KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uniwersytety Młodzieżowe Matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

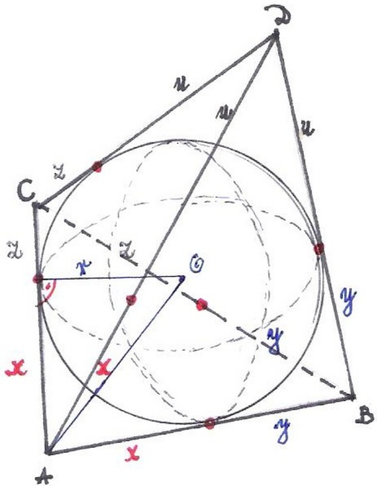
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

dr Andrzej Gębarowski

Dowodzenie warunków równoważnych w geometrii i dalsze ich wykorzystanie

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Zadanie 1. *Dowieść, że jeżeli istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu, to sumy przeciwległych krawędzi czworościanu są równe i że prawdziwe jest twierdzenie odwrotne.*



$$x = \sqrt{AO^2 - r^2}$$

$$y = \sqrt{BO^2 - r^2}$$

$$z = \sqrt{CO^2 - r^2}$$

$$u = \sqrt{DO^2 - r^2}$$

Dowód w prawo jest bardzo prosty. Niech O będzie środkiem kuli, r promieniem. Każdy z odcinków wychodzących z wierzchołka A styczny do kuli ma długość $x = \sqrt{AO^2 - r^2}$. Analogicznie odcinki wychodzące z pozostałych wierzchołków styczne do kuli są odpowiednio sobie równe (patrz rysunek 1).

Teraz

$$AB + CD = x + y + z + u \quad \text{i} \quad AC + BD = x + z + y + u$$

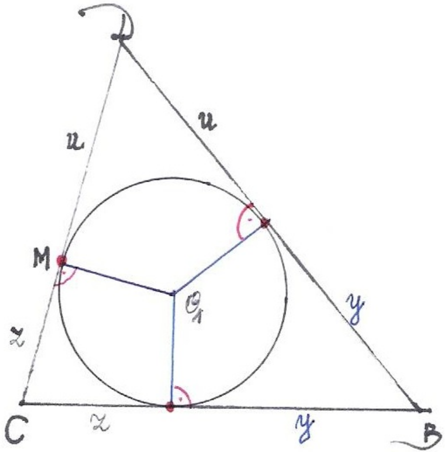
$$\Downarrow$$

$$AB + CD = AC + BD.$$

Uwzględniając pozostałe pary przeciwległych krawędzi czworościanu otrzymujemy istotnie

$$(1) \qquad AB + CD = AC + BD = AD + BC.$$

Dowód w lewo. Niech w czworościanie $ABCD$ zachodzi warunek (1). Wykażemy, że istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu.
Weźmy pod uwagę okręgi C_1 i C_2 o środkach O_1 i O_2 wpisane odpowiednio w trójkąty BCD i ACD. Niech C_1 styka się z krawędzią CD w punkcie M, a okrąg C_2 w punkcie M'. Stosując znane wzory na odległość wierzchołka od punktu styczności okręgu wpisanego wiemy, że (patrz rysunek 2)



$$2y + 2z + 2u = 2p$$

$$y + z + u = p$$

$$z = p - (y + u)$$

Inaczej

$$CM = \frac{1}{2}(BC + CD + BD) - BD =$$

$$= \frac{1}{2}(BC + CD - BD)$$

$$(2) \quad CM = \frac{1}{2}(BC+CD-BD) \text{ oraz } CM' = \frac{1}{2}(AC+CD-AD)$$

zatem

$$CM - CM' = \frac{1}{2}(BC + AD - AC - BD) = 0 \ ,$$

(wobec (1)) skąd wynika, że punkty M i M' pokrywają się, tj. okręgi C_1 i C_2 są styczne do krawędzi CD wtym samym punkcie M. W takim razie istnieje kula K, której powierzchnia przechodzi przez okręgi C_1 i C_2.

Płaszczyzna O_1O_2M jest prostopadła do CD (krawędzi przecięcia płaszczyzn BCD i ACD) a więc jest też prostopadła do płaszczyzn BCD i ACD . Prostopadłe wystawione w punktach O_1 i O_2 do tych płaszczyzn leżą w płaszczyźnie O_1O_2M i przecinają się w punkcie O. Punkt O ma tę samą odległość OM od wszystkich punktów okręgów C_1 i C_2, więc powierzchnia kuli K o środku O i promieniu OM przechodzi przez okręgi C_1 i C_2. Kula K jest styczna do krawędzi BC, BD, AC, AD, CD. Należy jeszcze wykazać, że jest styczna do krawędzi AB .

Otóż powierzchnia kuli K przecina płaszczyznę ABC wzdłuż okręgu C_3 stycznego do krawędzi BC i AC w tych samych punktach co okręgi C_1 i C_2. Dowód będzie zakończony, gdy wykażemy, że C_3 jest okręgiem wpisanym w trójkąt ABC .

Przy oznaczeniach odcinków na krawędziach BC, BD, AC, AD, CD wyznaczonych przez okręgi C_1 i C_2 tak jak poprzednio mamy $BC = y+z$, $BD = y+u$, $AC = x+z$, $AD = x+u$, $CD = z+u$. Według założenia $AB+CD = AC+BD$ jest $AB = AC+BD-CD$ czyli $AB = (x+z)+(y+u)-(z+u) = x+y$.

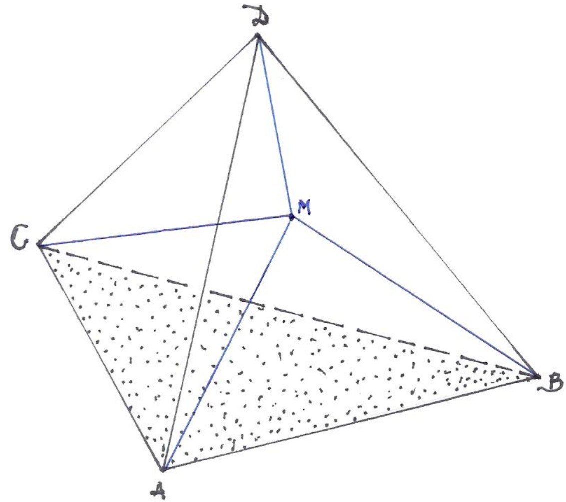
Okrąg C_4 wpisany w trójkąt ABC wyznacza na bokach BC i AC przy wierzchołku C odcinki o pewnej długości powiedzmy z_1; przy czym (wobec wzoru (2))

$$z_1 = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = \frac{1}{2}[(y + z) + (x + z) - (x + y)] = z,$$

skąd wynika, że okrąg C_4 pokrywa się z okręgiem C_3 i kula K jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$.

A oto wykorzystanie udowodnionej równoważności do rozwiązania zadania, które bez znajomości warunku z poprzedniego zadania wydawać się może bardzo trudnym.

Zadanie 2. *Wewnątrz czworościanu $ABCD$ obrano punkt M, przy czym okazało się, że dla każdego z czworościanów $ABCM$, $ABDM$, $ACDM$, $BCDM$ istnieje sfera styczna do wszystkich jego krawędzi. Udowodnić, że istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$.*



ABCM ma wł. W $\Rightarrow$ $AB + CM = BC + AM = BM + AC$,
ACDM ma wł. W $\Rightarrow$ $CD + AM = CM + AD$,
BCDM ma wł. W $\Rightarrow$ $CD + BM = CM + BD$.

Niech W będzie własnością czworościanu taką, że istnieje sfera styczna do wszystkich jego krawędzi.
W zadaniu poprzednim wykazaliśmy iż

$$PQRS \text{ ma własność } W \iff PQ+RS = PR+QS = PS+QR.$$

Wykorzystując ten warunek do trzech wybranych czworościanów np. $ABCM$, $ACDM$ i $BCDM$ mamy w szczególności

$$AB + CM = BC + AM = BM + AC,$$

$$CD + AM = CM + AD, \qquad CD + BM = CM + BD.$$

Wobec tego

$$AB + CD - AC - BD = (BM - CM) + (CM - BM) = 0,$$

czyli

$$AB + CD = AC + BD \ ,$$

jak również

$$AB + CD - BC - AD = (AM - CM) + (CM - AM) = 0,$$

czyli

$$AB + CD = BC + AD.$$

Dowiedliśmy zatem, że

$$AB + CD = AC + BD = BC + AD,$$

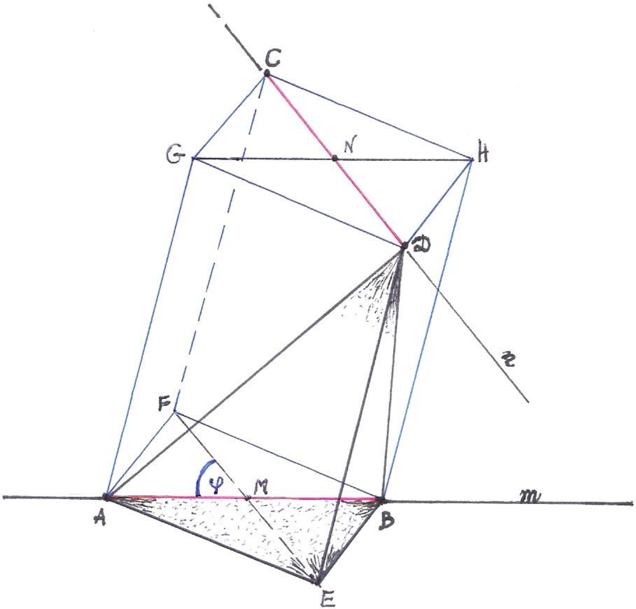
co oznacza, że czworościan $ABCD$ ma własność W tj. istnieje sfera styczna do wszystkich jego krawędzi.

Uwaga . *W przedstawionym rozwiązaniu nie korzystaliśmy z założenia, że istnieje sfera styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABDM$. Rozumując podobnie można więc wykazać, że jeżeli każdy z trzech spośród czterech czworościanów $ABCM$, $ABDM$, $ACDM$, $BCDM$ ma własność W, to ma ją również czworościan $ABCD$.*

Zadanie 3. *Dane są dwie proste skośne* m *i* n*. Na prostej* m *odmierzono odcinek* AB *o danej długości* a*, a na prostej* n *odmierzono odcinek* CD *o danej długości* b*. Dowieść, że objętość czworościanu* $ABCD$ *nie zależy od położenia odcinków* AB *i* CD *na prostych* m *i* n*.*

Figurę utworzoną przez dwie proste skośne m i n najdogodniej przedstawić na rysunku przy pomocy rzutów na dwie płaszczyzny prostopadłe. Za rzutnię poziomą obieramy dowolną płaszczyznę równoległą do prostych m i n. Rzutami pionowymi danych prostych będą wówczas proste równoległe m'' i n'', których odległość d równa jest odległości prostych skośnych m i n. Rzuty poziome m' i n' będą dwiema przecinającymi się prostymi, tworzącymi kąt φ równy kątowi między prostymi skośnymi m i n. Rzuty poziome odcinków AB i CD równoległych do rzutni poziomej, mają długości $A'B' = a$ i $C'D' = b$.

Aby obliczyć objętość czworościanu $ABCD$, rozważmy najpierw pewien równoległościan „opisany ” na tym czworościanie a mianowicie równoległościan, dla którego odcinki AB i CD są przekątnymi dwóch ścian przeciwległych. Drugimi przekątnymi tychże ścian równoległościanu są: odcinek $EF = b$, równoległy do odcinka CD i mający z odcinkiem AB wspólny środek M, oraz odcinek $GH = a$, równoległy do odcinka AB i mający wspólny środek N, z odcinkiem CD.



$AB = a$

$CD = b$

$\sphericalangle(m, n) = \varphi$

$\rho(m, n) = d$

Objętość V zbudowanego w ten sposób równoległościanu równa się iloczynowi pola ściany $AEBF$ przez jej odległość od ściany przeciwległej, tj. przez d.
Ale pole równoległoboku $AEBF$, którego przekątne mają długości a i b i tworzą kąt φ równa się $\frac{1}{2}ab\sin\varphi$; zatem

$$V = \frac{1}{2}abd\sin\varphi.$$

Czworościan $ABCD$ powstaje z równoległościanu przez obcięcie czterech narożnych czworościanów $AEBD$, $BFAC$, $CGDA$ i $DHCB$. Objętość każdego z nich, których podstawy są dwa razy mniejsze od podstaw równoległościanu, a wysokość równa się d, wynosi $\frac{1}{6}V$.
Zatem objętość czworościanu $ABCD$ równa się $\frac{1}{3}V = \frac{1}{6}abd\sin\varphi$; jest więc zależna tylko od długości a, b, d i kąta φ, a nie zależy od położenia odcinków AB i CD na prostych m i n.

Dziękuję za uwagę