KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Dominik Kwietniak

Między kuchnią a matematyką

Wykład

Rzeszów, 1 października 2011 r.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Motto

I nastąpi taki moment, gdy społeczeństwo samo upomni się, by je uczyć matematycznego myślenia, bo to jest opłacalne – tak stało się przecież, gdy ogromne pieniądze zostały przez ludzi włożone w naukę języka angielskiego i windowsów. I to będzie wielki sukces Gardnera, pierwszego, który odkrył tę sprawę. Pewnie to nie będzie zaraz. Ale będzie, czego jestem tak pewien, jak tego, że swego czasu Pitagoras zapoczątkował istnienie dewiantów, zwanych matematykami (choć też przy tym nie byłem).

prof. Marek Kordos, Delta, styczeń 2011.

`http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2011/01/01/Dlaczego_Martin_Gardner/index.html`

Puchary

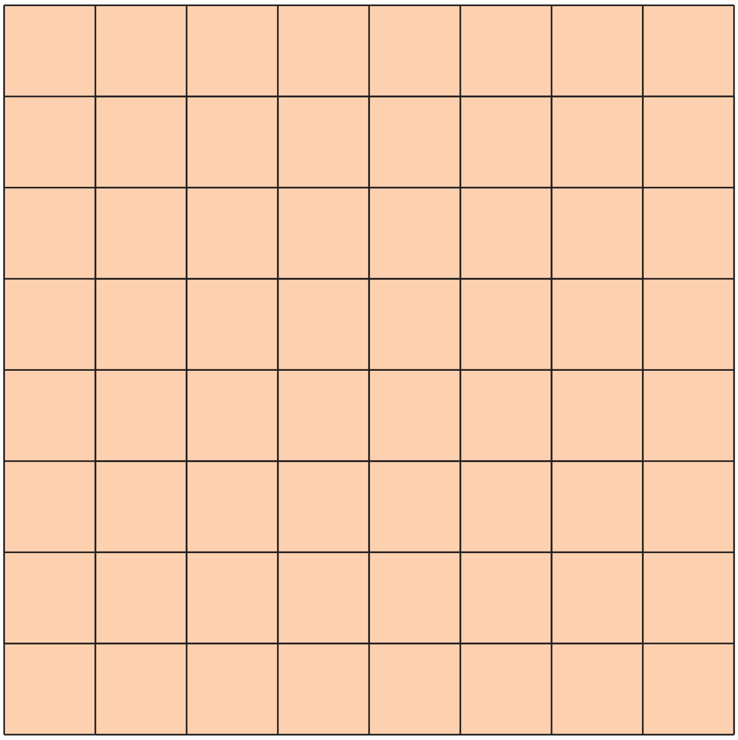
Zadanie

W jednym pucharze jest woda, w drugim wino. Zaczerpnięto z drugiego pucharu kieliszek wina i wlano do pierwszego. Potem zaczerpnięto ten sam kieliszek z pierwszego pucharu i wlano do drugiego. Czy na końcu więcej było wody w winie, czy wina w wodzie?

Zadanie nieco trudniejsze

Zadanie

Czy można pokryć kostkami domina 2×1 szachownicę 8×8, z której usunięto dwa narożne pola leżące na jednej przekątnej?

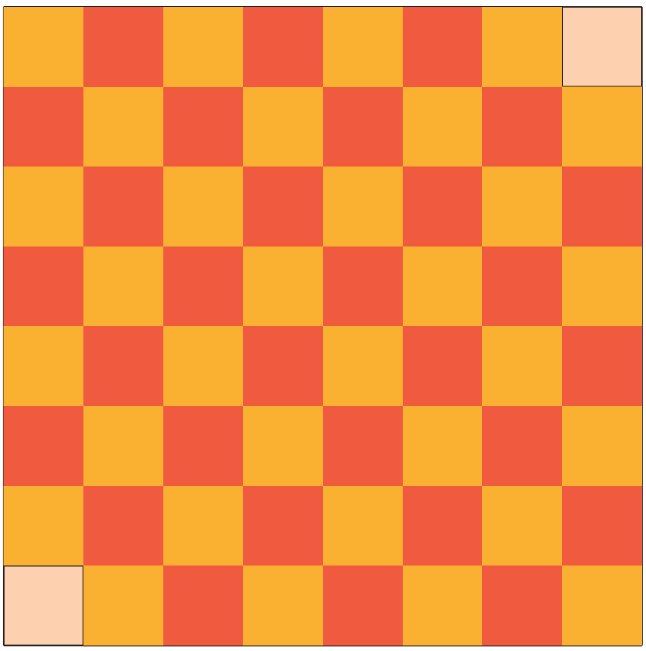


Odpowiedź łatwo odgadnąć, ale jak tego dowieść?

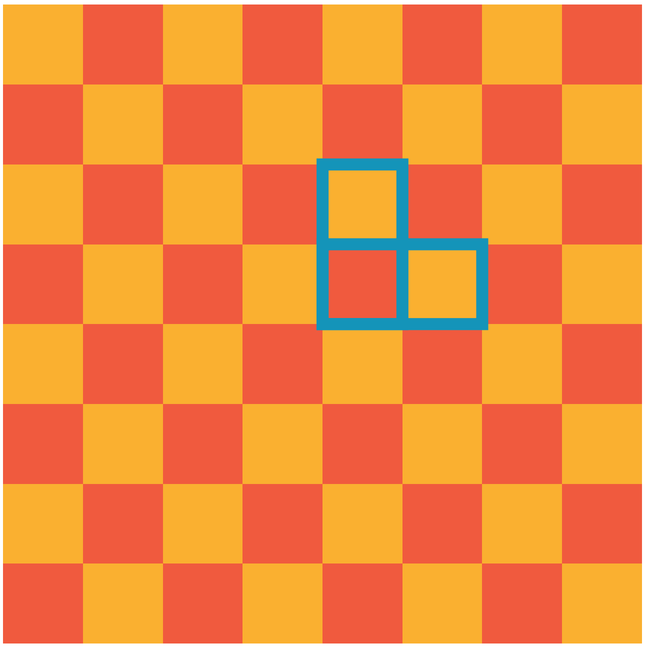
Odpowiedź

Szachownicy 8×8, z której usunięto dwa narożne pola leżące na jednej przekątnej nie da się pokryć kostkami domina 2×1!

Dowód.



Dowód



Szachownica 8×8 ma 64 pola, po 32 w każdym kolorze:

Po usunięciu narożnych pól pozostaną 62 pola, 32 jasne i 30 ciemnych:

$\boxed{64}$ / $\boxed{62}$ = **32** + **30**

Aby pokryć 62 pola potrzeba 31 kostek domina. Każda kostka domina pokrywa jedno jasne i jedno ciemne pole.

$\boxed{31}$ = **31** + **31**

Zatem 31 kostek pokryje tylko 31 jasnych pól! Pokrycie jakiego szukamy jest niewykonalne!

Dowiedliśmy więcej niż zamierzaliśmy

Twierdzenie

Jeżeli z szachownicy 8×8 usuniemy dwa pola, które przy szachowym kolorowaniu mają ten sam kolor, to pozostałych pól nie da się pokryć przy pomocy kostek domina.

Dowód.

Kolorujemy szachownicę tak, aby pola, które mają być usuniętę pola były „ciemne”. Po usunięciu tych pól pozostaną nam 62 pola: 30 ciemnych i 32 jasne. Do pokrycia musimy użyć 31 klocków domina, ale 31 klocków domina jest w stanie pokryć tylko 31 jasnych pól, a mamy do pokrycia 32 takie pola... $\square$

Twierdzenie odwrotne?

Twierdzenie

Jeżeli z szachownicy 8×8 usuniemy dwa pola, które przy szachowym kolorowaniu mają ten sam kolor, to pozostałych pól nie da się pokryć przy pomocy kostek domina.

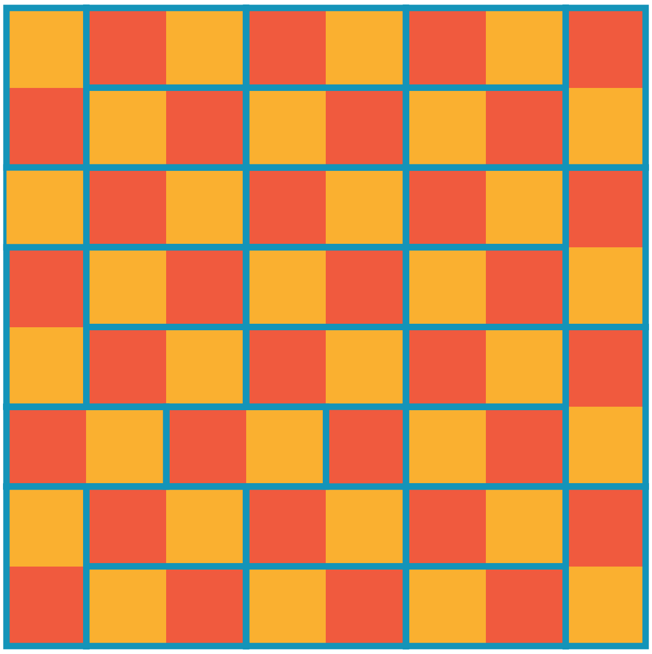
Twierdzenie

Jeżeli obszaru pozostałego po usunięciu dwóch pól z szachownicy 8×8 nie da się pokryć przy pomocy kostek domina, to usunieto pola, które przy szachowym kolorowaniu mają ten sam kolor.

Twierdzenie

Jeżeli z szachownicy 8×8 usuniemy dwa pola, które przy szachowym kolorowaniu mają różne kolory, to pozostałe pola można pokryć przy pomocy kostek domina.

Przykład



Usunięte pola są różnych kolorów, po ich usunięciu pozostaną 62 pola, 31 jasnych i 31 ciemnych:

Usuwamy dwa zaznaczone pola

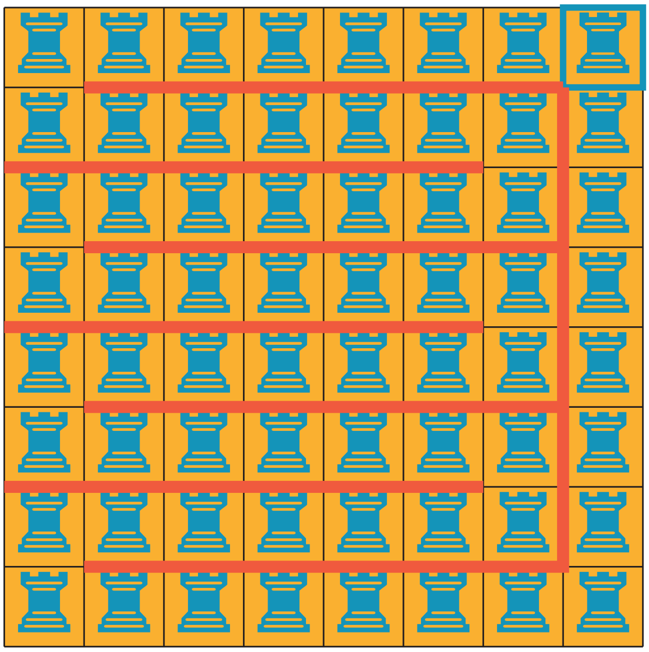
$\boxed{62} = \boxed{31} + \boxed{31}$

Jeżeli nasze twierdzenie jest prawdziwe, to pozostałe pola można pokryć kostkami domina.

Spacery wieży po szachownicy

Zadanie

Znajdź taką sekwencję ruchów wieży szachowej, w czasie której wieża odwiedzi każde pole szachownicy dokładnie raz a na koniec wróci do punktu startu.



Zadania konstrukcyjne

Zadanie

Dane są dwie klepsydry. Piasek w pierwszej z nich przesypuje się przez 7 minut, a w drugiej 11 minut. Jak przy pomocy tych dwóch klepsydr odmierzyć 15 minut?

Zadania konstrukcyjne

Zadanie

W pewnym 20-piętrowym wieżowców jest winda, która ma tylko dwa guziki. Wciśnięcie pierwszego z nich powoduje, że winda wyjedzie 13 pięter do góry (o ile tylko wykonalne, bo jest piętro 13 pięter wyżej) a naciśnięcie drugiego spowoduje zjechanie 8 pięter w dół (o ile to możliwe). Jak dostać się z piętra 13 na 8?

Zadanie

Czy możemy liczby od 1 do 100 zapisać w rzędzie w ten sposób, by moduł różnicy między dwiema sąsiadującymi liczbami był nie mniejszy od 50? Jeżeli tak, to na ile sposobów możemy to zrobić?

Zadania konstrukcyjne

Zadanie

Dozwolone są dwie operacje: po pierwsze, wolno podwoić liczbę zapisaną na tablicy, po drugie, wolno zmazać ostatnią cyfrę liczby zapisanej na tablicy. Wymazanie wszystkich cyfr równoważne jest z zapisaniem liczby 0. Jak przy pomocy tych dwóch operacji z liczby 458 otrzymać liczbę 14?

Zadania konstrukcyjne

Zadanie

Karty ponumerowane liczbami od 1 do 9 ułożono na stole w następującej kolejności

$$7,\ 8,\ 9,\ 4,\ 5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Możemy przestawiać kolejność kart, ale tylko w ten sposób, że wybieramy pewną liczbę sąsiadujących ze sobą kart i układamy je na uprzednio zajmowanych miejscach, ale w odwrotnej kolejności, np.

$$7,\ 8,\ 9,\ 4,\ 5,\ 6,\ 1,\ 2,\ 3 \rightarrow 7,\ 8,\ 9,\ 6,\ 5,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Czy możliwe jest ustawienie liczb w ich naturalnym porządku, tzn. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

Zadania konstrukcyjne

Zadanie

Czy w pola szachownicy 4×4 można wpisać różne od zera liczby całkowite w ten sposób, że sumy liczb wpisanych w narożne pola każdego kwadratu 2×2, 3×3 oraz 4×4 jaki można utworzyć z sąsiadujących pól na naszej szachownicy wynoszą zero?

Zadania logiczne

Zadanie

Na stole położono cztery karty na których widnieją kolejno symbole A, B, 22, 23. Ile kart trzeba odwrócić, aby sprawdzić czy prawdziwe jest stwierdzenie: „*Jeżeli po jednej stronie karty wydrukowano liczbę parzystą, to po drugiej stronie jest samogłoska*”.

Zadania logiczne

Zadanie

Załóżmy, że prawdziwe są następujące zdania:

1. Wśród ludzi, którzy nie mają w domu telewizora są tacy, którzy nie są matematykami.
2. Każdy kto nie jest matematykiem i codziennie rano biega (uprawia jogging), nie ma telewizora.

Czy możemy na tej podstawie wywnioskować, że wśród ludzi, którzy mają w domu telewizor są tacy, którzy nie biegają codziennie rano?

Zadania logiczne

Zadanie

W Krainie Czarów przed sądem Królowej Kier stanęli: Szalony Kapelusznik, Suseł i Marcowy Królik. Marcowy Królik zeznał, że Szalony Kapelusznik ukradł ciastka w czasie Obłąkanej Herbatki. Następnie zeznawali Suseł i Kapelusznik, lecz ich zeznania nie zachowały się w protokole. Archiwista zapisał tylko, że po przeanalizowaniu kolejnych dowodów okazało się, że tylko sprawca kradzieży zeznał wtedy prawdę. Kto ukradł ciastka?

Zadania logiczne

Zadanie

W pudełku znajdują się kredki w dwóch różnych kolorach i dwóch różnych wielkości. Uzasadnić, że znajdziemy w tym pudełku dwie kredki, które równocześnie różnych kolorów i różnych wielkości.

Zadania logiczne

Zadanie

Dane są trzy urny. Wiadomo, że w jednej z nich są dwie czarne kule, w jednej są dwie białe kule, a w jednej znajdują się czarna i biała kula. Na urnach umieszczone są naklejki $2C$, $2B$, i BC, które miały opisywać zawartość urn (B oznacza kulę białą a C — czarną). Niestety w skutek błędu żadna urna nie została prawidłowo oznaczona. Czy wyciągając jedną kulę z jednej tylko urny można określić zawartość wszystkich urn?

Kiełki

Na kartce papieru rysujemy pewną skończoną liczbę kropek. Dwaj gracze na przemian rysują nieprzerwane linie w ten sposób, że każda z linii zaczyna się i kończy w jakiejś kropce (może to być ta sama kropka) oraz nie przecina ani sama siebie, ani żadnej innej już narysowanej linii. Maksymalna liczba początków i końców linii, które spotykają się w danej kropce jest równa 3. Po dorysowaniu nowej linii, w dowolnym miejscu gracz dorysowuje nową kropkę leżącą na właśnie dodanej linii. Zauważmy, że do każdej dorysowanej kropki może już tylko dojść jedna nowa linia. Wygrywa ten gracz, który jako ostatni dorysuje nową linie zostawiając taką sytuacje na planszy, że drugi gracz nie ma już możliwości wykonania zgodnego z regułami gry ruchu.

Kiełki brukselki

Na kartce papieru rysujemy pewną skończoną liczbę krzyżyków. Końce tych krzyżyków nazywamy wolnymi. Dwaj gracze na przemian rysują nieprzerwane linie łącząc wolne końce krzyżyków (można łączyć dwa wolne końce tego samego krzyżyka). Nowe linie należy rysować tak, aby nie przecinały one ani samych siebie, ani żadnej innej już narysowanej linii. Po dorysowaniu nowej linii, w dowolnym miejscu gracz dorysowuje dwa ramiona nowego krzyżyka w ten sposób, że utworzone dwa wolne ramiona znajdują się po różnych stronach linii na właśnie dodanej linii . Zauważmy, że do każdej dorysowanej kropki może już tylko dojść jedna nowa linia. Wygrywa ten gracz, który jako ostatni dorysuje nową linie zostawiając taką sytuacje na planszy, że drugi gracz nie ma już możliwości wykonania zgodnego z regułami gry ruchu.