PROGRAM CABRI 3D W ROZWIJANIU UZDOLNIEŃ UCZNIA

dr Bronisław Pabich

28.04.2012

Praca z uczniem uzdolnionym w zakresie geometrii trzeciego wymiaru to nie tylko wyjście poza program nauczania, ale ukazywanie momentów, w których uczeń znajdzie radość z poznawania nowej wiedzy i pobudzi motywacje do kolejnych, samodzielnych działań, równocześnie kształtując wyobraźnię przestrzenną i logiczne myślenie, pracując z tekstem matematycznym i ucząc się prowadzenia dyskusji w grupie rówieśniczej. Użycie komputera może skutkować przeniesieniem naszych działań na samodzielną twórczą pracą w zaciszu domowym.

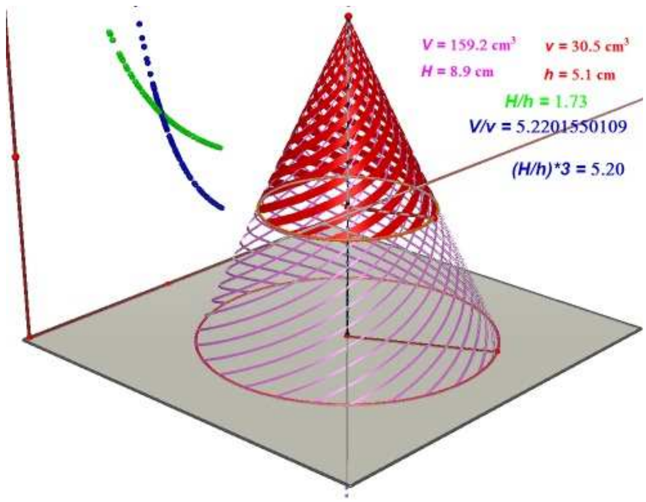
Wyobraźmy sobie, że na poprzedniej lekcji uczeń otrzymał dwa zadania do rozwiązania w domu. Przeanalizujmy na każdym zadaniu, co może zrobić uczeń.

Zadanie 1

Czy istnieją takie dwa podobne stożki, aby stosunek ich objętości stanowił 1/3 stosunku ich wysokości?

Uczeń widział na poprzedniej lekcji eksperyment pokazujący, że taka sytuacja może zaistnieć.

Ale kiedy?



rys. 1

Wprowadźmy odpowiednie oznaczenia: V, v, H, h i R r.

Uczeń zaczyna rachować:

$$\frac{V}{v} = \frac{4\pi R^3 H}{3} \cdot \frac{3}{4\pi r^3 h} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{H}{h}\right)$$

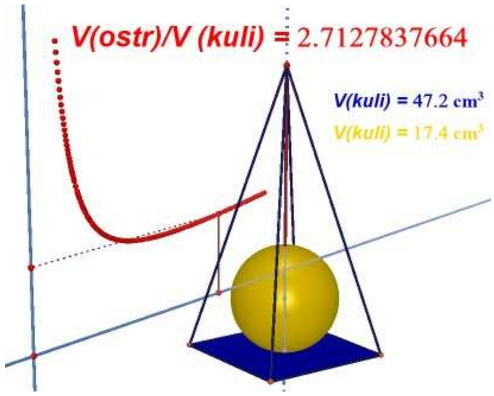
Zatem skoro $\frac{Y}{v} = 3\left(\frac{H}{h}\right)$ to znaczy, że $\frac{R}{r} = \sqrt[3]{3}$

Zadanie okazało się całkiem łatwe. Teraz aż chciałoby się sprawdzić, że tak faktycznie (przynajmniej w przybliżeniu) jest. Jeśli uczeń dysponuje programem Cabri 3D, oblicza dodatkowo R/r i odczytuje to w przybliżeniu.

W tym wszystkim nie chodzi o to, by to proste zadanie rozwiązać, ale o to, by uczeń widział, jakimi drogami można do takich zadań dochodzić, w jaki sposób eksperyment staje się źródłem odkryć interesujących problemów, jak prowokować do ich rozwiązywania i uzasadniania stawianych tez. Bez eksperymentów nie było by współczesnej fizyki, mechaniki, elektroniki i jak widać również elementów matematyki.

Zadanie 2

Kiedy stosunek objętości prawidłowego ostrosłupa czworokątnego o zmieniającej się wysokości do objętości kuli wpisanej w niego jest najmniejszy? – rys. 2



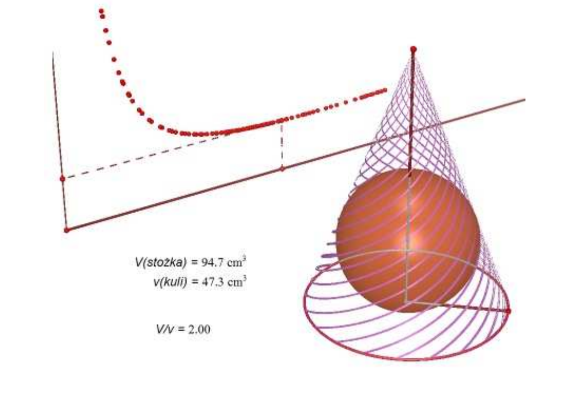
rys. 2

Zadanie to podobnie jak poniższe dwa inne zadania rozwiązuje się przy użyciu rachunku różniczkowego, który nie jest już obecny w programie szkoły średniej.

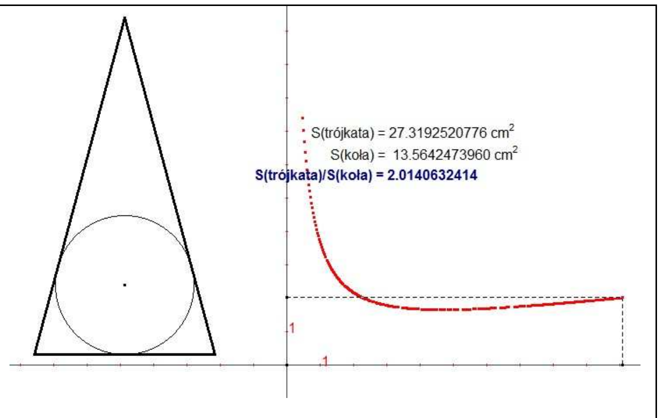
Zadanie 3 i 4

W stożek o zmieniającej się wysokości i stałym promieniu R podstawy umieszczono kulę. Kiedy stosunek objętości stożka do objętości kuli jest najmniejszy?

Podobnie – ***kiedy stosunek pola trójkąta równoramiennego o stałej podstawie do pola koła wpisanego w ten trójkąt jest minimalna?***



rys. 3



rys. 4

Rola programów Cabri w tych zadaniach nie polega na ich rozwiązaniu, lecz na wizualizacji tego rozwiązania i zweryfikowania go z pewnym przybliżeniem.

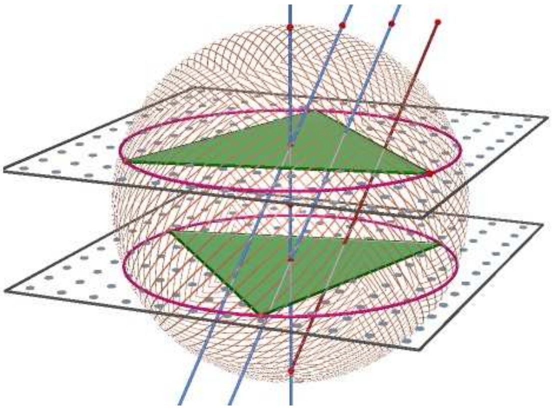
Sześcian uczniowie oglądają najczęściej w postaci rzutu ukośnego. Takie rzuty preferują podręczniki i takie rzuty są najłatwiejsze do kreślenia. Ale z wielu powodów warto kreślić sześcian w pozycji diagonalnej, czyli takiej, w której jego główna przekątna jest ustawiona pionowo. Uczniom może sprawić trudność wykreślenie takiego sześcianu, ale warto, by posiedli tę umiejętność.

Zacznijmy od rozwiązania problemu:

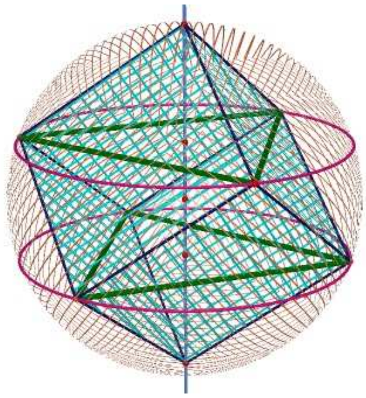
Zadanie 5.

Wykreśl sześcian wpisany w kulę.

. To zadanie to analogia do wpisania kwadratu w koło. A jednak heurystyka zadania dwuwymiarowego nie przydaje się do niczego. Zauważmy, że po podzieleniu głównej przekątnej na trzy równe odcinki otrzymamy takie punkty przekątnej, że jeśli poprowadzimy przez nie płaszczyzny prostopadłe do tej przekątnej, to w przecięciu ich z kulą, przechodzącą przez końce przekątnej otrzymamy dwa trójkąty równoboczne symetryczne środkowo względem środka przekątnej – rys. 5. Po połączeniu odpowiednio ich wierzchołków i końców przekątnej otrzymamy diagonalny rzut sześcianu – rys. 6.



rys. 5



rys. 6

A teraz kolejny problem:

Zadanie 6.

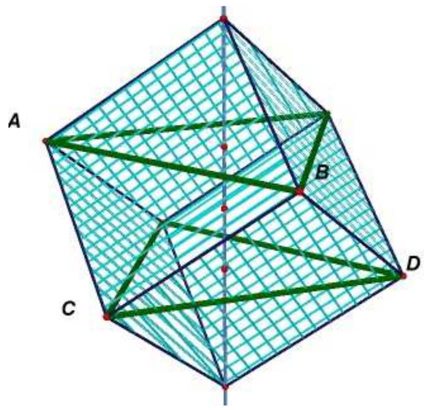
Wyznacz odległość dwóch skośnych przekątnych sąsiednich ścian sześcianu.

Takimi przekątnymi dwóch sąsiednich ścian sześcianu są odcinki *AB* i *CD* na rysunku 7. Widać wyraźnie, że odległość tych przekątnych to 1/3 długości przekątnej sześcianu.

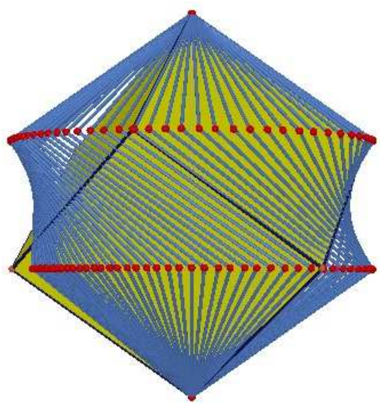
Zadanie 7

Co zobaczymy, gdy wprowadzimy sześcian diagonalny w obrót wokół jego przekątnej?

Powstanie pewna bryła obrotowa. Na to pytanie uczniowie najczęściej odpowiadają dwa stożki i jeden ścięty. Okazuje się, że dwa stożki faktycznie uzyskamy z czworościanów odciętych z sześcianu płaszczyznami. Natomiast środkowa część sześcianu stanowiąca ośmiościan środkowosymetryczny (ale nie foremny) w wyniku obrotu pozostawi ślad w postaci powierzchni zwanej w matematyce hiperboloidą jednopowłokową – rys. 8.

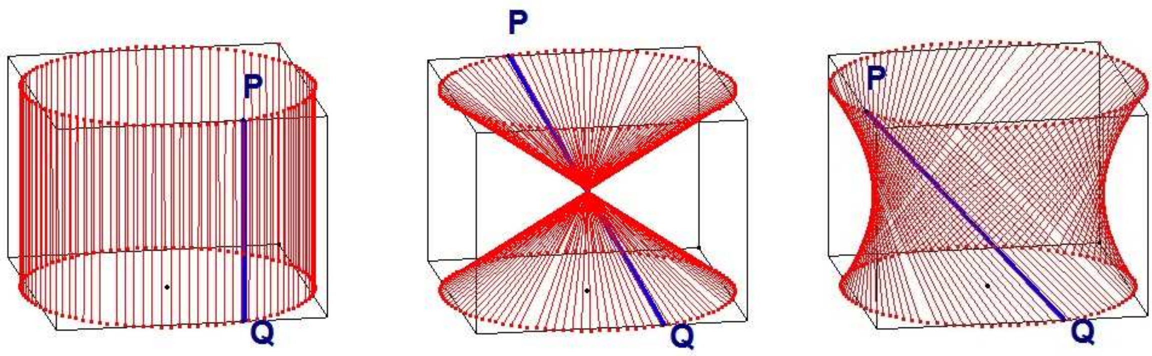


rys. 7



rys. 8

Skąd wzięła się taka powierzchnia? Wystarczy wykonać pewne doświadczenie, np. w programie Cabri II Plus, które wyraźnie przekonuje nas, że nie może to być stożek ścięty. Jeśli końce odcinka leżące na brzegu dolnej i górnej ściany sześcianu obracającego się wokół osi przechodzącej przez środki jego dolnej i górnej ściany, będą leżeć równolegle do osi obrotu, to ślad tych odcinków wykreśli powierzchnię boczna walca (rys. 9a), jeśli będzie przecinać oś obrotu – stożek (rys. 9b), a jeśli będzie skośny do osi obrotu – hiperboloidę jednopowłokową (kształt klepsydry piaskowej – rys. 9c). Tak więc nie każdy odcinek obracający się wokół pewnej prostej wykreśla stożek, czego uczniowie nie zawsze są świadomi.



rys. 9 a, b, c

Bardzo wdzięcznym tematem dla ucznia szkoły ponadgimnazjalnej może być poznawanie za pomocą programu Cabri 3D rodzin wielościanów i ich własności, które powstają na bazie znanych uczniowi wielościanów foremnych, zwanych platońskimi.

Wielościany platońskie są opcjonalnie zainstalowane w programie Cabri 3D

Narzędzie odcinania z danego wielościanu jego części po wcześniejszym jej wyznaczeniu przez dowolny przekrój tego wielościanu może rodzić pytanie:

Zadanie 8

Jakie wielościany i ile można uzyskać z wielościanów foremnych przez takie ich rozcięcia, które dają w wyniku wielokąty foremne, niekoniecznie tego samego rodzaju.

Takich wielościanów jest dokładnie trzynaście (czternasty jest enancjomorficzny z trzynastym) i te znane już były Archimedesowi. Jeśli uczeń za pomocą rozcięć odnajdzie ich choćby połowę, to zrobi spory krok naprzód w poszerzeniu swojej wiedzy o wielościanach. Ponieważ wielościany te są wypukłe, można przy okazji sprowokować uczniów do odkrycia wzoru Eulera: $W + S - K = 2$ (gdzie W – ilość wierzchołków, S ilość ścian, a K - krawędzi).

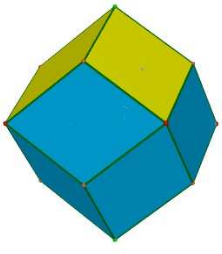
rys. 10

Uczniowie przy pomocy programu Cabri 3D mogą pod kierunkiem nauczyciela odkrywać inne klasy wielościanów i ich stelacji.

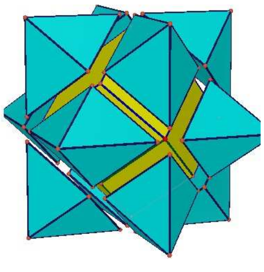
Stelacje wielościanu powstają w wyniku przedłużenia jego ścian aż do momentu przecięcia. Historia matematyki zna niemal dwieście lat liczącą dyskusje nad ilością stelacji dwudziestościanu foremnego, których liczbę 59 stelacji zamknięto w 1938 r.

Jeśli znajdzie się uczeń, który lubi tematykę wielościanów, ma ochotę je sklejać, posiada wyobraźnię przestrzenną i dużo wytrwałości, to warto go zainteresować dwunastościanem, jego własnościami i czterema stelacjami odkrytymi w 1947 roku przez **Luke Dormana**. Tematyka zajęć może być realizowana w takiej kolejności:

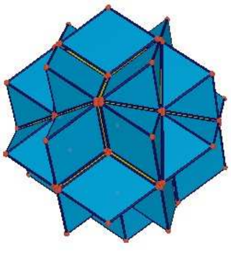
- uzyskanie z sześcianu (a potem również z ośmiościanu) dwunastościanu rombowego (wielościan odkryty w 1609 r przez Johannesa Keplera),
- skonstruowanie go w programie CABRI 3D kilkoma sposobami: jako sumę rombowych ścian, jako zamknięty wielościan, jako suma sześcianu i odpowiednich ostrosłupów,
- wyznaczenie jego siatki i sklejenie,
- poszukiwanie róznych rozcięć dwunastościanu rombowego i uzyskanie z nich kilku interesujących puzzli do składania (odkrycie autora artykułu z 1995 roku),
- rozkład czworościanu foremnego na cztery przystające czworościany – w programie Cabri 3D i na sklejonym modelu dynamicznym,
- uzyskanie dwunastościanu rombowego z ośmiościanu foremnego i dwóch czworościanów rozkładających się na cztery przystające czworościany – na komputerze i na modelu dynamicznym (odkrycie rosyjskich matematyków w 2005 roku),
- próba stelacji dwunastościanu rombowego i odkrycie, które w 1947 dokonał Luke Dormann,
- poszukiwanie kolejnych dwóch stelacji dwunastościanu rombowego - również dzieło Dormanna.



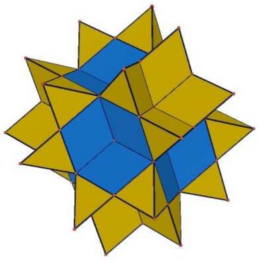
rys. 11



rys. 12



rys. 13

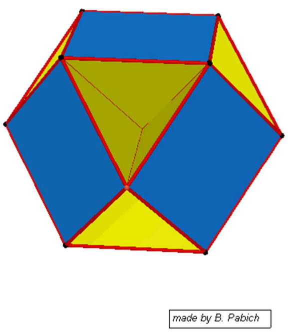


rys. 14

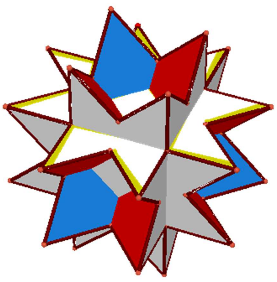
Projekt zamyka się kolekcją kilku interesujących modeli i puzzle 3D (rys. 11-14), które warto umieścić w pracowni matem tycznej, by kształciły następne pokolenia uczniów uzdolnionych i cieszyły ich oko. Okazuje się, że wszystkie bryły Dormanna wykonane są przez sklejenie ze sobą tego samego wielościanu.

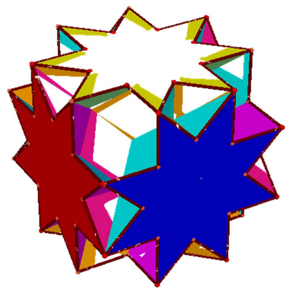
Grupie uczniów zajmującej się tym problemem, można zaproponować powtórzenie tego samego projektu rozpoczynając go tym razem od dwunastościanu foremnego a nie sześcianu. W ten sposób uczniowie odkryją trzydziestościan rombowy a przy okazji całą masę interesujących obiektów 3D.

Innym projektem pracy z uczniem uzdolnionym może być poznanie wielościanów jednorodnych. Ta klasa wielościanów, licząca dokładnie 75, powstaje również z wielościanów foremnych. Tym razem poszukujemy części wielościanu foremnego zawartej między wszystkimi możliwymi kombinacjami przekrojów tego wielościanu, które są wielokątami foremnymi.



rys. 15


rys. 16


rys. 17

Można je stworzyć na bazie czworościanu (tylko 1) – rys. 15, sześcianu (jest ich 9 – rys. 16,17), dwunastościanu (jest ich 43). Pozostałe to znane już 5 platońskich, 13 archimedesowskich i 4 Keplera – Poinsota. W 1975 profesor Uniwersytetu w Cambridge John Skilling udowodnił, że poza 75-ma nie ma więcej wielościanów jednorodnych.

Wielościany omówione tutaj możecie Państwo obejrzeć w wersji wirtualnej na stronie:

www.pabich.interklasa.pl

Wykłady dla uczniów, kursy dla nauczycieli i publikacje serii *CABRISTA* można zamówić również pod adresem internetowym pabich@interklasa.pl