Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Różne sposoby wspomagania twórczości matematycznej uczniów dzisiaj i w przeszłości

dr Stanisław Domoradzki

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Co to znaczy „umieć matematykę”

- W poglądach nauczycieli na matematykę szkolną można znaleźć dwie przeciwstawne opinie na temat ludzkiej aktywności (własnej, jako nauczyciela, i ucznia) na lekcjach matematyki.
- Odpowiadając na pytanie ankietowe: czy każdy uczeń na lekcji matematyki może i powinien być aktywny zdecydowana większość nauczycieli wybierała odpowiedź: tak, każdy uczeń może i powinien.

Co to znaczy „umieć matematykę”

- W innym pytaniu: czy nauczyciel powinien wszystko bardzo dobrze wytłumaczyć, na przykład jak się w dodawaniu przekracza próg dziesiątkowy – zdecydowana większość odpowiedzi była – tak, powinien.
- Takie dwie odpowiedzi chyba są sprzeczne. Jeżeli nauczyciel wszystko ma wytłumaczyć, to gdzie jest miejsce na aktywność własną ucznia? Kto ma być przede wszystkim aktywny na lekcji? Na czym ma polegać aktywność nauczyciela, a na czym aktywność ucznia.

Stanisław DOMORADZKI
Wyższa Szkoła Pedagogiczna, R z e s z ó w

EVARISTE GALOIS

(1811- 1832)

„gwiazda niesłychanej jasności"

Piękną, wzruszającą myśl Menandera „Wybrańcy bogów umierają młodo" cytuje i wykorzystuje w tytule biograficznej książki o Evaryście Galois Leopold Infeld. Wydaje się, że myśl ta znakomicie charakteryzuje Evarysta Galois, którego Feliks Klein nazywa „gwiazdą niesłychanej jasności". Gwiazda ta świeciła bardzo krótko. Można znaleźć u różnych autorów piszących o matematyce pytania, co by się stało z matematyką XIX wieku, gdyby Galois żył dłużej. Czy byłaby „zdominowana" przez Gaussa ? jakimi drogami przebiegałby jej rozwój ? Spróbujemy prześledzić to krótkie, a zarazem burzliwe życie, prześledzić to, jak pisze I.L.Alperin w [5], wyjątkowe zjawisko.

Evaryst Galois urodził się 25 października 1811 roku w miasteczku Bourg-la-Reine nieopodal Paryża (po rewolucji nazwa miasteczka została zmieniona na Bourg-l'Egalitê - miasto równości). Ojciec Evarysta - Mikołaj Gabriel Galois był liberałem, przez 15 lat piastował urząd mera w Bourg-la-Reine. Matka - Maria Adelaida Demant pochodziła z rodziny, w której tradycyjnie mężczyźni studiowali prawo. Kiedy M.G.Galois ożenił się z M.A.Demant zamieszkali w domu Mikołaja przy głównej ulicy miasteczka pod numerem 54. W tym miejscu 13 czerwca 1909 roku odsłonięto tablicę pamiątkową z napisem: „Tu urodził się Evariste Galois, znakomity francuski matematyk, który zmarł w wieku 20 lat (1811-1832)". W Bourg-la-Reine na miejscowym cmentarzu pochowani są wszyscy z rodziny E. Galois, oprócz niego.

Pierwszym nauczycielem Evarysta była jego matka, rozumna, dobrze wykształcona kobieta. W listach E. Galois nie ma jednak o niej żadnych wzmianek. Charakter jego stosunku do matki jest do tej pory nie jasny. Natomiast wiemy, że bardzo cenił ojca. Miał się wyrazić wobec jednego ze współtowarzyszy w więzieniu Św. Pelagii, że ojciec jest dla niego wszystkim.

O dzieciństwie Galois wiadomo mało, rodzina twierdzi, że był zdolnym, poważnym i serdecznym dzieckiem. Mówiono, że chłopiec ten "miał charakter". W październiku 1823 roku, kiedy miał dwanaście lat, został przyjęty do Liceum Ludwika Wielkiego. Wspominał ten okres bardzo źle. Najchętniej chciałby być zawsze jak najdalej od tego miejsca. Gdy miał 15 lat odkrył dla siebie matematykę. Będąc w drugiej klasie liceum zaczął uczęszczać na nieobowiązkowe zajęcia z tego przedmiotu. Wtedy zetknął się z podręcznikiem Legendre'a "Eléments de geométrie". Następnie zapoznał się z "Traité de trigonométrie" tego samego autora. Poznał też dzieło Lagrange'a "Résolution des équations numeriques". Według A. Dalmas [1] "Geometria" Legendre'a była dla Galois podręcznikiem gramatyki nowego języka matematyki, zaś praca Lagrange'a spełniała rolę zbioru zadań. Warto wspomnieć o tym, że we Francji dość wcześnie, bo już w XIV wieku szkolne wykłady z geometrii znacznie odbiegały od "Elementów" Euklidesa. Bliski "Elementom" był właśnie podręcznik Legendre'a "Eléments de geométrie". Trudny styl tego podręcznika spowodował jednak małą jego popularność.

Galois w dalszym ciągu pogłębiał swoje studia matematyczne. Zapoznał się już z niektórymi pracami Eulera, Gaussa i Jacobiego. Te pogłębione studia matematyczne obudziły w nim zdolność przewidywania głównych zadań nauki. W pozostawionych zapiskach czytamy, że przyjdzie taki moment, w którym matematycy będą umieli przewidywać przekształcenia algebraiczne i że strata czasu oraz ołówka na ich staranne przeprowadzenie nie będzie się opłacała. Stawia zadania przyszłej matematyce - podporządkować wyliczenia swojej woli, pogrupować matematyczne operacje, nauczyć się je klasyfikować według stopnia trudności, a nie według zewnętrznej postaci [1].

W końcu roku szkolnego 1827/28 samodzielnie przygotowywał się do egzaminów wstępnych do École Polytechnique. Niestety wynik egzaminu był niepomyślny. Egzaminował go profesor Lefebre, autor kilkunastu podręczników matematyki, z których według opinii francuskich historyków nauki nikt nie korzystał. Pomimo porażki w październiku 1828 roku został przeniesiony w Liceum Ludwika Wielkiego z klasy matematyki elementarnej do klasy specjalnej z rozszerzonym kursem matematyki. Klasę tę prowadził profesor Richard.

Profesor Richard miał wtedy 33 lata. Od siedmiu lat wykładał matematykę. Wśród tych, których przygotowywał do École Polytechnique byli między innymi U. Leverrie, pierwszy kierujący katedrą mechaniki niebieskiej na Sorbonie, i znakomity matematyk Ch. Hermite. To właśnie temu ostatniemu Richard powierzył rękopisy Galois, które obecnie znajdują się w Bibliotece Paryskiej Akademii Nauk.

Richard to postać ważna w życiu Galois. Rozpoznał geniusz Evarysta i zachęcał do pracy. To on podsunął mu do czytania prace Abela z "Journal für reine und angewandte Mathematik". Galois przejął się losami Abela i bardzo wysoko ocenił jego prace. W pozostawionych zapiskach można znaleźć zdanie dotyczące Abela:

„Oczywiście nie chcę siebie porównywać z tym znakomitym matematykiem".

Richard w pozostawionych notatkach [2] wyrażał się o Galois następująco:

„Galois pracuje tylko nad najtrudniejszymi problemami z dziedziny matematyki".

„On znacznie odbiega zdolnościami od swoich kolegów".

Stosunki Richarda i Galois pogorszyły się, gdy Richard dowiedział się, że Galois sympatyzuje z republikanami. Dał temu wyraz oceniając Galois już do końca pobytu w szkole notą, której używał dla dobrych uczniów:

„Sprawowanie się dobre - pracuje zadowalająco".

Zachowała się także ocena Galois wyrażona przez innego nauczyciela [2]:

„Był uczniem niesumiennym znającym lekcję perfekcyjnie lub był zupełnym ignorantem w temacie, którego nie lubił".

Wydaje się bardzo trafną ta ocena Galois. Zdaniem F. Kleina Galois jest przykładem na to, że u Francuza geniusz może łączyć się z nieopanowanym temperamentem.

Prof. Richard pomógł opublikować Galois jego pierwszy artykuł pt. "Démonstration d'un théorème sur les fractions continues periodiques" na łamach Annales de mathématique de M. Gergonne. Również Richard poradził Galois zredagować przedstawioną mu ustnie pracę dotyczącą rozwiązywalności równań algebraicznych i wysłać ją do Akademii Nauk. Niestety rękopis ten zaginął. Prawdopodobnie A. Cauchy "zagubił" go, jak również wcześniej rękopis Abela. Ciekawie sprawę zagubienia rękopisów przedstawia w [2] L. Infeld. Trudno byłoby teraz dociec, czy Cauchy rzeczywiście postąpił tak jak sugeruje Infeld, iż mogło to nastąpić ze względów politycznych.

Nasuwa się pytanie, dlaczego Jacobi i Gauss nie zajęli się pracami Galois, chociaż w liście (o którym będzie jeszcze mowa) do A. Chevaliera Galois prosi o to.

W lipcu 1829 roku E.Galois powtórnie przygotowuje się do egzaminów wstępnych do École Polytechnique. Zapewne wybrałby "Mathématiques speciales" (właściwe studia matematyczne), gdzie matematykę wykładano 16 godzin tygodniowo. Prowadzono wykłady m.in. z geometrii, mechaniki, rachunku różniczkowego i całkowego. Egzamin do tej szkoły był konkursowy. Można było uzyskać maksymalnie 2000 punktów. Jako ciekawostkę odnotujmy rekord Hadamarda. Wynosi on 1875 punktów. Niestety Galois ponownie nie zdał egzaminu. Tym razem egzaminował go profesor Dinet. Powiadano, że oburzony Galois nie chciał odpowiadać na oczywiste pytania egzaminatora i rzucił w niego gąbką. Tym faktom zaprzecza Bertrand. Twierdzi, że jest to tylko anegdota. Na pewno jednak nie bezpodstawna. Profesor Sierpiński napisał, że Galois pogardzał ludźmi, ponieważ nie był rozumiany (W.Sierpiński: Zasady algebry wyższej, Warszawa 1951, wyd. II, str. 374).

W lutym 1830 r. za radą Richarda Galois rozpoczął studia w École préparatoire (dawna École normale, zmiana nazwy nastąpiła w 1822 roku). Egzaminator z matematyki zanotował:

„Student ten czasami wyraża swe myśli w sposób niezrozumiały, jest jednak inteligentny i wykazuje uderzające zdolności do pracy naukowo-badawczej. Poinformował mnie o pewnych nowych wynikach, jakie osiągnął w dziedzinie analizy stosowanej".

Egzaminator z fizyki napisał:

„Jest to jedyny student, który stale źle odpowiada na moje pytania. Nie ma o niczym pojęcia. Słyszałem, że ma jakby zdolności do matematyki, co oczywiście zdziwiło mnie. Sądząc po wynikach egzaminu, wykazuje słabą inteligencję albo też tak ją starannie ukrywa, że nie mogłem się jej doszukać. Wątpię aby kiedykolwiek mógł być dobrym nauczycielem".

W École préparatoire Galois zaprzyjaźnił się z Augustem Chevalierem. Chevalier był saintsimonistą. Nie udało mu się przekonać Galois do idei saintsimonizmu. Idea - "od każdego według jego zdolności, każdemu według jego pracy" wydawała się Galois nazbyt wielkoduszną. Niemniej jednak Chevalier spowodował, że Galois ostrzej dostrzegał polityczne problemy współczesności.

W École préparatoire Galois nie czuł się najlepiej, a to przede wszystkim za sprawą dyrektora Guigniault'a. Kiedy z okazji 100-lecia École normale francuski historyk J.Simon pisał o tej uczelni, nazwał dyrektora Guigniault'a głupcem i ograniczonym człowiekiem,

Różne sposoby wspomagania twórczości matematycznej uczniów dzisiaj i w przeszłości

- Jak widać z powyższego tekstu praca z wyjątkowo uzdolnionym uczniem może być bardzo trudna. Tak jak w przypadku Galois.
- Ale nie musi. Nas genialny matematyk Stefan Banach udzielał korepetycji. Potem to doświadczenie wykorzystał w pisaniu podręczników.

Stefan Banach (1892-1945)

- Genialny polski matematyk, współtwórca sukcesów Lwowskiej Szkoły Matematycznej

Stefan Banach

- Polecam serdecznie nową biografię Banacha: *Stefan Banach Niezwykłe życie i genialna matematyka*. Materiłąy biograficzne pod redakcją Emilii Jakimowicz i Adama Miranowicza, Oficyna wydawnicza, Impuls 2009.

STEFAN BANACH
Niezwykłe życie i genialna matematyka

Materiały biograficzne pod redakcją
Emilii Jakimowicz i Adama Miranowicza

Podręczniki sław matematyki polskiej

- W latach trzydziestych XX wieku ukazała się w Polsce seria podręczników szkolnych pisanych przez Stefana Banacha przy współautorstwie Włodzimierza Stożka i Wacława Sierpińskiego.
- Podręczniki dla szkół powszechnych i gimnazjów były dostosowane
  do przeprowadzonej w Polsce reformy Jędrzejewicza (ministra Wyznań religijnych
  i Oświecenia Publicznego w latach 1931 – 1934) z lat 1932 – 1933, a swoimi treściami odpowiadają w dużej części dzisiejszemu programowi szkoły podstawowej
  i gimnazjum.

Podręczniki sław matematyki polskiej

Pisali podręczniki do szkoły powszechnej i gimnazjum.

Napisane przez Banacha podręczniki nie były kopiowaniem cudzych książek, odznaczają się jasnością i przejrzystością wykładu. O dużej i trwałej wartości podręczników świadczy fakt kilkakrotnego ich wznawiania po wojnie.

Dzięki swoim doświadczeniom korepetytora Banach rozumiał doskonale trudności, na jakie napotyka młody człowiek studiujący matematykę. *„Uważał, że matematyka jest narzędziem zbyt ostrym dla niedojrzałych chłopców”*

Podręczniki sław matematyki polskiej

- Autorzy wprowadzanie pojęć mają przemyślane w kontekście tworzenia się w umysłach pojęć matematycznych. Zobaczmy to na przykładzie podziału odcinków w danym stosunku.

Podręczniki sław matematyki polskiej

- Tekst z podręcznika:
- *Mówimy, że kilka odcinków np. a, b, c, d (rys10) są do siebie w stosunku jak liczby 2, 3, 5, 4 ½ jeżeli wykładnik stosunku dwóch liczb równa się ilorazowi odpowiednich liczb.*

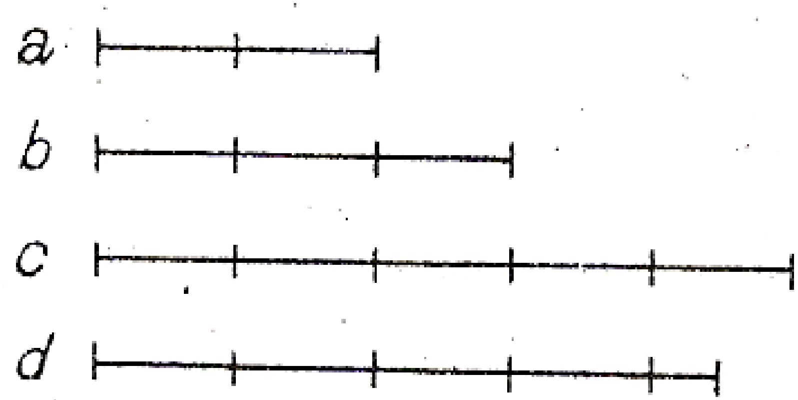
Podręczniki sław matematyki polskiej

- Komentarz:

  Światy arytmetyczny i geometryczny się przenikają. Wykładnik zdefiniowany jest wcześniej (s. 36), *wskazuje on jakim ułamkiem drugiego odcinka jest ułamek pierwszy.* Po kilku przykładach związanych z długościami następuje uwaga: *to samo odnosi się do innych wielkości, jak pola objętości, ciężary itp.*

Podręczniki sław matematyki polskiej

- Rysunek (mamy wizualizację i geometryzację)



Podręczniki sław matematyki polskiej

Dalszy tekst:

A więc a:b=2:3, a:c=2:5, c:d=5: itd.

Komentarz: Pokazany jest proces, który uczeń może sam, bądź z pomocą nauczyciela powtórzyć.

Podręczniki sław matematyki polskiej

Dalszy tekst:

A więc $a:b=2:3$*,* $a:c=2:5$*,* $c:d=5: 4\,\frac{1}{2}$ *itd.*

Zapisujemy to: $a:b:c:d=2:3:5:4\,\frac{1}{2}$.

Uwaga. Pomnóżmy liczby 2,3,5, 4 ½ przez jakąkolwiek liczbę (różną od zera) np. przez 2. Otrzymamy liczby 4, 6, 10, 9. Oczywiście iloraz odpowiednich liczb nie zmieni się . Mamy bowiem 2:3=4:6, 3: 4 ½ =6:9 itd. Możemy więc zapisać $a:b:c:d= 4:6:10:9$

Podręczniki sław matematyki polskiej

Komentarz:

Autorzy prowadzą myśl ucznia, przestrzegają przed popełnieniem błędów po to, aby uczeń mógł się wykazać.

Podręczniki sław matematyki polskiej

Po takim wprowadzeniu następuje seria zadań dotycząca podziału w danym stosunku. Autorzy proponują najpierw zadania geometryczne (długość, pola), potem ciężary, następnie następuje seria zadań związanych z wykorzystaniem matematyki wżyciu codziennym:

Podręczniki sław matematyki polskiej

- *Dwóch rolników wynajęło łąkę za 1400 zł. Jeden z nich wypasał na tej łące 36 wołów, drugi zaś 27 wołów; ile każdy z nich powinien zapłacić za łąkę?*
- *Ktoś przekazał w testamencie 5160 zł na pokrycie swych zobowiązań, a winien był jednemu 2400 zł, drugiemu 2800 zł, trzeciemu 3400 zł. Jak należy między nich 5160 zł rozdzielić?*

Podręczniki sław matematyki polskiej

- *Największymi stawami w Tatrach są Wielki Staw (pow. 34 ha), Morskie Oko (pow. 21ha). Przedstaw graficznie stosunek powierzchni tych stawów. (Podstawę całego prostokąta, uzmysławiającego powierzchnię tych trzech stawów, należy podzielić na 34+33+21 tj. 88 równych części. Wygodnie jest więc obrać podstawę długości np. 88 mm).*

Kultura matematyczna

- Kultura matematyczna w wymiarze jednostkowym oznacza uznanie dla matematyki jako pewnej działalności intelektualnej, w szczególności opanowania niektórych technik rachunkowych, rozumienia idei dowodzenia, konieczności wyraźnego definiowania pojęć, a nawet postrzegania piękna matematyki.

Kultura matematyczna

W wymiarze społecznym kultury matematyczne jednostek składają się na kulturę matematyczną społeczeństwa. Jej wyrazem jest powszechne stosowanie technik intelektualnych takich jak: abstrahowanie, schematyzowanie, uogólnianie, porównywanie, dostrzeganie analogii, porządkowanie, klasyfikowanie, definiowanie, argumentowanie, algorytmizowanie, optymalizowanie.

Kultura matematyczna

- Dla M. Kordosa *kultura matematyczna polega* na *umiejętności zobaczenia w rozważanym problemie nieistniejących obiektów matematycznych, które jednak zdumiewająco skutecznie pozwalają się z tym problemem uporać*.
- Jak zauważa R. Duda: *Matematyka jest elementem kultury, a przeto szukając jej źródeł rozsądną wydaje się rzeczą zacząć od dziejów kultury i tam starć się odkryć pierwotne źródła matematycznego myślenia.*

Kultura matematyczna

M. Kordos, *Zobaczyć to czego nie widać, czyli kultura matematyczna w praktyce,* Wydawnictwo ”Aksjomat”, Toruń, 2009.

Kultura matematyczna

- Składniki kultury matematycznej potrzebne nauczycielowi i uczniowi:
- Zdobycie sprawności matematycznej
- Zrozumienie ciągłego przejścia w poszczególnych dyscyplinach matematyki i pomiędzy matematyką-nauką i matematyką-przedmiotem nauczania.

Kultura matematyczna

- Zrozumienie języka matematyki
- Umiejętność wybierania odpowiednich metod przy rozwiązywaniu zadań
- Posiadanie dobrej wyobraźni przestrzennej
- Opanowanie techniki obliczeń
- Opanowanie umiejętności wprowadzania pojęć

Kultura matematyczna

- Możliwość uprawiania w pewnym stopniu twórczości matematycznej
- Postrzeganie piękna matematyki

Przykłady

- Znaleźć pole dwunastokąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu r.

Przykłady

Monika

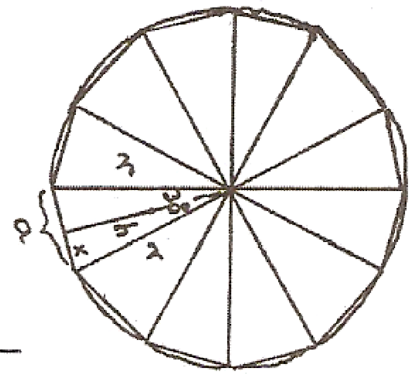
$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 30^\circ$$

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 2r^2 - \frac{\cancel{2}r^2\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$a^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3} = r^2(2-\sqrt{3})$$

$$\underline{a = \sqrt{r^2(2-\sqrt{3})} = r\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$$



$$h^2 + \left(\overset{x}{\frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}\right)^2 = r^2 \qquad x = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$h^2 = r^2 - \frac{2r^2 - r^2\sqrt{3}}{4}$$

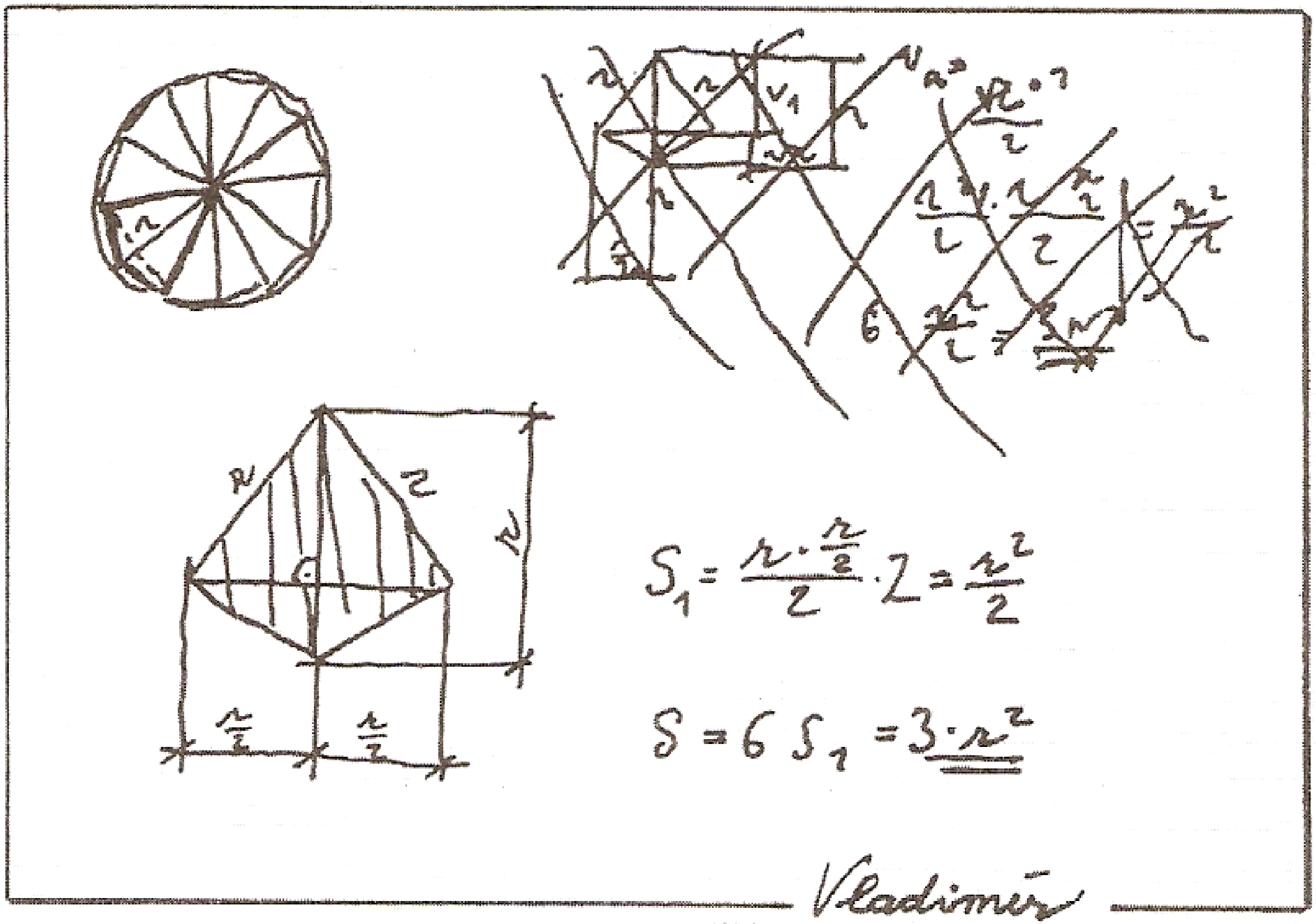
$$h^2 = \frac{4r^2 - 2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{r^2(2+\sqrt{3})}{4}} = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

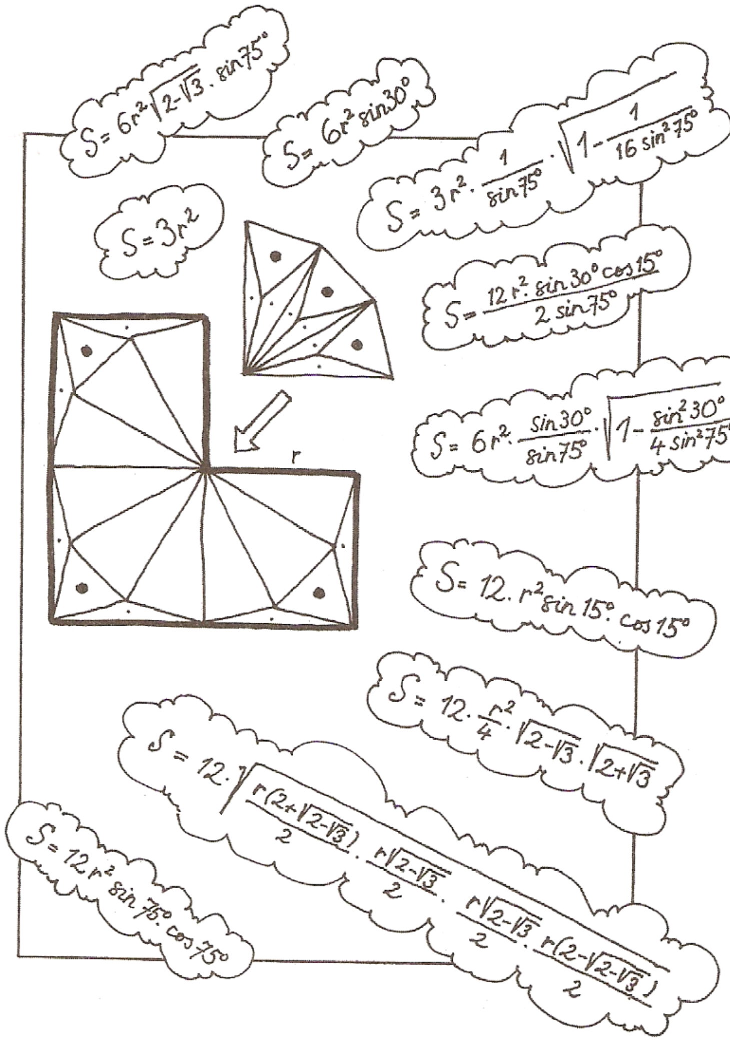
$$12 \cdot \frac{r^2}{4} = \underline{3r^2}$$

$$P_\Delta = \frac{r\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{r^2\sqrt{4-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}}{4} = \frac{r^2\sqrt{1}}{4} = \frac{r^2}{4}$$

Przykłady



Przykłady



$S = 6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sin 75^\circ$
$S = 6r^2 \sin 30^\circ$
$S = 3r^2 \cdot \frac{1}{\sin 75^\circ} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{16 \sin^2 75^\circ}}$
$S = 3r^2$
$S = \frac{12 r^2 \cdot \sin 30^\circ \cos 15^\circ}{2 \sin 75^\circ}$
$S = 6r^2 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 30^\circ}{4 \sin^2 75^\circ}}$
r
$S = 12 \cdot r^2 \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$
$S = 12 \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$
$S = 12 \cdot \sqrt{\frac{r(2+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{r(2-\sqrt{2-\sqrt{3}})}{2}}$
$S = 12 r^2 \sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$

W układzie współrzędnych narysuj zbiór punktów (x,y), dla których jest spełniony warunek:

$$\sin x \cdot \cos y \geq 0$$

Znaleźć rozwiązanie równania

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$$

Przesłanie

- Ważnym jest krzewienie kultury matematycznej już od edukacji wczesnoszkolnej. Formalne pojmowanie matematyki jest bardzo trudne do usunięcia.

Dziękuję za uwagę.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie