KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rozwijanie aktywności matematycznych o charakterze twórczym

dr Marta Pytlak

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie:

Sformułuj i udowodnij przestrzenny odpowiednik następującego twierdzenia:

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

- Jak może wyglądać przykładowe rozwiązanie tego zadania?
- Jakie twórcze aktywności matematyczne może uczeń rozwijać podczas rozwiązywania powyższego zadania?
- Czy rozważa Pan/Pani tego typu zadania z uczniami?

Główne cechy twórczej aktywności:

- **Przekształcanie zjawisk**, rzeczy, procesów działań lub ich obrazów poglądowo-zmysłowych lub myślowych;
- **Nowość, oryginalność**: wytworów działalności, wzorców lub narzędzi i środków, stosowanych w trakcie tej działalności;
- **Poszukiwanie „nieznanych a istniejących związków”** między rozważanymi obiektami.

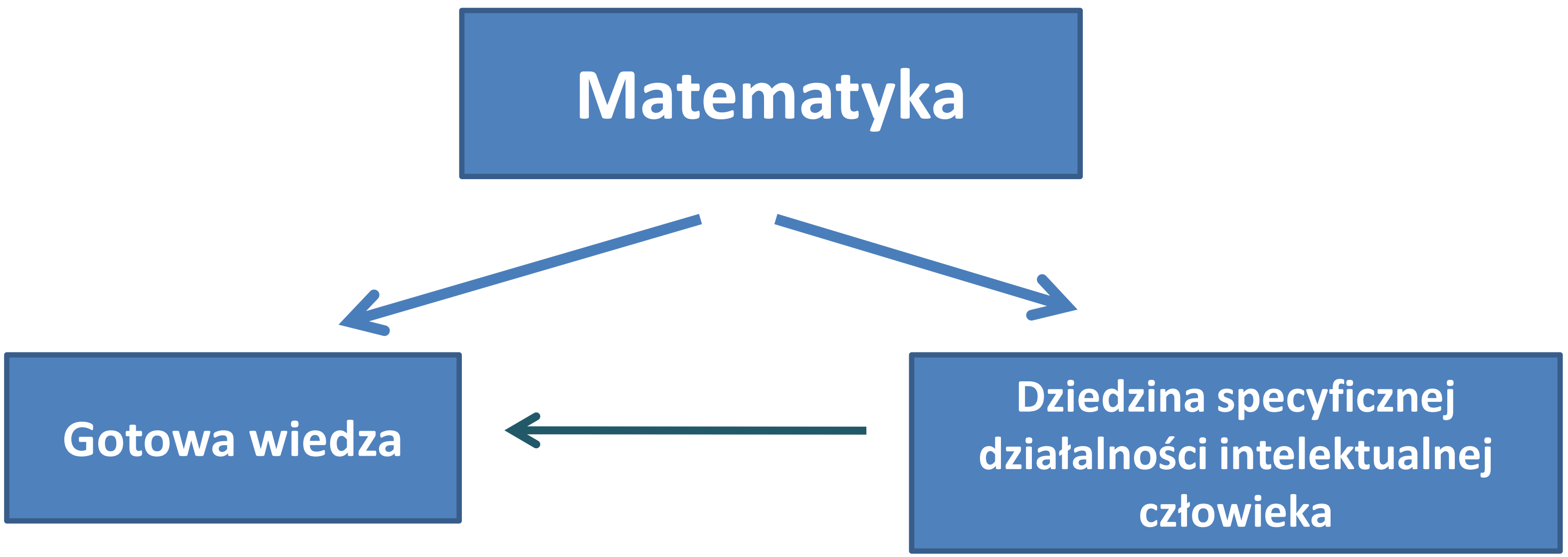
W. Nowak (1989):

*aktywność matematyczna ucznia to **praca umysłu** ukierunkowana na kształtowanie pojęć i rozumowania typu matematycznego, **stymulowana** przez sytuacje prowadzące do formułowania i rozwiązywania problemów teoretycznych i praktycznych.*

A.Z. Krygowska (1977, 1982):

Rodzaje aktywności matematycznej

Aktywność specyficznie twórcza



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Koncepcja kształtowania i rozwijania twórczej aktywności matematycznej

Podstawowe rodzaje TAM

Pewne złożone procedury występujące w twórczej pracy zawodowych matematyków

Zadania wieloetapowe

Laboratorium TAM

uczeń:
Znaleźć się w sytuacji zbliżonej do tej, w jakiej pracują matematycy twórczy

Nauczyciel:
świadome kierowanie procesem pracy uczniów

Podstawowe rodzaje twórczej aktywności matematycznej TAM

- stawianie hipotez i ich weryfikacja (w szczególności stawianie hipotez nierównościowych w oparciu o dane empiryczne),
- transfer metody (przeniesienie metody rozumowania czy rozwiązania problemu na zagadnienie podobne, analogiczne, ogólniejsze, otrzymane przez podniesienie wymiaru, szczególny czy też graniczny przypadek),
- twórcze odbieranie, przetwarzanie i wykorzystywanie informacji matematycznej,
- dyscyplina i krytyczność myślenia,
- generowanie problemów w procesie transferu metody,
- przedłużanie problemów, stawianie problemów w sytuacjach otwartych.

M. Klakla (2002) wyodrębnia i charakteryzuje rodzaje TAM na bazie odpowiednio dobranych przykładów w trzech aspektach:

- Aspekt intelektualny – pod kątem opisu procesów intelektualnych zachodzących w trakcie podejmowania danego rodzaju aktywności przez ucznia,
- Aspekt dydaktyczny – pod kątem opisu propozycji dydaktycznej (projektu dydaktycznego) mającej na celu spowodowanie podjęcia przez uczniów danego rodzaju aktywności matematycznej,
- Aspekt ewaluacyjny – pod kątem problemów związanych z badaniem umiejętności podejmowania przez uczniów danego rodzaju aktywności matematycznej.

Zadania wieloetapowe

- to specyficzna struktura ciągów zadań, problemów i sytuacji dydaktycznych,
- są oparte na sytuacjach problemowych,
- wiążą ze sobą różne rodzaje twórczej aktywności matematycznej w złożonych, bogatych sytuacjach matematyczno-dydaktycznych,
- stanowią dla uczniów swoiste laboratorium TAM.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Charakterystyka zadania wieloetapowego wg M. Klakli

a) daje okazję do podejmowania różnych rodzajów aktywności (np. dostrzegania prawidłowości, stawiania hipotez i ich weryfikacja, specyfikacja, dostrzeganie i wykorzystywanie analogii jako środka do formułowania hipotez, dostrzeganie i formułowanie problemów),

b) daje się sensownie przedłużać w różnych kierunkach, dopuszcza uogólnienia,

c) stwarza możliwość wykorzystania różnorodnych metod matematycznych (rozumowania redukcyjne, dedukcyjne, dowód nie wprost, indukcja matematyczna itp.),

d) treści matematyczne występujące w zadaniu są różnorodne (z różnych działów matematyki) i w innym układzie niż w programie szkolnym,

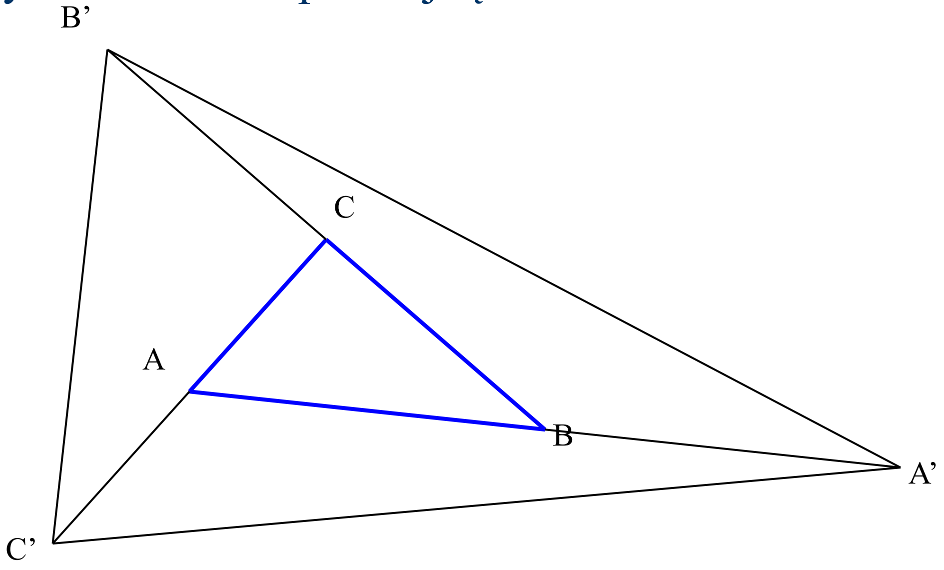
e) realizacja zadania wieloetapowego może być rozłożona w czasie, np. do pewnych części zadania powraca się dopiero po pewnym czasie, gdy uczeń w trakcie normalnej nauki szkolnej zdobędzie odpowiednią bazę matematyczną, aby podjąć tę problematykę,

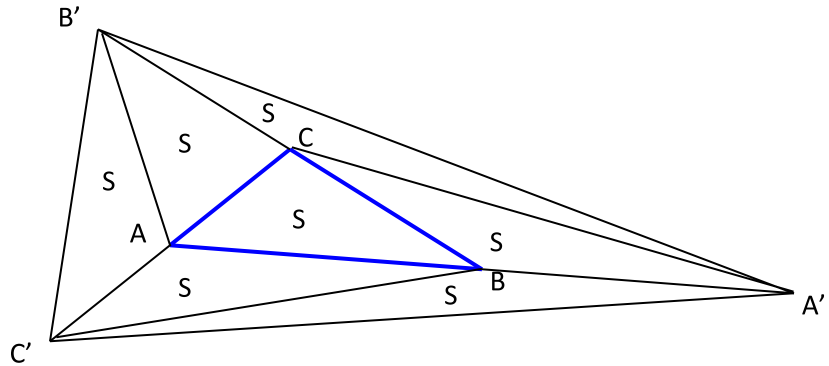
f) tzw. „mapka” zadania wieloetapowego umożliwia nauczycielowi objęcie „jednym rzutem oka” całej problematyki i wybór tej części, która na danym etapie może być realizowana w klasie.

FRAGMENT ZADANIA WIELOETAPOWEGO „PRZEDŁUŻANIE BOKÓW WIELOKĄTA"

Problem 1 – sytuacja wyjściowa.

Dany jest trójkąt *ABC*. Skonstruuj trójkąt *A'B'C'* poprzez przedłużenie każdego z boków trójkąta *ABC* o jego długość w tej samej orientacji. Ile wynosi stosunek pól trójkątów *ABC* i *A'B'C'*?





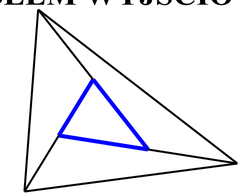
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{S}{S + 2S \cdot 3} = \frac{1}{7}$$

Dalsze pytania, które można postawić:

- Czy wynik zależy od rodzaju trójkąta ABC?
- Czy skonstruowany trójkąt będzie miał „taki sam kształt” jak wyjściowy?
- Czy wybór „orientacji przedłużania” wpływa na wynik?
- Co się dzieje, gdy będziemy każdy bok trójkąta przedłużać 2-krotnie, 3-krotnie, n-krotnie?

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

PROBLEM WYJŚCIOWY

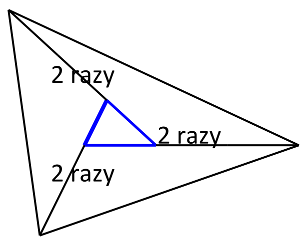


DiK

Dyskusja nad treścią zadania jak wykonać poprawny rysunek

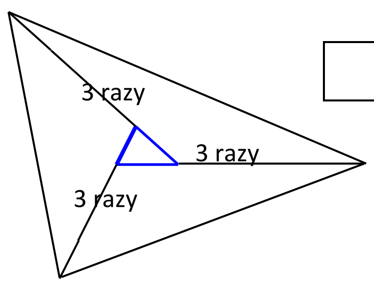
Rozwiązanie

2-krotne przedłużanie boków



TM

3-krotne przedłużanie boków



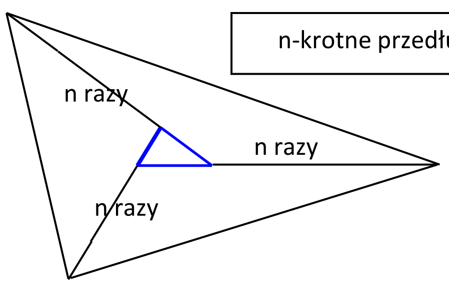
PZ

Rozwiązanie

Rozwiązanie

TM

n-krotne przedłużanie boków



TM

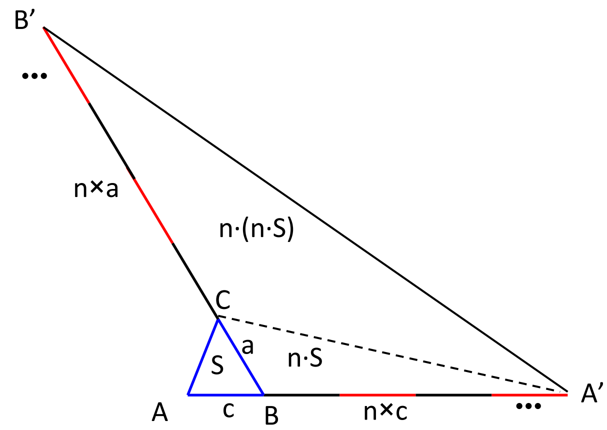
Rozwiązanie

PZ

Zależności pomiędzy liczbami – wartościami wielomianu $3n^2+3n+1$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

$3n^2+3n+1$ dla n naturalnego. Co można zauważyć?

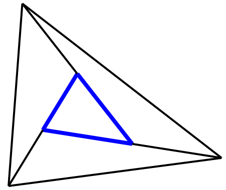


$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{S}{S + n\cdot S\cdot(n+1)\cdot 3} = \frac{1}{1+3n(n+1)} = \frac{1}{3n^2+3n+1}$$

Dalsze pytania, które można postawić:

- Czy w mianowniku otrzymywanych ułamków zawsze znajdują się liczby nieparzyste?
- Czy w mianowniku otrzymywanych ułamków znajdują się zawsze liczby pierwsze?
- Wypisz wartości otrzymanego wielomianu

PROBLEM WYJŚCIOWY



PZ

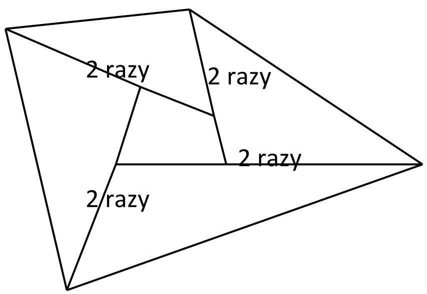
Czworokąt dowolny – 1-krotne przedłużanie boków

1 raz
1 raz
1 raz
1 raz

PZ

TM

Rozwiązanie



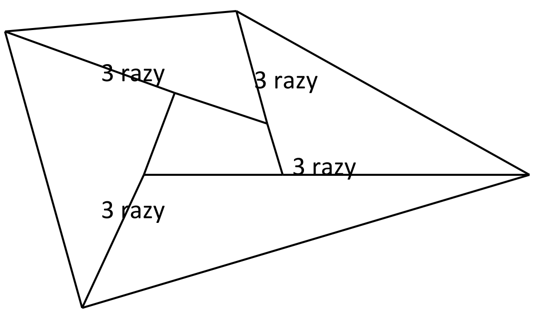
Czworokąt dowolny – 2-krotne przedłużanie boków

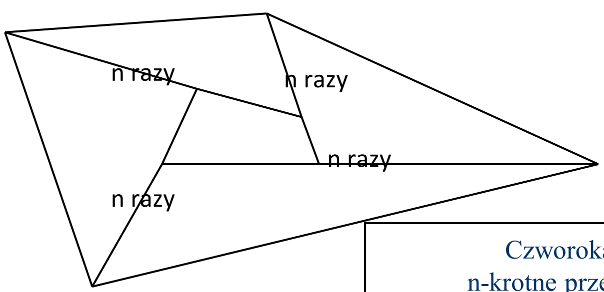
TM

Rozwiązanie

PZ

Czworokąt dowolny – 3-krotne przedłużanie boków





PZ

TM

Rozwiązanie

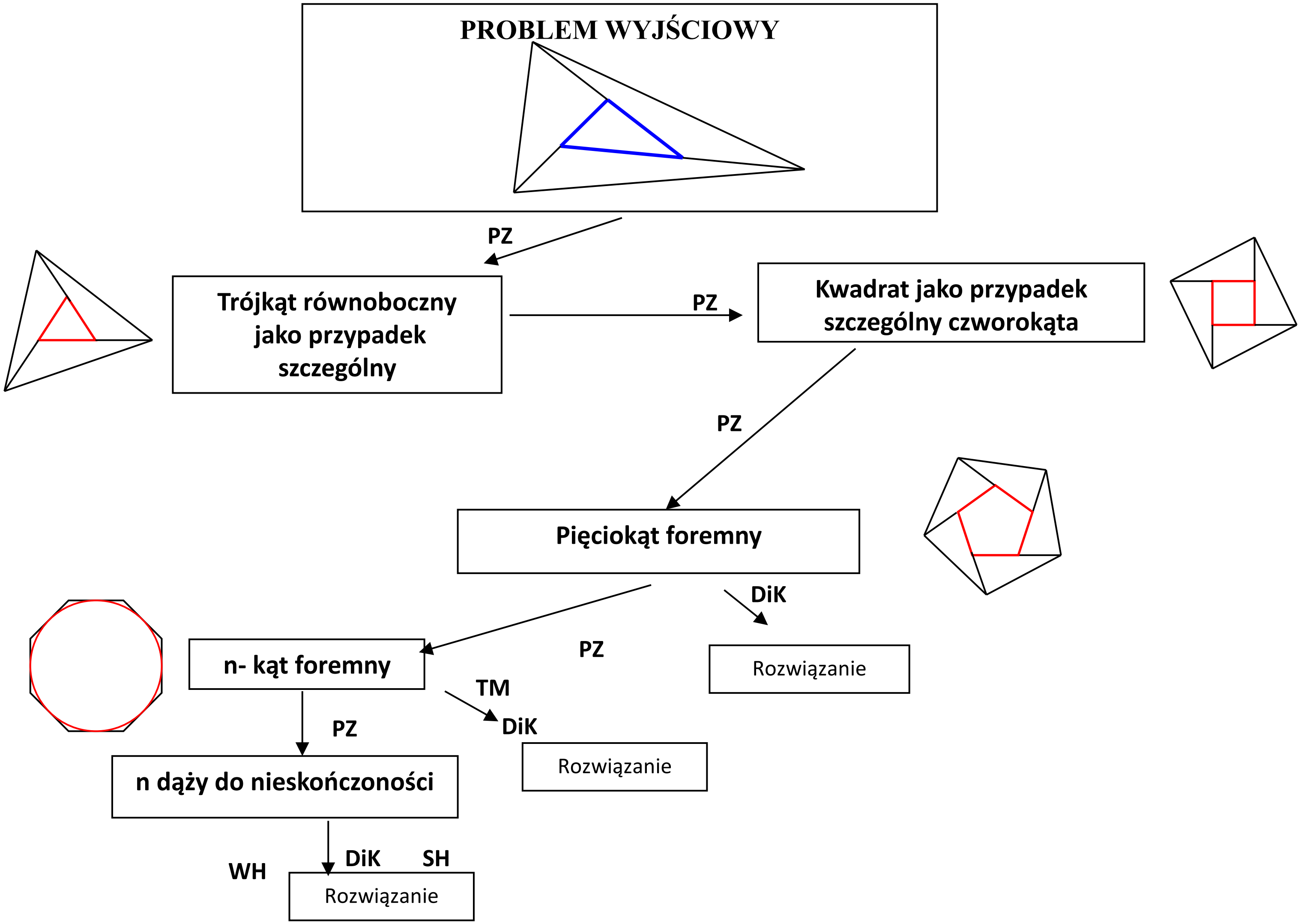
Czworokąt dowolny – n-krotne przedłużanie boków

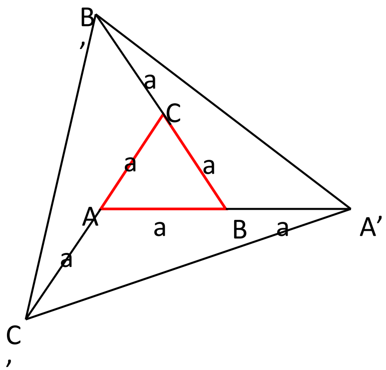
TM

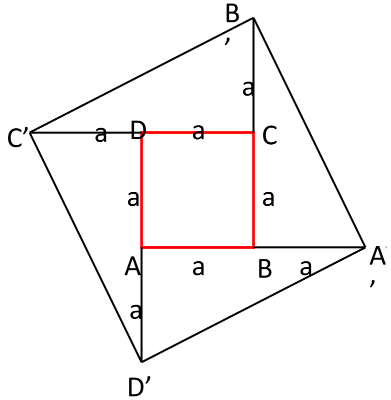
Rozwiązanie

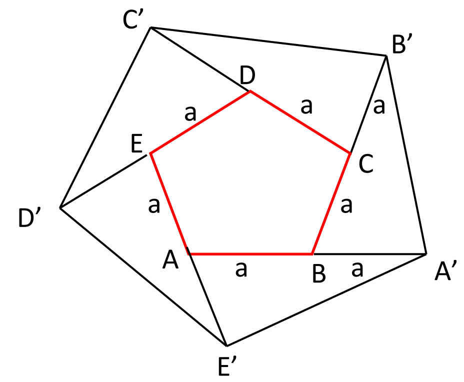
DiK

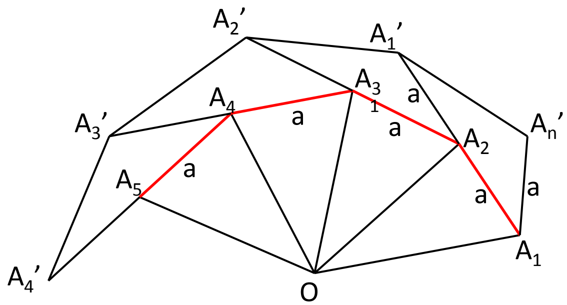
Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie


PROBLEM WYJŚCIOWY
PZ
Trójkąt równoboczny jako przypadek szczególny
PZ
Kwadrat jako przypadek szczególny czworokąta
PZ
Pięciokąt foremny
DiK
Rozwiązanie
PZ
n- kąt foremny
TM
DiK
Rozwiązanie
PZ
n dąży do nieskończoności
WH
DiK
SH
Rozwiązanie


B’
C’
A’
A
B
C
a


B’
C’
A’
D’
A
B
C
D
a


C’
B’
A’
D’
E’
A
B
C
D
E
a


A_2'
A_1'
A_3'
A_n'
A_4'
A_4
A_3
A_2
A_5
A_1
O
a

Jak sformułować problem wyjściowy w przestrzeni?

Trójkąt
Przedłużanie jednokrotne boków
Stosunek pól

→

Czworościan
Przedłużanie jednokrotne ścian
Stosunek objętości

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Problem – sytuacja wyjściowa

Niech a, b są liczbami dodatnimi (a>0, b>0)

$$S_1(a,b) = \frac{a+b}{2}$$

$$S_2(a,b) = \sqrt{ab}$$

$$S_3(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

PROBLEM WYJŚCIOWY
Definicje
średniej arytmetycznej S_1 (a, b)
średniej geometrycznej S_2 (a, b)
średniej harmonicznej S_3 (a, b)

SH

DiK

Zależności pomiędzy średnimi

PZ

Interpretacja geometryczna średnich liczb a, b

SH
WH

Oszacowywanie średniej geometrycznej za pomocą średnich arytmetycznej i geometrycznej

DiK

Ciągi średnich

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Problem 1
Znajdź zależności pomiędzy średnimi arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną dwóch liczb.

Hipoteza 1
Dla dowolnych a>0, b>0: $S_1(a,b) \geq S_2(a,b) \geq S_3(a,b)$

Uzasadnienie:
Niech a>0 i b>0. Zachodzą następujące równoważności:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 ab \geq 4a^2b^2 \Leftrightarrow (a^2+2ab+b^2)ab-4a^2b^2 \geq 0 \Leftrightarrow ab(a^2-2ab+b^2) \geq 0 \Leftrightarrow ab(a-b)^2 \geq 0$$

Wobec założeń oczywiste są nierówności $(a-b)^2 \geq 0$ $\quad ab(a-b)^2 \geq 0$
Stąd $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
a więc $S_1(a,b) \geq S_2(a,b) \geq S_3(a,b)$ dla dowolnych liczb dodatnich a, b.

Pytanie dodatkowe

Dla jakich a, b ich średnie arytmetyczna, geometryczna i harmoniczną będą sobie równe?

Rozwiązanie:

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \qquad \sqrt{ab} = \frac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow ab(a^2 - b^2) = 0$$

Stąd wynika, że

$$S_1(a,b) = S_2(a,b) = S_3(a,b) \Leftrightarrow a = b$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Hipoteza 2
Odwrotność średniej harmonicznej liczb dodatnich a i b jest średnią arytmetyczną odwrotności tych liczb, a więc

$$\frac{1}{S_3(a,b)} = S_1\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

Uzasadnienie:
Niech $a>0, b>0$

Zachodzą następujące równości:

$$\frac{1}{S_3(a,b)} = \frac{1}{\frac{2ab}{a+b}} = \frac{a+b}{2ab} = \frac{\frac{a+b}{ab}}{2} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2} = S_1\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

Hipoteza 3

Średnia harmoniczna odwrotności liczb dodatnich a i b jest odwrotnością średniej arytmetycznej, a więc

$$S_3\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{S_1(a,b)}$$

Hipoteza 4

Odwrotność średniej geometrycznej dwóch liczb dodatnich a i b jest średnią geometryczną odwrotności tych liczb, a więc

$$\frac{1}{S_2(a,b)} = S_2\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

Hipoteza 5

Kwadrat średniej geometrycznej dwóch liczb dodatnich a i b jest iloczynem średniej arytmetycznej i harmonicznej tych liczb, a więc

$$S_2^2(a,b) = S_1(a,b)\cdot S_3(a,b)$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Problem 2

Niech dany będzie trapez *ABCD*, w którym *AB*||*DC* oraz |*AB*|=*a* i |*DC*|=*b* . Znajdź odcinki równoległe do podstaw trapezu, których końce należą do ramion trapezu, a ich długości równe są średnim arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej liczb *a* i *b*.

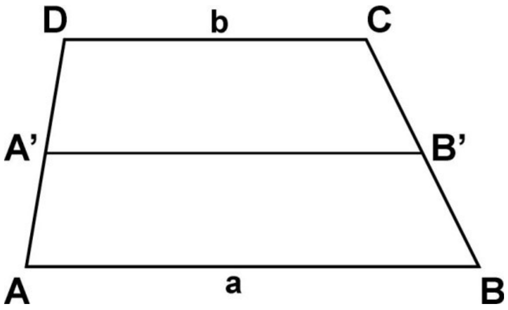
Problem dodatkowy:

Zakładając, że a>b uzasadnij, że

$$a > S_1(a,b) \geq S_2(a,b) \geq S_3(a,b) > b$$

Hipoteza 6

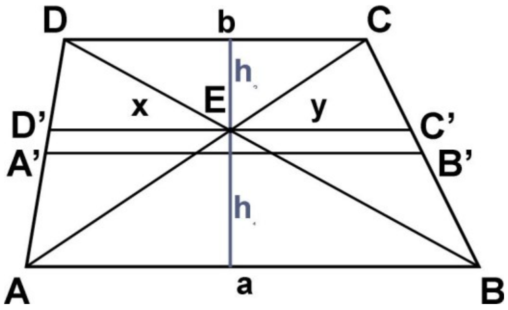
Długość odcinka łączącego środki ramion trapezu o podstawach a i b jest równa średniej arytmetycznej liczb a i b .



Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Hipoteza 7

Długość odcinka równoległego do podstaw trapezu a i b, którego końce należą do jego ramion, przechodzącego przez punkt przecięcia się przekątnych trapezu jest równa średniej harmonicznej liczb a i b.



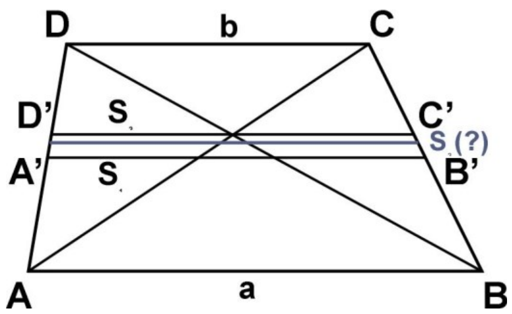
Pytanie dodatkowe:

Gdzie znajduje się odcinek równoległy do podstaw trapezu, którego końce należą do ramion trapezu, a którego długość jest równa średniej geometrycznej długości tych podstaw?

Problem 2a

Czy powtarzając powyższą konstrukcję dla trapezu *A'B'C'D'* otrzymamy lepsze oszacowanie średniej geometrycznej liczb a i b, tzn. czy będzie spełniony warunek:

$$S_1(S_1(a,b),S_3(a,b)) > S_2(a,b) > S_3(S_1(a,b),S_3(a,b))$$



$$\frac{S_1 + S_3}{2} > S_2 > \frac{2S_1S_2}{S_1 + S_2}$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Problem 2b
Czy średnia geometryczna liczb a i b będzie zawsze zawarta między średnimi arytmetycznymi i harmonicznymi otrzymanymi przez nieskończone kontynuowanie omówionych powyżej konstrukcji?

Dalsze pytania, które można postawić:

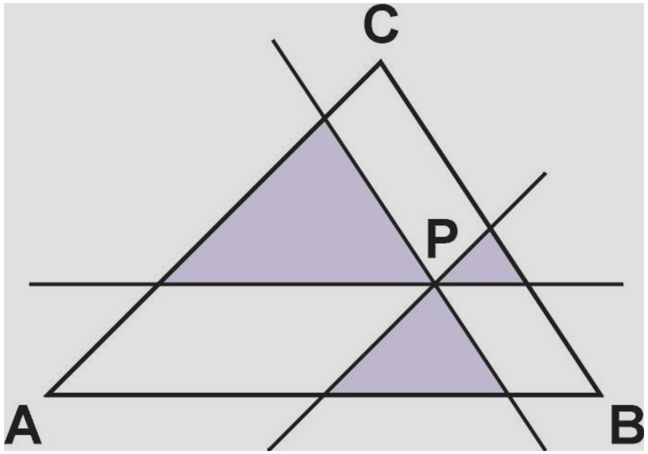
•Zdefiniuj średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną trzech liczb dodatnich a, b, c.

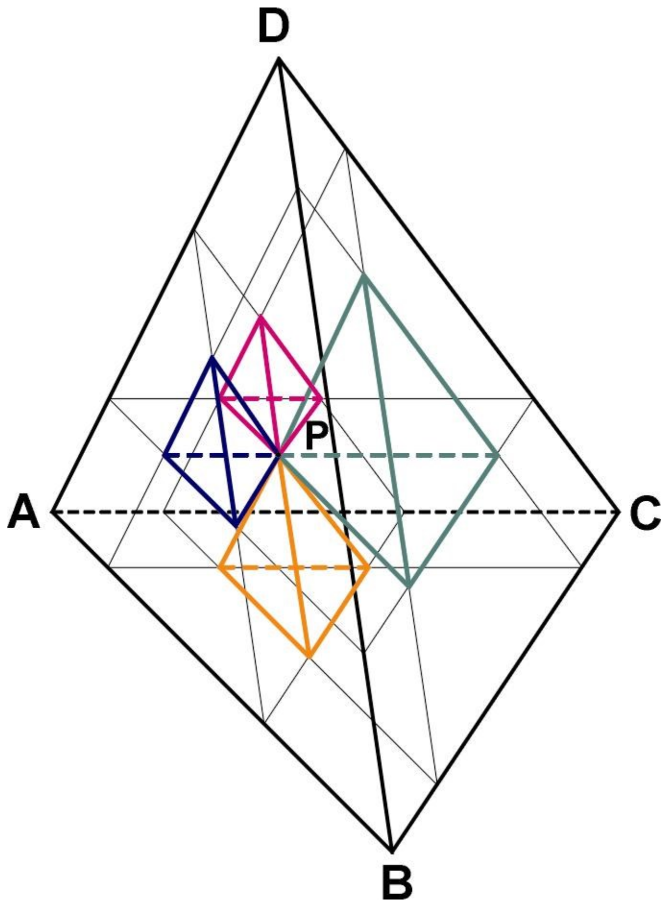
•Jakie problemy można rozważyć odnośnie średniej arytmetycznej, geometrycznej i harmonicznej trzech liczb dodatnich a, b, c? Czy będą zachodzić odkryte zależności?

FRAGMENT ZADANIA WIELOETAPOWEGO „MOTYL II RODZAJU”

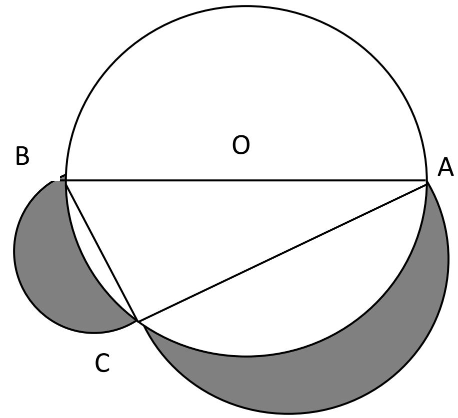
Problem 2 – sytuacja wyjściowa.

Niech dany będzie trójkąt ostrokątny ***ABC.*** Przez dowolny punkt ***P*** należący do wnętrza trójkąta poprowadzono proste równoległe do każdego z jego boków. Proste te dzielą trójkąt ***ABC*** o polu ***S*** na sześć części, z których trzy są trójkątami o polach ***S1, S2, S3***. Figurę, będącą sumą trzech, powstałych w wyniku opisanej konstrukcji, trójkątów o wspólnym wierzchołku ***P*** nazywamy „motylkiem”. Zaś trójkąty składające się na „motylka” jego „skrzydełkami”.

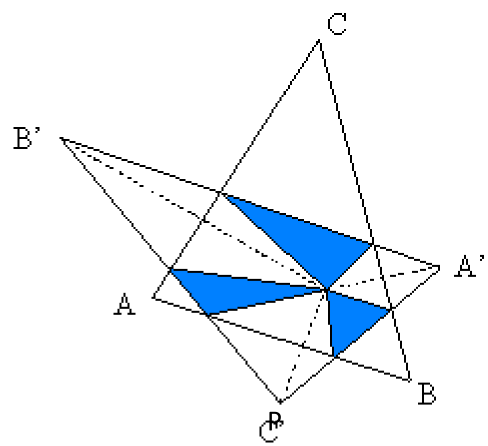



D
P
A
C
B

Księżycami Hipokratesa zbudowanymi na trójkącie prostokątnym ABC o kącie prostym C będziemy nazywać obszary ograniczone łukiem ACB okręgu opisanego na tym trójkącie i łukami półokręgów o średnicach równych długościom przyprostokątnych trójkąta i środkach w środkach przyprostokątnych.



Dany jest trójkąt ABC.
Punkt A’ jest symetryczny do punktu P względem prostej BC,
punkt B’ jest symetryczny do punktu P względem prostej AC,
punkt C’ jest symetryczny do punktu P względem prostej AB.
Sformułuj pewne istotne pytania związane z sytuacją zaprezentowaną na rysunku i spróbuj na nie odpowiedzieć.



Zadanie:

Sformułuj i udowodnij przestrzenny odpowiednik następującego twierdzenia:

Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

- Jakie twórcze aktywności matematyczne może uczeń rozwijać podczas rozwiązywania powyższego zadania?
- Czy rozważa Pan/Pani tego typu zadania z uczniami?
- Jak może wyglądać przykładowe rozwiązanie tego zadania?

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie