Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ODLEGŁOŚĆ NA POWIERZCHNI WIELOŚCIANU

dr Michał Lorens

28.04.2012

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Podstawowymi pojęciami geometrii euklidesowej są punkt, prosta, płaszczyzna, odległość.

Definicja . Funkcję d, która każdej parze punktów przyporządkowuje liczbę rzeczywistą i dla każdych punktów *A, B, C* spełnia następujące warunki:

1. $d(A,B) \geq 0$,
2. $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,
3. $d(A,B) = d(B,A)$,
4. $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$,

nazywamy odległością.

Odległość w przestrzeni euklidesowej ma jeszcze własność

5. $punkty\ A, B, C\ są\ współliniowe \quad \Leftrightarrow \quad d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$ lub

   $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$ lub $d(B,C) = d(B,A) + d(A,C)$.

Będziemy nazywać tę odległość euklidesową.

Umówmy się, że odległość euklidesową punktu *A* od punktu *B* będziemy oznaczać symbolem $|AB|$.

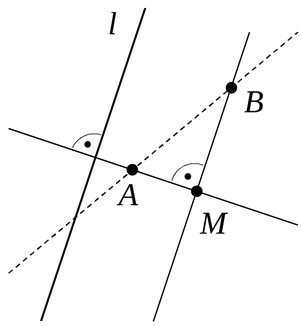
Przykład. Wybierzmy na płaszczyźnie pewną prostą l i określmy funkcję d w następujący sposób:

a) jeżeli $A = B$, to $d(A,B) = 0$,

b) jeżeli $A \neq B$, to $d(A,B) \neq 0$ oraz

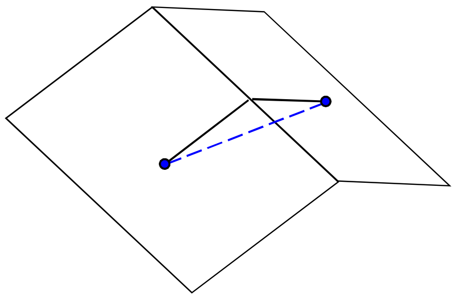
$$d(A,B) = \begin{cases} |AB|, & pr\ AB \parallel l \quad \text{lub} \quad pr\ AB \perp l \\ |AM| + |MB|, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases},$$

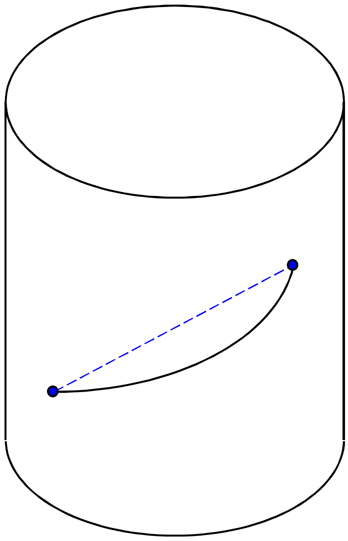
gdzie M jest punktem wspólnym prostej przechodzącej przez A i prostopadłej do l oraz przechodzącej przez B i równoległej do l.

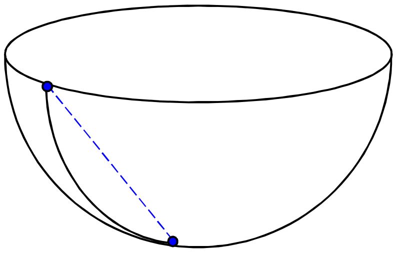


Tak zdefiniowana funkcja jest odległością na płaszczyźnie (spełnia warunki 1, 2, 3, 4). Odległość ta nie jest odległością euklidesową (nie spełnia warunku 5).

Odległość punktów należących do dowolnej figury geometrycznej możemy mierzyć po euklidesowemu, jednak ten sposób mierzenia nie zawsze jest najlepszy.







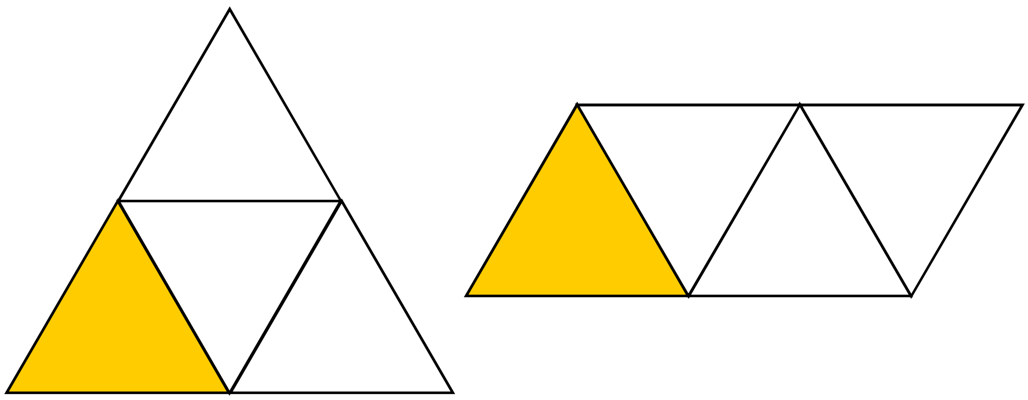
Do mierzenia odległości w otaczającej nas przestrzeni fizycznej możemy używać
np. nitki. Za pomocą nitki moglibyśmy mierzyć odległość punktów na modelu sfery. Gdybyśmy chcieli to zrobić „po euklidesowemu”, to musielibyśmy ten model niszczyć. Zatem odległość euklidesowa nie jest z pewnością dobrą odległością na sferze. Dobrą odległość, mierzoną na sferze, wyznaczają łuki okręgów wielkich przechodzących przez dwa różne punkty sfery.

Przez każde dwa różne punkty płaszczyzny (przestrzeni) przechodzi dokładnie jedna prosta i odcinek tej prostej jest najkrótszą krzywą łączącą te punkty. Na sferze każde dwa różne punkty, które nie są antypodyczne, wyznaczają dokładnie jeden okrąg wielki tej sfery. Punkty dzielą okrąg wielki na dwa łuki i mniejszy jest najkrótszą krzywą łączącą te punkty. Jeśli punkty są antypodyczne, to przez te punkty przechodzi nieskończenie wiele okręgów wielkich. W tym przypadku mamy też nieskończenie wiele „najkrótszych” krzywych łączących te punkty.

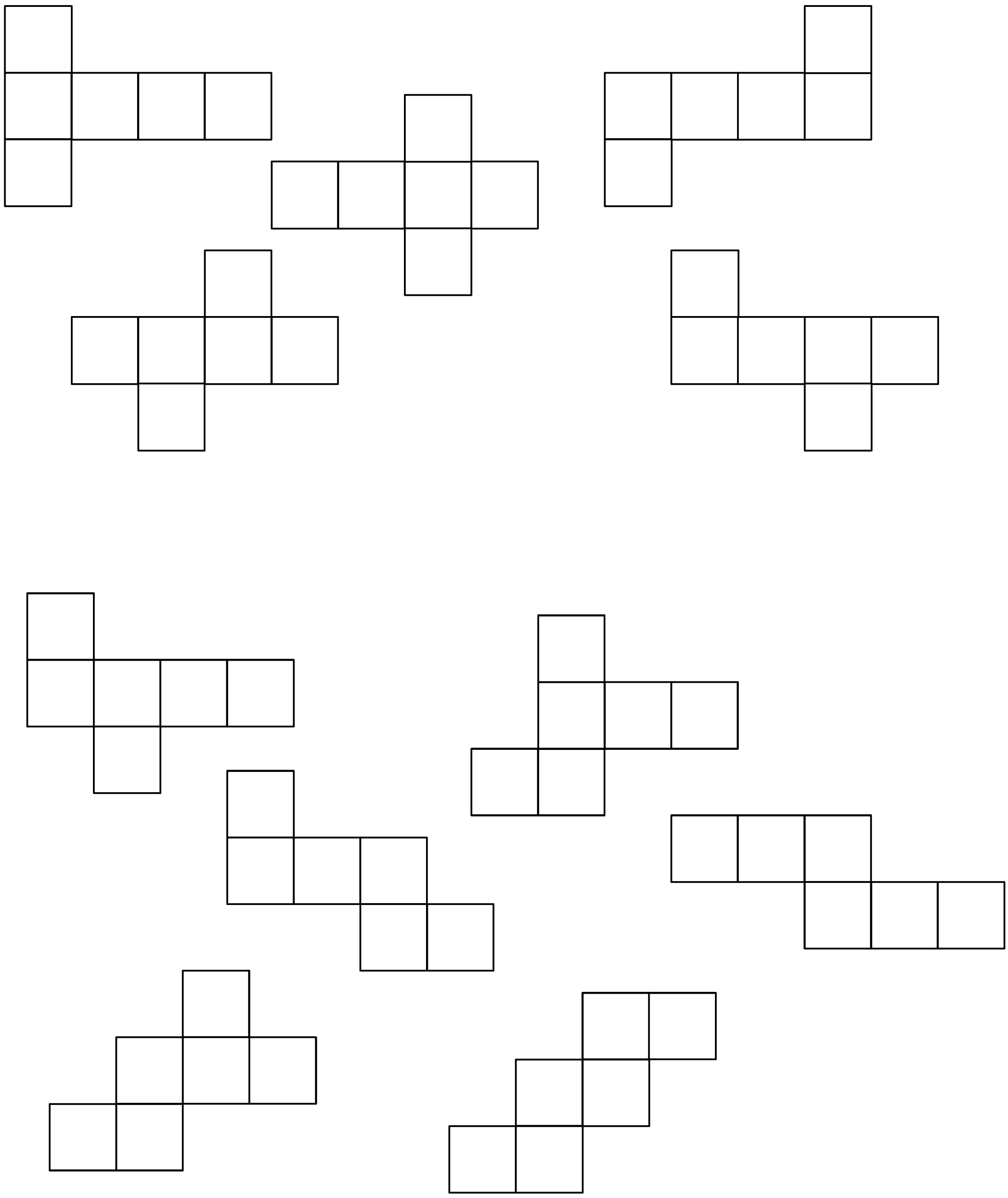
Najkrótszą linię, leżącą na powierzchni i łączącą dwa różne punkty należące do niej nazywamy **ortodromą** lub **linią geodezyjną** tej powierzchni.

Wiemy, że najkrótszą krzywą łączącą dwa różne punkty na płaszczyźnie jest odcinek linii prostej wyznaczonej przez te punkty. Najkrótszą krzywą łączącą dwa różne punkty na sferze jest odpowiedni łuk okręgu wielkiego wyznaczonego przez te punkty. Zatem na płaszczyźnie ortodromami są odcinki linii prostych, na sferze - łuki okręgów wielkich.

Rozważmy teraz dowolny wielościan wypukły. Każde dwa różne punkty powierzchni wielościanu można połączyć łamaną zwyczajną . Jeżeli punkty *A*, *B* należą do jednej ściany, to najkrótszym połączeniem jest odcinek *AB*. Gdy punkty należą do sąsiednich ścian, to najkrótszym połączeniem zawartym w powierzchni wielościanu nie może być odcinek. Najkrótszym połączeniem będzie pewna łamana o dwóch segmentach i końcach *A*, *B*. Jeżeli punkty należą do różnych ścian (niekoniecznie sąsiednich), to najkrótszym połączeniem będzie jakaś łamana o co najmniej dwóch segmentach. Spróbujemy zobaczyć jakie krzywe są najkrótszymi połączeniami dwóch różnych punktów (ortodromami) na powierzchni czworościanu foremnego i sześcianu. Przy rozwiązywaniu tych problemów będziemy wykorzystywać siatki wielościanów. Czworościan foremny ma dwie różne siatki,

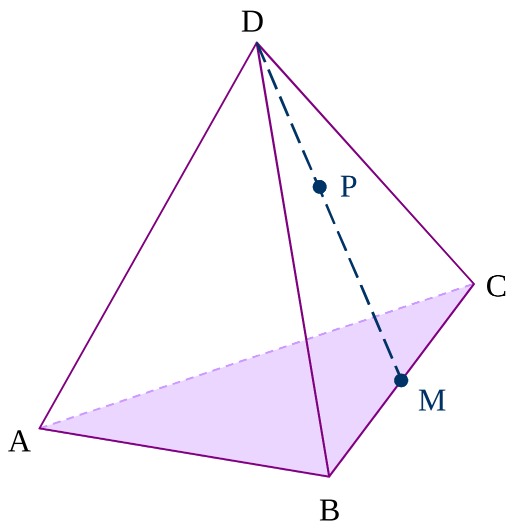


a sześcian – jedenaście.

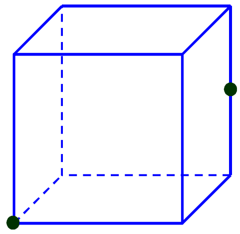


Zadanie 1. Wyznaczyć najkrótszą drogę na powierzchni czworościanu foremnego
o krawędzi długości a, która łączy wierzchołek czworościanu z środkiem ciężkości przeciwległej ściany.

Zadanie 2. Punkt *M* jest środkiem krawędzi *BC* czworościanu *ABCD*, a punkt *P* należy do odcinka *MD*. Zbadać liczbę najkrótszych połączeń punktów *A* i *P*, gdy punkt porusza się po odcinku *MD*.



Zadanie 3. Wyznaczyć najkrótsze drogi łączące wierzchołek sześcianu ze środkiem przeciwległej krawędzi tego sześcianu.



Zadanie 4. Wyznaczyć najkrótsze drogi łączące dowolne dwa różne wierzchołki sześcianu.

Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie: ***„Jak mierzyć odległość punktów na powierzchni wielościanu?”***

Niech *A*, *B* będą dowolnymi punktami powierzchni wielościanu (czworościanu foremnego lub sześcianu). Oznaczmy symbolem $Ł_{AB}$ zbiór wszystkich łamanych zwyczajnych, o końcach *A*, *B*, zawartych w powierzchni wielościanu. Przyjmijmy, że

$$d(A,B)=\begin{cases} 0, & A=B \\ \inf\limits_{k\in Ł_{AB}} |k|, & A\neq B \end{cases},$$

($|k|$ oznacza długość łamanej *k*).

Tak określona funkcja jest **odległością na powierzchni wielościanu** (spełnia warunki 1, 2, 3, 4). Łatwo zauważyć, że

1. Jeżeli punkty *A*, *B* należą do jednej ściany wielościanu, to $d(A,B)=|AB|$.
2. Jeżeli punkty *A*, *B* należą do różnych ścian wielościanu, to $d(A,B)>|AB|$.

Zadanie 5. Krawędź czworościanu foremnego ma długość a. Jaka jest odległość na powierzchni czworościanu środków ciężkości dwóch jego ścian? Jaka jest odległość euklidesowa tych środków?

Literatura

1. W. Krysicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, Z geometrią za pan brat, Iskry, Warszawa 1992.
2. H. Steinhaus, Kalejdoskop matematyczny, WSiP, Warszawa 1989.