



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

dr hab. Ewa Swoboda

O uczeniu pewnej metody rozwiązywania zadań matematycznych



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Budowanie wiedzy matematycznej wg. M. Hejny' ego

IMS jest d
element
relacje, prz
procedury,
To wszystk
sobie jest si
jest równ
wszystkich



z wieloma
cia, fakty,
, algorytmy,
węzły tej sieci.
IMS sama w
lementy. IMS
izacji tych
edzę (Hejny

Jak fragmenty wiedzy rodzą się i rozwijają

Zadanie: Które z liczb 23, 20, 15, 25 nie pasują do pozostałych?
Uzasadnij swoją odpowiedź.

Uczeń 7 letni:

- 15, bo inne nie zaczynają się od jedynki
- 20, bo ma na końcu zero, a inne nie mają
- I już żadna inna

Zadanie: Które z liczb 23, 20, 15, 25 nie pasują do pozostałych?
Uzasadnij swoją odpowiedź

- Klasa V (11 lat)
- - 15, bo jest jedyną liczbą, która gdy się od niej odejmie 5 da 10
- - 20, bo jest jedyną liczbą która dzieli się na dwie 10
- - 23, bo się nie dzieli przez 5
- - powinienem coś znaleźć dla 25, ale nie mogę. Może to, że jest największa, ale to nie jest matematyczny powód

Zadanie: Które z liczb 23, 20, 15, 25 nie pasują do pozostałych?
Uzasadnij swoją odpowiedź

Uczeń gimnazjum (14 lat)

- - 15, bo inne nie zaczynają się od jedynki
- - 20, bo jest jedyną liczbą parzystą
 - - bo jako jedyna dzieli się przez 4
- - 23, bo się nie dzieli przez 5
 - - bo jest jedyną liczbą pierwszą
- - 25, bo jest jedyną liczbą kwadratową
 - - bo to jest jedyna liczba, której suma cyfr jest 7, pozostałe mają mniej niż 7.

W dydaktyce matematyki mówi się o izomorfizmie w specyficznym ujęciu. Jest to metoda rozwiązywania zadań, polegająca na zauważeniu wspólnej ich struktury. Pozwala to na stosowaniu tej samej strategii podczas ich rozwiązywania.

Zadanie maturalne, zakres podstawowy (3 pkt)

Aby wyznaczyć ułamek zwykły, który ma rozwinięcie dziesiętne $0, (172)$ można postąpić następująco:

$$(1) \quad x = 0,172172\dots / \cdot 1000$$

$$(2) \quad 1000x = 172,172 \dots$$

Po odjęciu stronami równania oznaczonego (1) od równania oznaczonego (2) mamy:

$$1000x - x = 172$$

$$999x = 172$$

$$x = 172/999$$

Przeprowadź analogiczne rozumowanie i znajdź ułamek zwykły, który ma rozwinięcie dziesiętne $0,(75)$

Jakich kompetencji wymaga umiejętność rozwiązania tego zadania?

$$\text{Sumę } S = \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{3}{301 \cdot 304} + \frac{3}{304 \cdot 307}$$

można obliczyć w sposób następujący: Sumę S zapisujemy:

$$\begin{aligned} \text{Suma } S &= \frac{4-1}{4 \cdot 1} + \frac{7-4}{7 \cdot 4} + \frac{10-7}{10 \cdot 7} + \dots + \frac{304-301}{304 \cdot 301} + \frac{307-304}{307 \cdot 304} \\ &= \frac{4}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{7}{7 \cdot 4} - \frac{4}{7 \cdot 4} + \frac{10}{10 \cdot 7} - \frac{7}{10 \cdot 7} + \dots + \frac{304}{304 \cdot 301} - \frac{301}{304 \cdot 301} + \frac{307}{307 \cdot 304} - \frac{304}{307 \cdot 304} \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \dots \frac{1}{301} - \frac{1}{304} + \frac{1}{304} - \frac{1}{307}$$

Obliczamy sumę redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim, stąd

$$S = 1 - \frac{1}{307}$$

Postępując w analogiczny sposób oblicz sumę

$$\text{Suma } S = \frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{281 \cdot 285}$$

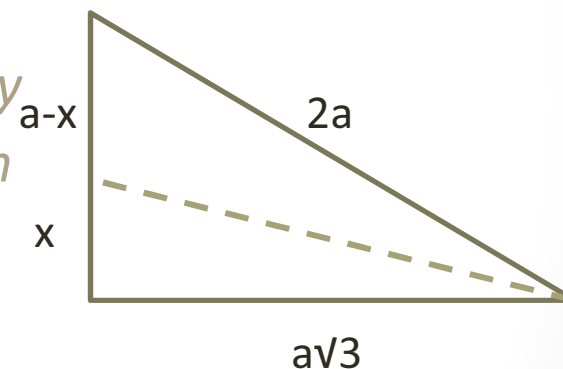
Matura, zakres podstawowy, 2006

Aby wyznaczyć tangens 15 stopni możemy postąpić następująco:

- Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym jeden kąt ostry ma miarę 30 stopni. Boki tego trójkąta możemy oznaczyć przez a , $a\sqrt{3}$, $2a$, gdzie a jest przeciwprostokątną leżącą naprzeciw kąta 30 stopni,
- Kreślimy dwusieczną kąta 30 stopni, która dzieli go na dwa kąty o mierze 15 stopni, a przeciwległą przyprostokątną na odcinki x , $x-a$
- Korzystamy z następującego twierdzenia:

Dwusieczna kąta w trójkącie dzieli przeciwległy bok trójkąta na odcinki proporcjonalne do tych boków trójkąta, do których przylegają.

- Zatem $\frac{x}{a\sqrt{3}} = \frac{a-x}{2a}$
- Obliczamy długość odcinka x :
- Obliczamy tangens 15 stopni:



W analogiczny sposób oblicz tangens 22 stopni 30 minut

Zadanie maturalne, zakres rozszerzony

Wykorzystując tożsamość:

$$\sin 3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

wykazać, że $\sin 10^\circ$ jest rozwiązaniem równania

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Zadanie maturalne, zakres rozszerzony

Rozumowanie poprzez analogię

Uzasadnij słuszność twierdzenia:

Pole koła jest równe polu trójkąta, którego podstawa jest obwodem koła, a wysokość względem tej podstawy jest równa promieniowi tego koła.

Spróbuj sformułować twierdzenie stereometrii drogą analogii do poznanego twierdzenia geometrii płaskiej. Zbadaj, czy to twierdzenie jest słuszne.

Rozważmy kwadrat magiczny.

Postępując się nim,

uzupełnij inny kwadrat

Wystarczy przyjąć zależność:

$n \rightarrow 2^n$, co zachowuje warunek

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m$$

5	0	7
6	4	2
1	8	3

	1	
	16	
2		8

Jaka jest korzyść z rozwiązywania tego typu zadań

- Uczeń może się poczuć pewniej – ma wyraźną wskazówkę co w zadaniu należy zrobić
- Te zadania można rozwiązywać na różnym poziomie matematycznych kompetencji
- Wzmacniana jest sieć powiązań kognitywnych
- Uczeń jest wprowadzany w rudymenty matematycznej metody



DZIĘKUJĘ