



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

Dominik Kwietniak

# W co grać na lekcjach matematyki?

Wykład

Rzeszów, 1 października 2011 r.



# Gry kombinatoryczne

Interesują nas gry

- ▶ dla dwóch graczy, którzy na przemian wykonują ruchy,
- ▶ z pełną informacją,
- ▶ nielosowe (deterministyczne),
- ▶ skończone,
- ▶ (bez remisów).

# Gry kombinatoryczne

## Twierdzenie

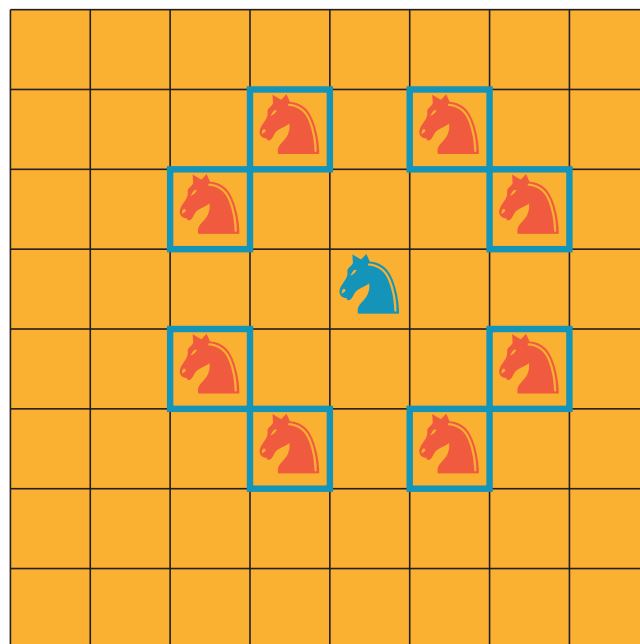
W każdej grze kombinatorycznej bez remisów jeden z graczy ma **strategię wygrywającą**.

## Twierdzenie

W każdej grze kombinatorycznej jeden z graczy ma **strategię nieprzegrywającą**, czyli taką, która gwarantuje mu, że wygra lub zremisuje.

## Strategia wygrywająca — przykład

W grze uczestniczy dwóch graczy. Pierwszy z nich rozpoczyna grę stawiając na dowolnym polu planszy konika szachowego. Drugi wykonuje zgodnym z regułami gry w szachy ruch tym konikiem. Gracze przesuwiają konika na przemian, z tym, że konik nigdy nie może dwa razy znaleźć się na tym samym polu. Wygrywa ten z graczy, który jako ostatni będzie w stanie wykonać przewidziany regułami gry ruch.





## Pseudogry

Dwaj gracze mają do dyspozycji tabliczkę czekolady o wymiarach  $n \times m$ . Gracze na przemian wybierają jeden z dostępnych w danej chwili kawałków czekolady i łamią go wzdłuż linii podziału na kostki na dwie części. Otrzymane w ten sposób dwa kawałki czekolady odkładają z powrotem na stół. Przegrywa ten gracz, który nie może już wykonać nowego ruchu (bo zostały już tylko pojedyncze kostki i nie ma co łamać).

## Kiełki

Na kartce papieru rysujemy pewną skończoną liczbę kropek. Dwaj gracze na przemian rysują nieprzerwane linie w ten sposób, że każda z linii zaczyna się i kończy w jakiejś kropce (może to być ta sama kropka) oraz nie przecina ani sama siebie, ani żadnej innej już narysowanej linii. Maksymalna liczba początków i końców linii, które spotykają się w danej kropce jest równa 3. Po dorysowaniu nowej linii, w dowolnym miejscu gracz dorysowuje nową kropkę leżącą na właśnie dodanej linii. Zauważmy, że do każdej dorysowanej kropki może już tylko dojść jedna nowa linia. Wygrywa ten gracz, który jako ostatni dorysuje nową linie zostawiając taką sytuację na planszy, że drugi gracz nie ma już możliwości wykonania zgodnego z regułami gry ruchu.

## Kiełki brukselki

Na kartce papieru rysujemy pewną skończoną liczbę krzyżyków. Końce tych krzyżyków nazywamy wolnymi. Dwaj gracze na przemian rysują nieprzerwane linie łącząc wolne końce krzyżyków (można łączyć dwa wolne końce tego samego krzyżyka). Nowe linie należy rysować tak, aby nie przecinały one ani samych siebie, ani żadnej innej już narysowanej linii. Po dorysowaniu nowej linii, w dowolnym miejscu gracz dorysowuje dwa ramiona nowego krzyżyka w ten sposób, że utworzone dwa wolne ramiona znajdują się po różnych stronach linii na właśnie dodanej linii. Zauważmy, że do każdej dorysowanej kropki może już tylko dojść jedna nowa linia. Wygrywa ten gracz, który jako ostatni dorysuje nową linie zostawiając taką sytuację na planszy, że drugi gracz nie ma już możliwości wykonania zgodnego z regułami gry ruchu.

## Analiza pozycji wygrywających

Na polu  $a1$  szachownicy ustawiono wieżę. Gracze na przemian wykonują ruchy tą wieżą przesuając ją o dowolnie wybraną liczbę pól w prawo lub do góry. Wygrywa ten gracz, który jako pierwszy postawi wieżę na polu  $h8$ .

## Budowa drzewa gry

Dany jest stos 7 żetonów. Gracze na przemian zdejmują ze stosu 1, 2, lub 3 kamienie. Wygrywa gracz, który zdejmie ostatni kamień.

# Symetrie

Gracze ustawiają na szachownicy gońce, tak, aby żadne dwa się nie biły. Wygrywa ten gracz, który wykona ostatni przewidziany regułami gry ruch.