KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

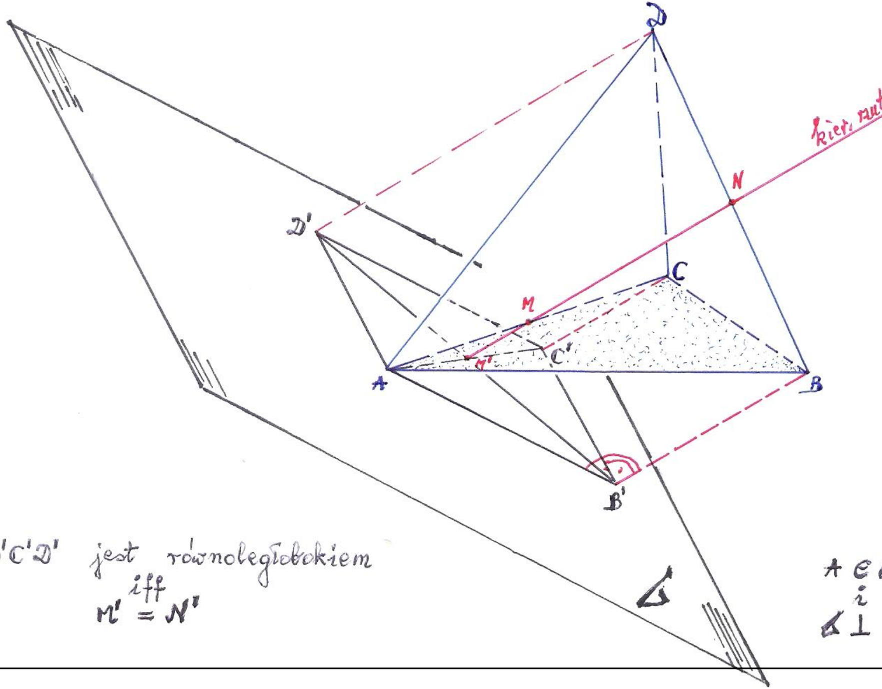
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

dr Andrzej Gębarowski

Kształcenie wyobraźni przestrzennejna przykładach odpowiednio dobranych zadań

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 1. *Dany jest czworościan* $ABCD$*. Poprowadzić przez punkt* A *taką płaszczyznę, aby rzut prosrokątny czworościanu* $ABCD$ *na tę płaszczyznę był równoległobokiem.*



$AB'C'D'$ jest równoległobokiem

iff

$M' = N'$

$A \in \sigma$

i

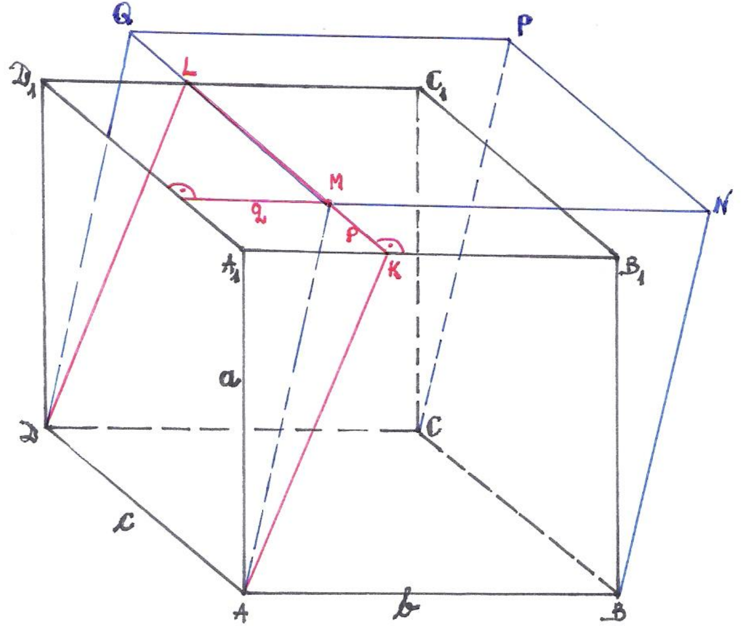
$\sigma \perp$ pr. MN

Niech B', C', D' będą odpowiednio rzutami wierzchołków B, C i D czworościanu na płaszczyznę σ przechodzącą przez wierzchołek A czworościanu. Zauważmy, że rzutem środka M krawędzi AC jest środek M' odcinka AC', a rzutem środka N krawędzi BD jest środek N' odcinka $B'D'$ (rysunek 1).

Czworokąt $AB'C'D'$ będący rzutem czworościanu $ABCD$ na płaszczyznę σ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy punkty M' i N' pokrywają się. Wówczas pokrywają się również proste rzutujące MM' i NN', kierunkiem rzutowania jest zatem kierunek prostej MN (punkty M i N są zawsze różne, gdyż A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie).

Szukaną płaszczyzną jest zatem płaszczyzna poprowadzona przez punkt A prostopadle do prostej MN. Zadanie ma zawsze rozwiązanie.

Zadanie 2. *W prostopadłościanie* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *dane są długości krawędzi* $AA_1 = a$, $AB = b$, $AD = c$. *Na ścianie* $A_1B_1C_1D_1$ *obrano punkt* M *w odległości* p *od boku* A_1B_1, *a w odległości* q *od boku* A_1D_1 *i zbudowano równoległościan o podstawie* $ABCD$ *i krawędzi bocznej* AM. *Oblicz pole ścian bocznych tego równoległościanu.*



Q
P
L
D_1
C_1
M
N
q
p
A_1
K
B_1
a
D
C
c
A
b
B

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku obliczmy pole równoległoboku $AMQD$ będącego ścianą rónoległółścianu $ABCDMNPQ$. Równoległobok $AMQD$ i prostokąt $AKLD$ mają wspólną podstawę AD i wysokość AK, zatem

$$\text{pole} AMQD \;=\; \text{pole} AKLD \;=\; AK \cdot KL\;.$$

Lecz $AK = \sqrt{(AA_1)^2 + (A_1K)^2} = \sqrt{a^2 + q^2}$ oraz $KL = AD = c$; stąd

$$\text{pole} AMQD \ = \ c\sqrt{a^2 + q^2}\ .$$

Analogicznie obliczamy, że

$$\text{pole} AMNB \ = \ b\sqrt{a^2 + p^2}\ .$$

A oto wykorzystanie rozwiązanego zadania 2, do policzenia odległości prostych skośnych np. pr.AM i pr.BC, który to problem bez znajomości rozwiązania poprzedniego zadania, młodzieży średnio zaawansowanej matematycznie mógłby wydawać się bardzo trudnym.

Zadanie 3. *Przy założeniach zadania 2 oblicz odległość prostych skośnych AM i BC.*

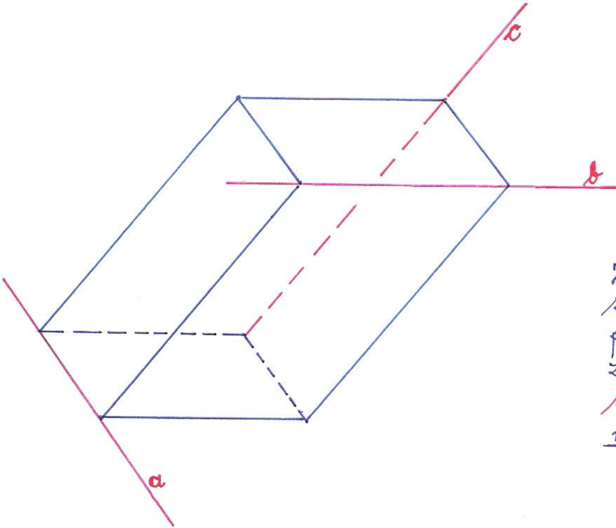
Prosta BC jest równoległa do płaszczyzny ADM, gdyż jest równoległa do prostej AD w niej zawartej. Niech x będzie odległością prostej BC od płaszczyzny ADM (jest to zarazem szukana odległość prostych skośnych AM i BC). Objętość równoległościanu $ABCDMNPQ$ równa jest objętości prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ i wynosi abc. Biorąc jednak za podstawę równoległobok $AMQD$, wobec wyniku poprzedniego zadania, mamy równanie

$$c\sqrt{a^2+q^2}\cdot x = abc\ ,$$

stąd

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2+q^2}}\ .$$

Zadanie 4. *Dane są trzy proste a, b, c parami skośne. Czy można zbudować taki równoległościan, którego krawędzie leżą na prostych a, b, c?*



Zauważmy, że przez każdą z dwóch skośnych krawędzi równoległościanu przechodzą dwie jego ściany i, że z tych czterech ścian, które są wszystkie różne, dwie są równoległe.

Rozwiązanie zadania opiera się na spostrzeżeniu;
Jeżeli a i b są prostymi skośnymi, to:

i) istnieje para płaszczyzn równoległych, z których jedna zawiera prostą a, a druga prostą b,

ii) taka para płaszczyzn jest tylko jedna.

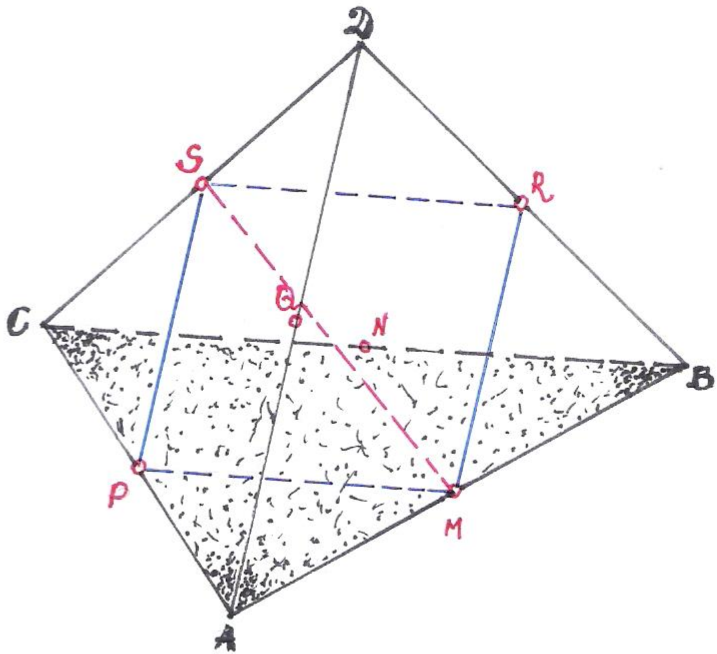
Rozwiązanie. Trzy proste a, b, c parami skośne wyznaczają jednocześnie trzy pary płaszczyzn (w parach) wzajemnie równoległych. Możliwe są przypadki:

1) płaszczyzny jednej z par płaszczyzn równoległych są równoległe do płaszczyzn innej pary (jest tak gdy proste a, b, c leżą w trzech płaszczyznach wzajemnie równoległych),

2) płaszczyzny każdej z par płaszczyzn równoległych przecinają płaszczyzny obu innych par. Każda płaszczyzna przecina 4 z pozostałych , wobec tego mamy 12 prostych przecięcia (patrz $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$), wśród których znajdują się proste a, b, c.

Odpowiedź. Jeżeli dane są trzy proste a, b, c parami skośne, to równoległościan, którego 3 krawędzie leżą na prostych a, b, c można zbudować wtedy i tylko wtedy, gdy proste a, b, c nie leżą na trzech płaszczyznach wzajemnie równoległych. Równoległościan taki jest tylko jeden.

Zadanie 5. *Dane są długości krawędzi czworościanu* $ABCD$*. Znajdź dlugość odcinka łączącego środek krawędzi* AB *ze środkiem krawędzi* CD*.*


D
S
R
C
Q
N
B
P
M
A

Rozwiązanie. Zauważmy, że środki M, N, P, Q, R, S krawędzi AB, BC, AC, AD, BD i CD czworościanu $ABCD$ są różnymi punktami. Na mocy twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta mamy (patrz rysunek 4)

$$MR \| AD \| PS \quad \text{i} \quad MR = PS = \frac{1}{2} AD \ ;$$

podobnie

$$MP \| BC \| RS \quad \text{i} \quad MP = RS = \frac{1}{2} BC \ .$$

Czworokąt $MPSR$ jest równoległobokiem; wg. twierdzenia o sumie kwadratów przekątnych równoległoboku możemy zapisać

$$MS^2 + PR^2 = MR^2 + PS^2 + MP^2 + RS^2 = \frac{1}{2}AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 \ .$$

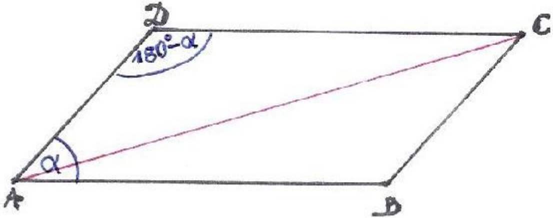
Analogicznie

$$PR^2 + NQ^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}CD^2$$

$$NQ^2 + MS^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2 \ .$$

Zpowyższych trzech równań łatwo obliczyć długości odcinków MS, PR i NQ. Otrzymujemy np.

$$MS^2 = \frac{1}{4}(AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2) \ .$$



$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

i

$AB = DC$

UZUPEŁNIENIE (tw. o sumie kwadratów przekątnych równoległoboku).
Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do równoległoboku $ABCD$ (patrz rysunek 5) mamy

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos\alpha$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$$

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC \cdot \cos\alpha$$

Dodając stronami ostatnie cztery równości wyliczamy, że

$$AC^2+BD^2 = AB^2+DC^2+AD^2+BC^2+2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha-2DC\cdot B$$

co, wobec $AB = DC$ i $DC = AB$, po redukcji daje ostatecznie

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + DC^2 + AD^2 + BC^2\ .$$

Uzyskaliśmy twierdzenie

Twierdzenie 1. *Suma kwadratów przekątnych równoległoboku równa się sumie kwadratów jego czterech boków.*

Uwaga. *W sposób naturalny i prosty uzyskujemy to twierdzenie wykorzystując własności iloczynu skalarnego wektorów. Jeśli bowiem równoległobok jest rozpięty na wektorach* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, to* $\vec{a} + \vec{b}$ *i* $\vec{b} - \vec{a}$ *są przekątnymi tego równoległoboku, a droga dowodu jest naturalna bo fizycznie dodawanie i odejmowanie wektorów odbywa się właśnie na zasadzie równoległoboku.*