spełnia równanie** $x^3+ax^2+a(a+1)x-(a+1)^2=0$**, jest** $x=1$.

II sposób. Niech $f(x)=x^3+ax^2+a(a+1)x-(a+1)^2$.

Obliczamy pochodną funkcji f**:** $f'(x)=3x^2+2ax+a(a+1)$.

Obliczamy wyróżnik tej funkcji kwadratowej: $\Delta=-4a(2a+3)$.

Ponieważ z założenia $a>0$**, więc** $\Delta<0$**. Zatem dla każdego** $a>0$ **pochodna** $f'(x)>0$**, czyli funkcja** f **jest rosnąca, a więc ma co najwyżej jedno miejsce zerowe. Ponieważ** $f(1)=0$**, więc** f **ma dokładnie jedno miejsce zerowe. To kończy dowód.**

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 27.

Wyznacz zbiór wartości funkcji *f* określonej wzorem $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+7}$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*.

Zadanie27.a

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+7}$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*. Uzasadnij, że zbiór wartości funkcji *f* jest przedziałem domkniętym $\left\langle -\dfrac{1}{14},\dfrac{1}{2}\right\rangle$.

I sposób rozwiązania

Zauważamy, że aby wyznaczyć zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{x+3}{x^2+7}$ wystarczy sprawdzić, dla jakich wartości parametru m równanie $\frac{x+3}{x^2+7}=m$ ma rozwiązanie.

Przekształcamy to równanie i zapisujemy w postaci równoważnej $mx^2-x+7m-3=0$.

Dla $m=0$ równanie $mx^2-x+7m-3=0$ ma rozwiązanie $x=-3$.

Dla $m\neq 0$ jest to równanie kwadratowe, wystarczy zatem sprawdzić, dla jakich $m\neq 0$ wyróżnik jest nieujemny. Zbiorem rozwiązań jest przedział $\left\langle -\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right\rangle$ z wyłączeniem liczby 0.

Ostatecznie stwierdzamy, że zbiorem wartości funkcji $f(x)=\frac{x+3}{x^2+7}$ jest przedział $\left\langle -\frac{1}{14},\frac{1}{2}\right\rangle$.

II sposób rozwiązania

Znajdujemy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+7}$ w zbiorze liczb rzeczywistych. Wyznaczamy pochodną tej funkcji $f'(x)=\dfrac{-x^2-6x+7}{\left(x^2+7\right)^2}$.

Następnie znajdujemy miejsca zerowe tej pochodnej: $x_1=-7$, $x_2=1$.

Teraz zauważamy, że jeśli $x<-7$ i $x>1$, to $f'(x)<0$, jeśli $-7<x<1$, to $f'(x)>0$,

Zatem funkcja f jest malejąca w przedziale $(-\infty,-7\rangle$, rosnąca w przedziale $\langle -7,1\rangle$ i malejąca w przedziale $\langle 1,+\infty)$. Następnie obliczamy $f(-7)=-\dfrac{1}{14}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

Ponadto jeśli $x\le -7$, to $f(x)<0$, jeśli $x\ge 1$, to $f(x)>0$.

Stąd wynika, że jeśli $x\le -7$, to $-\dfrac{1}{14}\le f(x)<0$, jeśli $x\ge 1$, to $0<f(x)\le\dfrac{1}{2}$.

Z ciągłości funkcji f wynika, że zbiorem jej wartości jest przedział $\left\langle -\dfrac{1}{14},\dfrac{1}{2}\right\rangle$.

Dziękuję za uwagę

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie