KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Konkursy zadaniowe na obozach Młodzieżowych Uniwersytetów Matematycznych (2011–2013)

Kraków 2013

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Wstęp

Niniejsza publikacja zawiera zadania z zawodów matematycznych organizowanych podczas obozów naukowych dla laureatów konkursu „*Zostań Euklidesem*”. Uczniowie uczestniczący w zajęciach Młodzieżowych Uniwersytetów Matematycznych rywalizowali w latach szkolnych 2010–11, 2011–12 oraz 2012–13. Konkurs jak i projekt był finansowany przez Program Operacyjny Kapitał Ludzki Unii Europejskiej. Całe przedsięwzięcie realizował Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim i Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie.

Na obóz kwalifikowano po około 15 najwyżej sklasyfikowanych w konkursie „*Zostań Euklidesem*” uczniów z województw objętych działaniem MUM, czyli z województw: lubelskiego, małopolskiego, podkarpackiego. Łącznie w zajęciach rozszerzających z matematyki uczestniczyło na każdym z obozów około 45 uczniów podzielonych na cztery grupy. Niektórzy obozowicze rywalizowali dodatkowo w zawodach matematycznych. Zadania konkursowe wybierali i oceniali autorzy niniejszego opracowania przy pomocy pozostałych prowadzących zajęcia rozszerzające. Dwie lub trzy serie zadań udostępniano uczniom, którzy rozwiązywali je w czasie wolnym (jeżeli chcieli), a następnie przekazywali jurorom. Poziom trudności zadań dobierano tak, aby stanowiły one wyzwanie dla rozwiązujących. Preferowano zadania nieszablonowe, których rozwiązanie wymaga pomysłowości, a nie dużej wiedzy. Problemy te pochodziły z różnych źródeł. Najczęściej wykorzystywano zadania z prywatnego archiwum autorów oraz odpowiednio dostosowane zadania z Moskiewskich Olimpiad Matematycznych (zobacz opracowania cytowane w spisie literatury). Wiele zadań zmodyfikowano na potrzeby konkursu.

Niniejsza praca zawiera listy zadań oraz rozwiązania zredagowane w oparciu o pomysły zaproponowane przez uczniów. Za każdym razem podajemy nazwisko ucznia (uczniów), którego praca stanowiła źródło, na podstawie którego opracowano odpowiedź. W wielu przypadkach ze względu na konieczność zachowania matematycznej ścisłości i klarowności rozwiązania te musiały być mocno zmienione przed ich opublikowaniem.

Od Autorów:
Serdecznie dziękujemy naszym Kolegom: Jackowi Chudziakowi, Andrzejowi Gębarowskiemu oraz Wojciechowi Jabłońskiemu, którzy pomagali nam w organizacji konkursu. Dziękujemy także wszystkim uczestnikom obozów zarówno uczniom jak i kadrze opiekunów oraz prowadzącym zajęcia i organizatorom za wspaniałą atmosferę jaką stworzyli. Startującym w konkursach i ich kibicom dziękujemy szczególnie. Dzięki Waszemu entuzjazmowi przygotowanie zadań i ich ocena było dla nas fantastycznym doświadczeniem. Wszystkim życzymy dalszych wspaniałych sukcesów!

Dominik Kwietniak
Leszek Pieniążek

Część I

Listy zadań z konkursów zadaniowych

Kudowa Zdrój

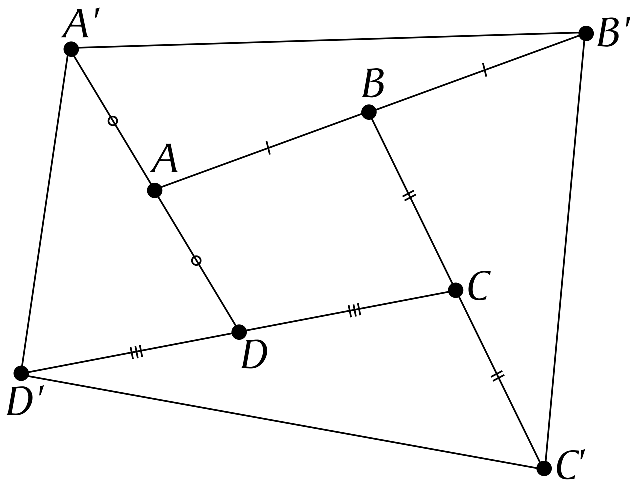
Seria pierwsza

1. Udowodnić, że w kwadrat o boku 2,75 cm można wpisać pięć rozłącznych kwadratów o boku 1cm.
2. Znajdź największą pięciocyfrową palindromiczną (czyli taką, że czytana od końca jest taka sama jak czytana od początku, np. 12321) liczbę podzielną przez 101.
3. Niech $a_1 = 1$ oraz dla $k > 0$ niech $a_{k+1} = \pm a_k \pm a_{k-1} \pm \ldots \pm a_2 \pm a_1$ dla dowolnego wyboru znaków + i − (czyli $a_2 = a_1 = 1$ lub $a_2 = -a_1 = -1$; $a_3 = a_2 + a_1$, $a_3 = a_2 - a_1$, $a_3 = -a_2 + a_1$ lub $a_3 = -a_2 - a_1$). Ile wartości może przyjmować liczba a_n?

Kudowa Zdrój

Seria druga

1. Udowodnić, że jeżeli ustawimy na szachownicy 4×4 co najwyżej 6 pionków, to zawsze znajdziemy takie dwa wiersze i dwie kolumny, w których stoją wszystkie pionki. Podać przykład takiego ustawienia 7 pionków na tablicy 4×4, że po usunięciu z planszy wszystkich pionków stojących w dwóch dowolnie wybranych wierszach i dwóch dowolnie wybranych kolumnach na planszy zostanie co najmniej jeden pionek.
2. Jaki jest stosunek pola czworokąta $A'B'C'D'$ do pola czworokąta $ABCD$?



3. Tablicę 6×6 pokryto klockami 2×1. Pokazać, że można znaleźć prostą, która rozcina tablicę na dwie niepuste części i nie przecina żadnego klocka 2×1.
4. Udowodnić, że w dowolnym ciągu 39 kolejnych liczb naturalnych znajduje się co najmniej jedna liczba, której suma cyfr podzielna jest przez 11.

Kudowa Zdrój

Seria trzecia

1. Sześcian podzielono na czworościany. Jaka jest najmniejsza liczba czworościanów, które można otrzymać w ten sposób? Odpowiedź uzasadnić.
2. Dany jest 45-kąt foremny. Mamy do dyspozycji 10 kolorów. Czy jest możliwe takie pokolorowanie wierzchołków przy pomocy tych 10 kolorów, aby dla każdej pary różnych kolorów istniały dwa sąsiadujące wierzchołki 45-kąta w tych kolorach?
3. W królestwie Mnogonii żyje 65 obywateli i król. Król ma jako jedyny prawo zgłaszać projekty ustaw pod głosowanie, ale on sam nie ma prawa głosu. O przyjęciu lub odrzuceniu ustawy decydują pozostali obywatele w tajnym głosowaniu. Każdy z 65 obywateli może glosować *za*, *przeciw*, lub *wstrzymać się od głosu*. Ustawa przechodzi, jeżeli więcej jest głosów *za* niż *przeciw*. Roczne dochody Mnogonii to 66 talarów. W wyniku niedawnej rewolucji dochody państwa dzielone są po równo miedzy wszystkich obywateli i króla, ale król nadal może poddawać pod głosowanie projekty ustaw zmieniające podział dochodów. Jak powinien postąpić król (jakie ustawy powinien poddać pod głosowanie) i ile najwięcej może on zarabiać, jeżeli wiadomo, że każdy obywatel Monogonii będzie glosował *za* jeżeli dana ustawa przewiduje wzrost jego zarobków, *przeciw*, jeżeli ustawa przewiduje ich zmniejszenie oraz *wstrzyma się* od głosu, jeżeli ustawa nie zmieni jego zarobków. Każdy z mieszkańców Mnogonii może zarabiać tylko całkowitą i nieujemną liczbę talarów.
4. Do Kudowy przyjechał autobusem PKS turysta i wysiadł na przystanku koło poczty. Następnie przez pewien czas zwiedzał tę uroczą miejscowość wędrując po jej uliczkach. Zmęczony przysiadł na kawie w restauracji hotelu Kudowa. Po chwili odpoczynku postanowił wrócić na przystanek, ale chciał iść tylko tymi ulicami, którymi poprzednio szedł nieparzystą liczbę razy. Czy to się mu może udać? Uwaga! Rozwiązania za mało abstrakcyjne, tzn. bazujące na rzeczywistym planie Kudowy nie będą uwzględnione ☺.

Rumia

Seria pierwsza

1. Niech $S(x)$ oznacza sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej x. Rozwiązać równanie
$$x + S(x) + S(S(x)) = 2012.$$
2. Załóżmy, że liczba n jest sumą kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych. Udowodnić, że liczba n^2 także jest sumą kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych.
3. Dwa żetony pokerowe, czerwony i niebieski, ułożono w stos jeden na drugim, przy czym czerwony znalazł się na wierzchu. Załóżmy, że na stosie żetonów można dokonywać następujących operacji:
   a) w dowolne miejsce stosu (czyli pomiędzy dowolne dwa żetony znajdujące się na stosie, na spód stosu lub na wierzch stosu) można dołożyć dwa żetony tego samego koloru (czerwone lub niebieskie),
   b) ze stosu można usunąć dwa sąsiednie żetony tego samego koloru.

   Czy jest możliwe, aby po wykonaniu skończenie wielu takich operacji na stosie pozostał jeden żeton niebieski leżący **na** żetonie czerwonym?
4. Nadworny astrolog króla Ćwieczka skonstruował kiedyś zegar analogowy (zwykły zegar wskazówkowy) o trzech wskazówkach: godzinowej, minutowej i sekundowej, poruszających się w sposób ciągły. Astrolog twierdził, że dana chwila jest szczęśliwa, jeżeli patrząc w danym momencie na zegar ujrzymy w kierunku ruchu wskazówek zegara wskazówki, kolejno, godzinową, minutową i sekundową. Jeżeli zobaczymy wskazówki godzinową, sekundową i minutową, to chwila jest pechowa. Czy w ciągu jednej doby więcej czasu upływa na chwilach szczęśliwych, czy pechowych?
5. Czy istnieje skończony ciąg liter alfabetu łacińskiego (*słowo*), który nie zawiera podciągu postaci xx, czyli sklejenia jakiegoś słowa (ciągu liter) x z nim samym (takie słowa nazywa się czasem *kwadratami*, przykładowymi kwadratami występującymi w języku polskim są słowa *mama*, *kankan*, *rowerowe*, *wałowało*, *esemesem*), ale taki podciąg złożony z pary identycznych słów zawsze można znaleźć po dopisaniu dowolnej litery na początku lub na końcu tego ciągu?
6. Okrąg o środku w punkcie D przechodzi przez punkty A oraz B i przez środek O okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A (okręgiem dopisanym do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A nazywamy okrąg styczny do odcinka BC oraz do przedłużeń boków AB i AC). Udowodnić, że punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

Rumia

Seria druga

1. Mnożąc dwie liczby trzycyfrowe zauważyłem, że wynik jest siedem razy mniejszy niż liczba powstała przez zapisanie czynników obok siebie. Jakie liczby mnożyłem?
2. W klasie Piotra jest, razem z nim, 29 uczniów. Każdy z 28 pozostałych uczniów przyjaźni się z inną liczbą uczniów z tej klasy (relacja przyjaźni jest symetryczna, tzn. jeżeli X przyjaźni się z Y, to Y przyjaźni się z X). Z iloma uczniami ze swojej klasy przyjaźni się Piotr?
3. Dowolnej parze liczb rzeczywistych (x, y) przyporządkowujemy liczbę $x \star y$. Znaleźć liczbę $2012 \star 2011$ jeżeli wiadomo, że
$$x \star x = 0 \qquad \text{oraz} \qquad x \star (y \star z) = (x \star y) + z$$
dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z
4. O czworokącie wypukłym $ABMC$ wiadomo, że $\angle BAM = 30°$, $\angle ACM = 150°$ oraz $|AB| = |BC|$. Udowodnić, że odcinek AM leży na dwusiecznej $\angle BMC$.
5. Dla danej liczby rzeczywistej x przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową, a przez $[x]$ część całkowitą x. Dla danych liczb rzeczywistych niech $p_n = [2\{an + b\}]$.
   a) Czy dla dowolnego czteroelementowego ciągu ω o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ można znaleźć takie liczby a i b, że ω będzie podciągiem ciągu $p_0, p_1, p_2, \ldots$?
   b) Czy dla dowolnego pięcioelementowego ciągu ω o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$ można znaleźć takie liczby a i b, że ω będzie podciągiem ciągu $p_0, p_1, p_2, \ldots$?

Rytro

Seria pierwsza

1. Czy możliwe jest ustawienie czterech piłkarzy na boisku tak, aby odległości pomiędzy nimi wynosiły 1, 2, 3, 4, 5 oraz 6 metrów?
2. Wśród mieszkańców pewnej wyspy 2/3 mężczyzn oraz 3/5 kobiet jest w monogamicznych i różnopłciowych związkach małżeńskich. Jaki procent populacji tych wyspiarzy pozostaje w związku małżeńskim?
3. Na papierze w kratkę narysowano wypukły wielokąt w ten sposób, że wszystkie jego wierzchołki leżą na przecięciach linii i żadna z krawędzi nie leży na jednej linii. Pokazać, że suma długości linii pionowych zawartych w tym wielokącie jest równa sumie długości linii poziomych zawartych w tym wielokącie.
4. Znaleźć przykład wielomianu P stopnia 2013 spełniającego dla wszystkich liczb rzeczywistych x tożsamość

$$P(x) + P(1 - x) = 1.$$

5. Pełną talię 52 kart ułożono w rzędzie na stole. Pewna liczba z tych kart jest obrócona koszulką do góry. Gracz w każdym ruchu odwraca na drugą stronę pewną liczbę sąsiadujących kart leżących między dwiema kartami koszulką do góry (uwaga! taki blok może składać się z jednej karty) i układa je w odwrotnej kolejności (tzn. ostatnia karta staje się pierwszą itd.). Pokazać, że bez względu na to jak będzie grał w pewnym momencie wszystkie karty będą odsłoniętę (odwrócone koszulką do dołu).

Rytro

Seria druga

1. Czy z każdej z danych ośmiu równoodległych płaszczyzn w przestrzeni można wybrać po jednym punkcie w ten sposób, że tworzą one wierzchołki sześcianu?
2. Liczby od 1 do 2013 wypisano w rzędzie. Czy można dopisać pod spodem kolejny wiersz złożony z tych samych liczb, ale ustawionych w takiej kolejności, że suma liczb w każdej kolumnie jest kwadratem?
3. W rogu szachownicy m na n ustawiono wieżę. Dwaj gracze na zmianę przesuwają ją po szachownicy zgodnie z regułami gry w szachy, ale wieża nie może zatrzymać się ani przejść nad polem na którym stała lub przechodziła przez nie wcześniej. Przegrywa gracz, który nie może już wykonać ruchu. Który z graczy może zapewnić sobie zwycięstwo i jak wygląda jego strategia?
4. Punkt X leży na zewnątrz rozłącznych okręgów o_1 i o_2, a odcinki styczne poprowadzone z x do o_1 i o_2 są równej długości. Pokazać, że przecięcie przekątnych czworokąta o wierzchołkach w punktach styczności tych stycznych pokrywa się z punktem przecięcia takich prostych stycznych do obu okręgów, że okręgi o_1 i o_2 leżą po różnych stronach tych prostych.

Część II

Rozwiązania

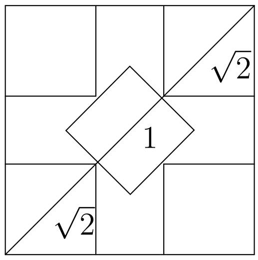
Rozdział 1

Kudowa Zdrój

Seria pierwsza

1. *Udowodnić, że w kwadrat o boku* 2,75 *cm można wpisać pięć rozłącznych kwadratów o boku* 1 *cm.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Konrada Kowalaka).



Na podstawie rysunku wystarczy potwierdzić, że przekątna dużego kwadratu jest dłuższa niż suma dwóch przekątnych i jednego boku małych kwadratów.

$$
\begin{aligned}
2\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} &> 2\sqrt{2}+1\\
\frac{3\sqrt{2}}{4} &> 1 \qquad\qquad /()^2\\
\frac{18}{16} &> 1.
\end{aligned}
$$

2. *Znajdź największą pięciocyfrową palindromiczną (czyli taką, że czytana od końca jest taka sama jak czytana od początku, np. 12321) liczbę podzielną przez 101.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Mateusza Bąkały).
Niech x będzie szukaną liczbą. Wówczas $x = 10^4\cdot a + 10^3\cdot b + 10^2\cdot c + 10\cdot b + a$, gdzie a, b, $c \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$ oraz $a \neq 0$.

Szukamy takiego x, że $101|x$. Mamy:

$$x = 10^4\cdot a + 10^3\cdot b + 10^2\cdot c + 10\cdot b + a = 10001a + 1010b + 100c.$$

Zauważmy, że $101|1010b$. Zatem musi być: $101|10001a + 100c$.

Ale prawdziwe są następujące zależności:

$$
\begin{aligned}
10001a &\equiv 2a \pmod{101},\\
100c &\equiv -c \pmod{101}.
\end{aligned}
$$

Czyli musi być $101|2a-c$. Ponieważ $101 > |2a-c|$, więc $2a-c=0$, skąd dostajemy, że $2a = c$.

Równość $2a = c$ ma tylko 4 rozwiązania w zbiorze $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Są to:

$$\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ c = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 3 \\ c = 6 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 4 \\ c = 8 \end{cases}.$$

Wybieramy ostatnie rozwiązanie, ponieważ x ma być największą możliwą liczbą. Kładąc również $b = 9$, otrzymujemy

$$x = 49894.$$

Stwierdzamy, że $101|49894$ oraz liczba 49894 jest palindromiczna. Czyli liczba $x = 49894$ jest największą liczbą spełniającą warunki zadania.

3. *Niech $a_1 = 1$ oraz dla $k > 0$ niech $a_{k+1} = \pm a_k \pm a_{k-1} \pm \ldots \pm a_2 \pm a_1$ dla dowolnego wyboru znaków + i − (czyli $a_2 = a_1 = 1$ lub $a_2 = -a_1 = -1$; $a_3 = a_2 + a_1$, $a_3 = a_2 - a_1$, $a_3 = -a_2 + a_1$ lub $a_3 = -a_2 - a_1$). Ile wartości może przyjmować liczba a_n?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Wojciecha Rybaka).

a_1	1
a_2	1, −1
a_3	2, 0, −2
a_4	4, 2, 0, −2, −4
a_5	8, 6, 4, 2, 0, −2, −4, −6, −8
a_6	16, 14, 12, ..., 0, −2, ..., −12, −14, −16

Rozważania prowadzimy dla $n \geqslant 3$.

Niech $N(a_n)$ oznacza największą możliwą wartość liczby a_n. Zauważmy, że

$$N(a_4) = 2^2 = 2^{4-2}$$
$$N(a_5) = 2^3 = 2^{5-2}$$
$$N(a_6) = 2^4 = 2^{6-2}.$$

Hipoteza: $N(a_n) = 2^{n-2}$.

Dowód poprzez indukcję matematyczną.

1° dla $n = 3$
$N(a_3) = 2^{3-2} = 2$.

2° Założenie: dla pewnego n zachodzi $N(a_n) = 2^{n-2}$.
Teza: $N(a_{n+1}) = 2^{n+1-2} = 2^{n-1}$.
Dowód:
$N(a_{n+1}) = N(a_n) + N(a_{n-1}) + \cdots + N(a_2) + N(a_1) = N(a_n) + N(a_n) = 2N(a_n)$.
Korzystając z założenia indukcyjnego

$$2N(a_n) = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

Koniec dowodu.

3° Na mocy zasady indukcji matematycznej hipoteza jest prawdziwa.

Postępując analogicznie można udowodnić, że najmniejsza możliwa wartość liczby a_n (oznaczana dalej jako $D(a_n)$) jest postaci -2^{n-2}. Zatem liczba a_n może przyjmować wartości jedynie z przedziału $\langle -2^{n-2}, 2^{n-2} \rangle$.

Zauważmy również, że suma lub różnica liczby a_1 i a_2 jest zawsze parzysta, w konsekwencji również liczba a_3 oraz każda następna zawsze jest parzysta.

$$N(a_n) = N(a_{n-1}) + N(a_{n-2}) + \ldots + N(a_2) + N(a_1).$$

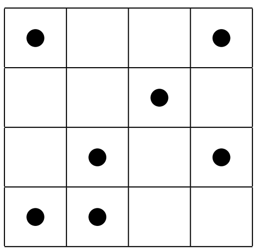
Łatwo zauważyć, że zmieniając ostatni znak „+" na „−" uzyskamy wartość mniejszą od $N(a_n)$ o 2, a kolejne zmiany spowodują zmniejszenie wartości a_n o 4, 6, 8..., itd. przez wszystkie liczby parzyste aż do sytuacji, kiedy wszystkie znaki będą minusami, zaś a_n osiągnie wartość $D(a_n)$.

Zatem liczba a_n może przyjmować $\frac{2^{n-2}}{2}$ różnych wartości dodatnich, tyle samo ujemnych oraz wartość 0. W sumie $2^{n-2} + 1$ różnych wartości. Warto zaznaczyć, że wzór jest poprawny dla każdego $n \geqslant 2$, dla $n = 1$ $a_n = 1$.

Seria druga

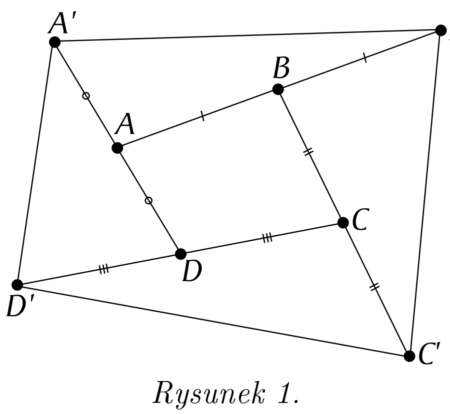
1. *Udowodnić, że jeżeli ustawimy na szachownicy* 4×4 *co najwyżej* 6 *pionków, to zawsze znajdziemy takie dwa wiersze i dwie kolumny, w których stoją wszystkie pionki. Podać przykład takiego ustawienia 7 pionków na tablicy* 4×4*, że po usunięciu z planszy wszystkich pionków stojących w dwóch dowolnie wybranych wierszach i dwóch dowolnie wybranych kolumnach na planszy zostanie co najmniej jeden pionek.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Pawła Rzońcy).
Przy rozmieszczeniu 6 pionków w 4 kolumnach w jednej z kolumn muszą się znaleźć co najmniej dwa pionki. Jeżeli w jednej kolumnie są 3 lub 4 pionki, to wykreślamy tę kolumnę a pozostałe co najwyżej trzy pionki wykreślimy usuwając odpowiedni wiersz i dwie kolumny. Jeżeli żadna kolumna nie zawiera co najmniej trzech pionków, to co najmniej dwie kolumny muszą zawierać po dwa pionki. Wówczas kolumnami skreślamy po dwa, a pozostałe dwa pionki wierszami.

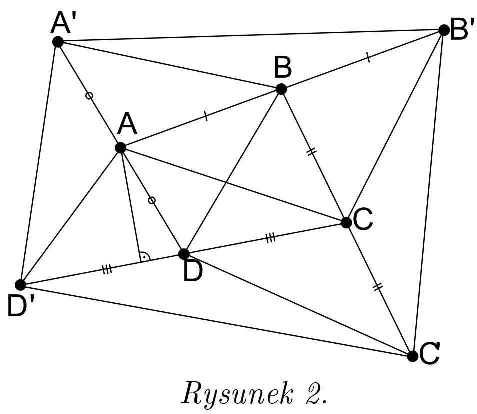


Ustawienie 7 pionków, aby nie dało się ich skreślić dwiema kolumnami i dwoma wierszami.

2. *Jaki jest stosunek pola czworokąta* $A'B'C'D'$ *do pola czworokąta* $ABCD$ *(rys. 1)?*



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Rozwiązanie (na podstawie pracy Jakuba Kurlaka).

Odległości punktu A od odcinków $D'D$ i DC są równe (rys. 2), a wiedząc, że te odcinki są równej długości, dostajemy, że $\triangle D'AD$ i $\triangle DAC$ mają równe pola. Niech $P_{\triangle DAC} = K = P_{\triangle D'AD}$.

Analogicznie równe pola mają trójki trójkątów:

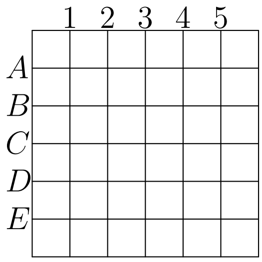
* $K = P_{\triangle DAC} = P_{\triangle D'AD} = P_{\triangle A'AD'}$.
* $P_{\triangle DCB} = P_{\triangle DCC'} = P_{\triangle D'DC'}$. Niech $P_{\triangle DCB} = L$.
* $P_{\triangle C'CB'} = P_{\triangle BB'C} = P_{\triangle ABC}$. Niech $P_{\triangle ABC} = M$.
* $P_{\triangle A'BB'} = P_{\triangle A'BA} = P_{\triangle ABD}$. Niech $P_{\triangle ABD} = N$.

Więc $N + L = P_{\square ABCD} = K + M$. Zatem pole czworokąta $A'B'C'D'$ jest równe $3N+3L+3K+3M-(M+K) = 6K-K+6M-M = 5K+5M$. Otrzymujemy więc

$$P_{\square A'B'C'D'} = 5K + 5M \qquad \frac{P_{\square A'B'C'D'}}{P_{\square ABCD}} = \frac{5K+5M}{K+M} = \frac{5(K+M)}{(K+M)} = 5.$$
$$P_{\square ABCD} = K + M$$

3. *Tablicę* 6×6 *pokryto klockami* 2×1. *Pokazać, że można znaleźć prostą, która rozcina tablicę na dwie niepuste części i nie przecina żadnego klocka* 2×1.

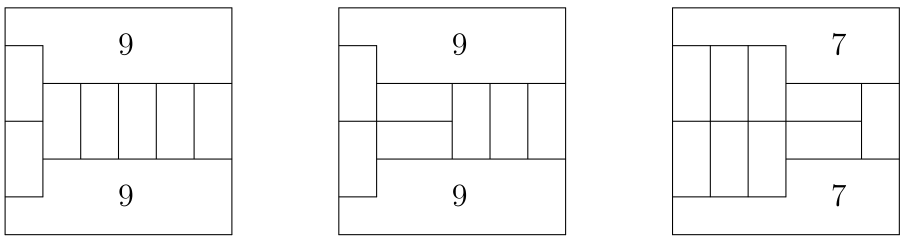
Rozwiązanie (na podstawie pracy Wojciecha Rybaka).



Prosta rozcinająca musi przebiegać wzdłuż jednej z linii 1–5 lub A–E.
Powstaje wtedy, gdy na jednej linii znajdzie się 6 krawędzi klocków jednocześnie.

Aby pokryć tablicę 6×6 potrzeba 18 klocków. Dają one w sumie 42 krawędzie (odcinki jednostkowe) pomiędzy klockami ($18 \cdot 6 = 108$, jednak obwód tablicy to 24 pola, ponadto dwie stykające się krawędzie łączą się w jedną).

Należy zauważyć, że na jednej linii może leżeć tylko parzysta liczba krawędzi.



Nieparzysta liczba krawędzi na jednej z linii powoduje, że nie można dokończyć układania, ponieważ zostało po 9 lub 7 pól do pokrycia.

Wewnątrz tablicy mamy 42 krawędzie do rozmieszczenia oraz 10 linii, na których leżą krawędzie. Na każdej linii można umieścić tylko parzystą liczbę krawędzi, zatem na co najmniej jednej z nich będzie leżeć 6 krawędzi, które utworzą prostą rozcinającą.

4. *Udowodnić, że w dowolnym ciągu* 39 *kolejnych liczb naturalnych znajduje się co najmniej jedna liczba, której suma cyfr podzielna jest przez* 11.

Rozwiązanie (na podstawie pracy Zofii Bartyzel).
Wśród 20 pierwszych liczb 39–wyrazowego ciągu znajduje się liczba, której cyfrą dziesiątek jest 0, ale cyfrą jedności nie jest 9. Oznaczymy tę liczbę przez n. Kolejne 19 wyrazów ciągu ma postać $n+1$, $n+2, \ldots, n+18$, $n+19$.

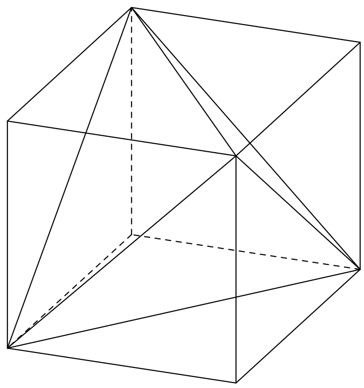
Wyrazy od $n+10$ do $n+18$ mają takie same sumy cyfr jak wyrazy od $n+1$ do $n+9$, więc sumy cyfr wyrazów n, $n+1$, $n+2, \ldots, n+9$, $n+19$ wynoszą N, $N+1, \ldots, N+10$, gdzie N jest sumą cyfr n. Wśród 11 kolejnych liczb na pewno znajdziemy jedną podzielną przez 11.

Seria trzecia

1. *Sześcian podzielono na czworościany. Jaka jest najmniejsza liczba czworościanów, które można otrzymać w ten sposób? Odpowiedź uzasadnić.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Marcina Tomasa).
Pięć czworościanów można otrzymać układając je w następujący sposób:

W narożach umieścić 4 czworościany tak, aby 3 krawędzie każdego z nich były jednocześnie krawędziami sześcianu, zaś pozostałe 3 krawędzie były przekątnymi ścian sześcianu. Ostatni czworościan tworzy 6 wykreślonych przekątnych ścian sześcianu (powstanie czworościan foremny). Opisaną sytuację ilustruje rysunek:



Uzasadnienie: nie można wstawić mniejszej liczby czworościanów, gdyż przy ustawieniu ich w inny sposób zawsze znajdzie się jakiś czworościan który będzie miał mniejszą wysokość bądź mniejsze pole podstawy niż u czworościanów narożnych, a więc w konsekwencji będzie miał mniejszą objętość. Czworościanu o większej objętości niż czworościan foremny o krawędzie $a\sqrt{2}$ w sześcian nie da się wpisać.

Od redakcji: Pomimo niekompletności końcowej części rozwiązania rozumowanie zostało zamieszczone ze względu na ciekawą ideę wykorzystania objętości brył.

2. *Dany jest* 45*-kąt foremny. Mamy do dyspozycji* 10 *kolorów. Czy jest możliwe takie pokolorowanie wierzchołków przy pomocy tych* 10 *kolorów, aby dla każdej pary różnych kolorów istniały dwa sąsiadujące wierzchołki* 45*-kąta w tych kolorach?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Piotra Zielonki).
Mamy do dyspozycji 10 kolorów. Nazwijmy je od 1 do 10. Jedno użycie ustalonego koloru Np. $j = 1$ tworzy co najwyżej dwie pary wierzchołków połączonych krawędzią. Wybrany kolor musi być kolorem wierzchołka sąsiadującego z wierzchołkiem w kolorze k dal $k = 2, \ldots, 10$. Zatem naszego koloru musimy użyć co najmniej 5 razy. Ponieważ mamy 10 kolorów i każdy z nich musi być użyty co najmniej 5 razy. Zatem minimalna liczba wierzchołków wynosi $10 \cdot 5 = 50$ kolorów. Stąd widzimy, że nie da się tego zrobić dla 45-kąta.

3. *W królestwie Mnogonii żyje* 65 *obywateli i król. Król ma jako jedyny prawo zgłaszać projekty ustaw pod głosowanie, ale on sam nie ma prawa głosu. O przyjęciu lub odrzuceniu ustawy decydują pozostali obywatele w tajnym głosowaniu. Każdy z* 65 *obywateli może glosować* za, *przeciw, lub* wstrzymać się od

głosu. *Ustawa przechodzi, jeżeli więcej jest głosów* za *niż* przeciw. *Roczne dochody Mnogonii to* 66 *talarów. W wyniku niedawnej rewolucji dochody państwa dzielone są po równo miedzy wszystkich obywateli i króla, ale król nadal może poddawać pod głosowanie projekty ustaw zmieniające podział dochodów. Jak powinien postąpić król (jakie ustawy powinien poddać pod głosowanie) i ile najwięcej może on zarabiać, jeżeli wiadomo, że każdy obywatel Monogonii będzie glosował* za *jeżeli dana ustawa przewiduje wzrost jego zarobków,* przeciw, *jeżeli ustawa przewiduje ich zmniejszenie oraz* wstrzyma się *od głosu, jeżeli ustawa nie zmieni jego zarobków. Każdy z mieszkańców Mnogonii może zarabiać tylko całkowitą i nieujemną liczbę talarów.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Arkadiusza Bochniaka).
Król powinien wprowadzić następujące ustawy (zakładamy, że jeżeli ustawa nie wspomina o pewnej grupie obywateli, to oznacza, że ich dochody pozostają bez zmian, a zarobki króla są dopełnieniem do 66 zarobków obywateli):

Ustawa 1: Obniżamy dochody króla i 32 obywateli o 1, a pozostałym podnosimy o 1.

Ustawa 2: Spośród 33 obywateli, którym podniesiono w Ustawie 1 dochody wybieramy 17 i podnosimy ich dochody o 1, a pozostałym 16 redukujemy dochody do 0. Król będzie wtedy zarabiać $66 - 17 \cdot 3 = 15$.

Ustawa 3: Spośród 17 obywateli, o których mowa w Ustawie 2 wybieramy 8 i redukujemy ich dochody do 0, a pozostałym 9 z tej grupy podwyższamy dochody o 1 i zarabiają oni już po 4 talary. Dochody króla wynoszą już $66 - 4 \cdot 9 = 30$.

Ustawa 4: Spośród 9 obywateli, o których mowa w Ustawie 3 wybieramy czterech, którym redukujemy dochody do 0, a pozostałym pięciu zwiększamy o 1, tym samym zarabiają już po 5 talarów. Dochody króla wynoszą już 41 talarów.

Ustawa 5: Spośród 5 obywateli, o których mowa w Ustawie 4 wybieramy 2, którym redukujemy dochody do 0, a pozostałym trzem podnosimy dochody o 1, więc zarabiają już po 6 talarów. Dochody króla to $66 - 3 \cdot 6 = 48$.

Pięciu obywateli, o których mowa w Ustawie 4 oznaczmy przez A, B, C, D, E. Po wprowadzeniu Ustawy 5 zarabiają oni następująco (króla oznaczamy przez K):

K	A	B	C	D	E
48	0	0	6	6	6

Ustawa 6: Obniżamy do zera dochody osoby C, a podnosimy do 7 dochody osób D i E.

Po tej ustawie mamy:

K	A	B	C	D	E
52	0	0	0	7	7

Ustawa 7: Obniżamy do zera dochody osób D i E, a podwyższamy do 1 osobom A, B i C.

Mamy wtedy:

K	A	B	C	D	E
63	1	1	1	0	0

Dalsze ruchy są niemożliwe. Każda próba zmniejszenia dochodów obywateli pociąga za sobą zwiększenie dochodów innych, ponieważ aby ustawa przeszła, musi być więcej głosów *za*, niż *przeciw*. Tak więc najwyższe zarobki króla wynoszą 63 talary.

4. *Do Kudowy przyjechał autobusem PKS turysta i wysiadł na przystanku koło poczty. Następnie przez pewien czas zwiedzał tę uroczą miejscowość wędrując po jej uliczkach. Zmęczony przysiadł na kawie w restauracji hotelu Kudowa. Po chwili odpoczynku postanowił wrócić na przystanek, ale chciał iść tylko tymi ulicami, którymi poprzednio szedł nieparzystą liczbę razy. Czy to się mu może udać? Uwaga! Rozwiązania za mało abstrakcyjne, tzn. bazujące na rzeczywistym planie Kudowy nie będą uwzględnione ☺.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Wojciecha Rybaka).
Węzłem nazwijmy każde skrzyżowanie ulic, na którym turysta idący z PKS-u do kawiarni znalazł się więcej niż raz. Zauważmy niektóre właściwości węzłów:

– dla każdego węzła liczba przyjść jest równa liczbie wyjść (w sumie jest to liczba parzysta);
– wyjście z każdego węzła oznacza przyjście do kolejnego lub dotarcie do PKS-u lub kawiarni;
– jeżeli w czasie powrotu turysta może dojść do jakiegoś węzła, to może go też opuścić (przychodzi ulicą o nieparzystej liczbie przejść, zostaje nieparzysta liczba przejść, której nie da się tak porozdzielać na ulice, aby na każdej znalazła się parzysta liczba przejść; stąd istnieje co najmniej jedna ulica, którą może wyjść z węzła);
– w drodze powrotnej turysta może dojść do pierwszego węzła przy kawiarni (do kawiarni przyszedł tylko raz, więc liczba przejść jest nieparzysta).

Zauważmy również, że w drodze powrotnej każdą uliczką turysta może przejść najwyżej raz (zmieni wtedy liczbę przejść na parzystą).

Ponieważ turysta po wyjściu z kawiarni dojdzie do pierwszego węzła, z każdego węzła przejdzie do następnego oraz nigdzie się nie zapętli (wtedy musiałby przejść jakąś uliczką więcej niż raz), z pewnością trafi on w końcu na dworzec PKS.

Rozdział 2

Rumia

Seria pierwsza

1. *Niech $S(x)$ oznacza sumę cyfr dodatniej liczby całkowitej x. Rozwiązać równanie*

$$x + S(x) + S(S(x)) = 2012.$$

Rozwiązanie (na podstawie pracy Macieja Wachulca).
Pokażemy, że równanie

$$x + S(x) + S(S(x)) = 2012$$

jest sprzeczne.

Lemat. *Dla dodatniej liczby całkowitej x zachodzi*

$$S(x) \equiv x \pmod 3.$$

Dowód. Niech x będzie $n+1$-cyfrową liczbą całkowitą

$$x = (\overline{a_n \ldots a_1 a_0})_{10} = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Zachodzi $10 \equiv 1 \pmod 3$, a zatem dla dowolnego $n \geqslant 0$ mamy $10^n \equiv 1 \pmod 3$. Stąd

$$x \equiv a_n + \ldots + a_1 + a_0 = S(x) \pmod 3.$$

□

Korzystając dwukrotnie z lematu otrzymujemy

$$x \equiv S(x) \equiv S(S(x)) \pmod 3,$$

zatem

$$x + S(x) + S(S(x)) \equiv 0 \pmod 3.$$

Z drugiej strony $2012 \equiv 2 \pmod 3$, co oznacza, że rozważane równanie nie ma rozwiązania.

2. *Załóżmy, że liczba n jest sumą kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych. Udowodnić, że liczba n^2 także jest sumą kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Gajocha).
Z założenia
$$n = a^2 + b^2 + c^2$$
dla pewnych liczb całkowitych dodatnich a, b i c. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \geqslant b \geqslant c$. Wynika stąd, że
$$\begin{aligned} n^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + (4b^2c^2 - 2b^2c^2) + (4a^2c^2 - 2a^2c^2) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 + (2ac)^2. \end{aligned}$$
Dzięki założeniu $a \geqslant b \geqslant c > 0$ mamy $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, $2bc > 0$ i $2ac > 0$. Liczba n^2 jest zatem sumą kwadratów trzech dodatnich liczb całkowitych.

3. *Dwa żetony pokerowe, czerwony i niebieski, ułożono w stos jeden na drugim, przy czym czerwony znalazł się na wierzchu. Załóżmy, że na stosie żetonów można dokonywać następujących operacji:*
   a) w dowolne miejsce stosu (czyli pomiędzy dowolne dwa żetony znajdujące się na stosie, na spód stosu lub na wierzch stosu) można dołożyć dwa żetony tego samego koloru (czerwone lub niebieskie),
   b) ze stosu można usunąć dwa sąsiednie żetony tego samego koloru.
   Czy jest możliwe, aby po wykonaniu skończenie wielu takich operacji na stosie pozostał jeden żeton niebieski leżący ***na*** *żetonie czerwonym?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Bukowca).
Niech k_n będzie liczbą takich par żetonów znajdujących się na stosie po wykonaniu n dozwolonych operacji, że żeton czerwony jest nad niebieskim (par typu CN). Z założenia wynika, że $k_0 = 1$. Zauważmy, że każda każda z dozwolonych operacji może zwiększyć lub zmniejszyć liczbę par typu CN o liczbę parzystą:

1. Jeżeli w ruchu $n \geqslant 1$ w dowolne miejsce stosu (czyli pomiędzy dowolne dwa żetony znajdujące się na stosie, na spód stosu lub na wierzch stosu) dołożymy dwa żetony czerwone, to $k_n = k_{n-1} + 2N_b$, gdzie N_b jest liczbą żetonów niebieskich znajdujących się pod dwoma dołożonymi żetonami czerwonymi. Podobnie jeżeli w ruchu $n \geqslant 1$ dołożymy dwa żetony niebieskie, to $k_n = k_{n-1} + 2C_a$, gdzie C_a jest liczbą żetonów czerwonych znajdujących się nad dwoma dołożonymi żetonami niebieskimi.
2. Jeżeli w ruchu $n \geqslant 1$ ze stosu usuniemy dwa sąsiednie żetony czerwone (niebieskie), to $k_n = k_{n-1} - 2N_b$ ($k_n = k_{n-1} - 2C_a$), gdzie N_b (C_a) jest liczbą żetonów niebieskich (czerwonych) znajdujących się pod (nad) dwoma usuniętymi.

Wynika stąd, że opisane w zadaniu operacje nie mogą zmienić parzystości liczby k_n. Ponieważ w stanie końcowym jaki chcemy osiągnąć liczba par typu CN wynosi zero, wnioskujemy, że nie jest możliwe, aby po wykonaniu skończenie wielu operacji na stosie pozostał jeden żeton niebieski leżący **na** żetonie czerwonym.

Rozwiązanie (na podstawie pracy Johnny'ego B. Goode'a).
Udowodnimy najpierw pewien lemat. W jego dowodzie skorzystamy ze znanego faktu: *dla dowolnych liczb całkowitych $m > 0$, a i b oraz dowolnego wielomianu o współczynnikach całkowitych W zachodzi implikacja*
$$a \equiv b \pmod m \implies W(a) \equiv W(b) \pmod m.$$

Lemat. *Niech $T(x)$ oznacza sumę cyfr stojących w zapisie dziesiętnym liczby x przy nieparzystych potęgach 10 pomniejszoną o sumę cyfr stojących w zapisie dziesiętnym liczby x przy parzystych potęgach 10. Dla dodatniej liczby całkowitej x zachodzi*

$$T(x) \equiv x \pmod{11}.$$

Dowód. Niech x będzie $n+1$-cyfrową liczbą całkowitą

$$x = (\overline{a_n \ldots a_1 a_0})_{10} = a_n \cdot 10^n + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

Zachodzi $10^n \equiv -1 \pmod{11}$, a zatem rozpatrując wielomian o współczynnikach całkowitych $W(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ widzimy, że $W(10) \equiv W(-1) \pmod{11}$. Wystarczy teraz zauważyć, że $W(-1) = T(x)$. □

Stos żetonów możemy zakodować przy pomocy ciągu zer i jedynek (0 oznacza żeton niebieski, 1 — żeton czerwony). Pierwsza cyfry kodu stosu odpowiada wierzchołkowi stosu. Stos żetonów jakim dysponujemy na początku ma zatem kod 10. Kod stosu utożsamiamy z liczbą zapisaną w systemie dziesiętnym. Zauważmy, że dla dowolnej liczby x będącej kodem dla jakiegoś stosu wykonanie dozwolonej operacji, czyli wstawienie lub wymazanie sąsiadujących dwóch identycznych cyfr (00 lub 11) nie zmienia wartości $T(x)$. Jest tak, bo cyfry z miejsc parzystych (nieparzystych) w zapisie dziesiętnym liczby x, które pozostaną po wykonaniu operacji będą nadal na miejscach parzystych (nieparzystych) w zapisie nowego stosu. Ponadto dwie jednakowe sąsiadujące cyfry znoszą się przy obliczaniu $T(x)$. Zatem wartość $T(x) \mod 11$ dla kodu stosu x jest stale równa $T(10) \mod 11$. Oznacza to, że na stosie nie może się pojawić jeden żeton niebieski leżący **na** żetonie czerwonym, bo kod takiego stosu (01) ma inną resztę z dzielenia przez 11.

4. *Nadworny astrolog króla Ćwieczka skonstruował kiedyś zegar analogowy (zwykły zegar wskazówkowy) o trzech wskazówkach: godzinowej, minutowej i sekundowej, poruszających się w sposób ciągły. Astrolog twierdził, że dana chwila jest szczęśliwa, jeżeli patrząc w danym momencie na zegar ujrzymy w kierunku ruchu wskazówek zegara wskazówki, kolejno, godzinową, minutową i sekundową. Jeżeli zobaczymy wskazówki godzinową, sekundową i minutową, to chwila jest pechowa. Czy w ciągu jednej doby więcej czasu upływa na chwilach szczęśliwych, czy pechowych?*

Rozwiązanie firmowe.
Rozpatrzymy pozycje wskazówek T sekund po północy oraz T sekund przed północą tego samego dnia ($T \in [1, 43200]$). Jeżeli jedna z tych chwil jest chwilą szczęśliwą, to druga jest pechową. Każdemu okresowi szczęśliwemu w ciągu jednej doby odpowiada trwający tyle samo czasu okres pechowy.

5. *Czy istnieje skończony ciąg liter alfabetu łacińskiego (*słowo*), który nie zawiera podciągu postaci xx, czyli sklejenia jakiegoś słowa (ciągu liter) x z nim samym (takie słowa nazywa się czasem* kwadratami*, przykładowymi kwadratami występującymi w języku polskim są słowa* mama, kankan, rowerowe, wałowało, esemesem*), ale taki podciąg złożony z pary identycznych słów zawsze można znaleźć po dopisaniu dowolnej litery na początku lub na końcu tego ciągu?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Gajocha).
Takie słowo istnieje. Udowodnimy, że dla dowolnego zbioru skończonego A można zbudować ciąg (słowo) elementów A nie zawierające kwadratu (słowa postaci xx), które będzie zawierało kwadrat po przedłużeniu go w dowolną stronę o dowolny element zbioru A. W dowodzie wykorzystamy indukcję ze względu na n, które będzie oznaczać liczbę elementów zbioru A.

Krok pierwszy. Niech $n = 1$. Zatem $A = \{a_1\}$ i szukanym słowem jest $w = a_1$.

Krok indukcyjny. Załóżmy, że $n \geqslant 1$ oraz dla alfabetu o n elementach potrafimy zbudować słowo w_n o podanych własnościach. Niech $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ będzie dowolnym alfabetem o $n + 1$ elementach. Używając liter $a_1, \ldots, a_n$ i korzystając z założenia indukcyjnego zbudujmy słowo w_n a następnie rozważmy słowo

$$w_{n+1} = w_n a_0 w_n.$$

Słowo to nie zawiera kwadratów, bo każde podsłowo występujące w w_{n+1} albo jest zawarte w w_n, albo zawiera dokładnie jedno wystąpienie litery a_0. Jeżeli do słowa w_{n+1} dopiszemy jakąkolwiek literę $a \in A$ i utworzymy słowo aw_{n+1} lub $w_{n+1}a$, to całe nowoutworzone słowo będzie kwadratem jeżeli $a = a_0$ lub będzie zawierało kwadrat na mocy założenia indukcyjnego w pozostałych przypadkach.

Na mocy zasady indukcji matematycznej nasze twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego n, więc w szczególnym przypadku alfabetu łacińskiego ($n = 26$) też. Początkowe etapy konstrukcji takiego słowa mogą wyglądać tak:

$$\mathbf{a}$$
$$a\mathbf{b}a$$
$$aba\mathbf{c}aba$$
$$abacaba\mathbf{d}abacaba$$
$$abacabadabacaba\mathbf{e}abacabadabacaba.$$

6. *Okrąg o środku w punkcie D przechodzi przez punkty A oraz B i przez środek O okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A (okręgiem dopisanym do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A nazywamy okrąg styczny do odcinka BC oraz do przedłużeń boków AB i AC). Udowodnić, że punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Macieja Wachulca).
Niech $|\angle CBO| = \alpha$ i $|\angle BCO| = \beta$. Odcinek BO jest dwusieczną kąta zewnętrznego trójkąta ABC przy podstawie AC, zatem $|\angle ACB| = 180° - 2\beta$. Rozumując analogicznie stwierdzamy, że $|\angle ABC| = 180° - 2\alpha$. Zatem

$$|\angle CAB| = 180° - |\angle ACB| - |\angle ABC| = 2(\alpha + \beta - 90°).$$

Odcinek AO leży na dwusiecznej kąta CAB zatem

$$|\angle OAB| = \alpha + \beta - 90°$$

a stąd

$$\begin{aligned} |\angle AOB| &= 180° - |\angle ABC| - \alpha - |\angle OAB| \\ &= 180° - (180° - 2\alpha) - \alpha - (\alpha + \beta - 90°) \\ &= 90° - \beta. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym opartym na tym samym łuku

$$|\angle ADB| = 2|\angle AOB| = 180^\circ - 2\beta = |\angle ACB|.$$

Otrzymaliśmy $|\angle ADB| = |\angle ACB|$, zatem punkt D leży na okręgu opisanym na ABC.

Seria druga

1. *Mnożąc dwie liczby trzycyfrowe zauważyłem, że wynik jest siedem razy mniejszy niż liczba powstała przez zapisanie czynników obok siebie. Jakie liczby mnożyłem?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Bukowca).
Oznaczmy szukane liczby przez a i b. Są to liczby trzycyfrowe, zatem $100 \leqslant a, b \leqslant 999$. Liczba, która powstaje przez zapisanie liczb a i b jedna za drugą, to $1000a+b$. Stąd

$$1000a + b = 7ab$$
$$7ab - 1000a = b$$
$$a(7b - 1000) = b$$
$$a = \frac{b}{7b - 1000}.$$

Liczby a i b są dodatnie, zatem $7b - 1000 > 0$. Stąd $b > 1000/7$. Zachodzi $\lfloor 1000/7 \rfloor = 142$ zatem b wynosi co najmniej 143. Zauważmy, że

$$7 \cdot 143 = 1001,$$

zatem biorąc $b = 143$ otrzymamy

$$a = \frac{143}{7 \cdot 143 - 1000} = \frac{143}{1001 - 1000} = 143.$$

Nasz problem ma więc co najmniej jedno rozwiązanie, które stanowią liczby $a = b = 143$. Zauważmy teraz, że dla $b = 144$ wartość wyrażenia

$$a = \frac{b}{7b - 1000}$$

wynosi

$$a = \frac{144}{7 \cdot 144 - 1000} = \frac{144}{8} = 18.$$

Dla $b > 144$ wartość tego wyrażenia jest jeszcze mniejsza, zatem nigdy nie jest liczbą trzycyfrową. Dlatego jedynym rozwiązaniem naszego problemu są liczby $a = b = 143$.

2. *W klasie Piotra jest razem z nim 29 uczniów. Każdy z 28 pozostałych uczniów przyjaźni się z inną liczbą uczniów z tej klasy (relacja przyjaźni jest symetryczna, tzn. jeżeli X przyjaźni się z Y, to Y przyjaźni się z X). Z iloma uczniami ze swojej klasy przyjaźni się Piotr?*

Rozwiązanie (na podstawie prac Macieja Wachulca i Macieja Woźniaka).
Ponumerujmy uczniów klasy Piotra liczbami od 1 do 28. Niech a_j oznacza liczbę znajomych ucznia j. Każdy z 28 uczniów klasy Piotra (poza nim) zna inną liczbę osób w klasie, zatem możemy założyć, że $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{28} < 28$. Ponadto osoba o najmniejszej liczbie znajomych nie może mieć ich mniej niż jedną. Zachodzą więc dwa przypadki:

1. Osoba o najmniejszej liczbie znajomych z nikim sie nie przyjaźni ($a_1 = 0$).
2. Osoba o najmniejszej liczbie znajomych zna dokładnie jedną osobę ($a_1 = 1$).

W przypadku pierwszym osoba o największej liczbie znajomych (a_28) zna 27 osób (nie może przyjaźnić się z uczniem 1, bo znajomości są wzajemne). Oznacza to, że liczby znajomych dla 28 uczniów z klasy Piotra wynoszą od 0 do 27 i zachodzi $a_j = j - 1$ dla $j = 1, \ldots, 28$. Zauważmy teraz, że uczeń 2 musi przyjaźnić się z uczniem 28 (wszyscy poza 1 przyjaźnią się z 28, w tym także Piotr), zatem 3 przyjaźni się z 27 i 28 (bo $a_{27} = 26$ więc 27 przyjaźni się ze wszystkimi poza uczniami 1 i 2). Kontynuując widzimy, że uczeń j dla $j = 2, \ldots, 14$ przyjaźni się z uczniami $30 - j, \ldots, 28$. Uczeń 15 przyjaźni się z Piotrem oraz uczniami $16, \ldots, 28$. Podobnie uczeń j dla $j = 16, \ldots, 28$ przyjaźni się natomiast z Piotrem oraz uczniami $2, \ldots, j-1$. Oznacza to, że Piotr przyjaźni się z uczniami $15, \ldots, 28$, czyli ma 14 znajomych w klasie.

W drugim przypadku $a_1 = 1$. Analogicznie jak w poprzednim przypadku wnioskujemy, że osoba o największej liczbie znajomych zna 28 osób i $a_j = j$ dla $j = 1, \ldots, 28$. Zauważmy teraz, że 1 musi przyjaźnić się z 28, 2 przyjaźni się z 28 i 27 i tak dalej. Uczeń j dla $j = 1, 2, \ldots, 14$ przyjaźni się z uczniami $29 - j, \ldots, 28$. Uczeń j dla $j = 15, \ldots, 28$ przyjaźni się natomiast z Piotrem oraz uczniami $1, \ldots, j - 1$. Oznacza to, że Piotr przyjaźni się z uczniami $15, \ldots, 28$, czyli ma 14 znajomych w klasie.

Odpowiedź: Piotr ma 14 znajomych w klasie.

3. *Dowolnej parze liczb rzeczywistych* (x, y) *przyporządkowujemy liczbę* $x \star y$. *Znaleźć liczbę* $2012 \star 2011$ *jeżeli wiadomo, że*

$$x \star x = 0 \qquad \textit{oraz} \qquad x \star (y \star z) = (x \star y) + z$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z

Rozwiązanie (na podstawie pracy Johnny'ego B. Goode'a).
Korzystając z założeń widzimy, że

$$2012 \star 0 = 2012 \star (2011 \star 2011) = (2012 \star 2011) + 2011, \tag{2.1}$$

$$2012 \star 0 = 2012 \star (2012 \star 2012) = (2012 \star 2012) + 2012 = 2012. \tag{2.2}$$

Przyrównując stronami (2.1) i (2.2) otrzymujemy

$$(2012 \star 2011) + 2011 = 2012,$$

a stąd $2012 \star 2011 = 1$.

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Gajocha).
Rozpatrzmy funkcję

$$f(x, y) = x \star y.$$

Z założenia wynika, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełnione są równania

$$f(x, x) = 0, \tag{2.3}$$

$$f(x, f(y, z)) = f(x, y) + z. \tag{2.4}$$

Dla dowolnego x mamy więc

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= f(x, f(x, x)) && \text{(z (2.3))} \\ &= f(x, x) + x && \text{(z (2.4))} \\ &= x && \text{(z (2.3))}. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnego x zachodzi

$$f(x,0) = x. \tag{2.5}$$

Wstawiając do powyżej równości $x = 0$ oraz dowolne y otrzymamy

$$\begin{aligned} 0 &= f(0,0) && \text{(z (2.5))} \\ &= f(0, f(y,y)) && \text{(z (2.3))} \\ &= f(0,y) + y && \text{(z (2.4))}. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnego y zachodzi

$$f(0,y) = -y. \tag{2.6}$$

Weźmy teraz dowolne x oraz z i rozpatrzmy

$$\begin{aligned} f(x,z) &= f(x, -(-z)) \\ &= f(x, f(0,-z)) && \text{(z (2.6))} \\ &= f(x,0) + (-z) && \text{(z (2.4))} \\ &= x - z && \text{(z (2.5))}. \end{aligned}$$

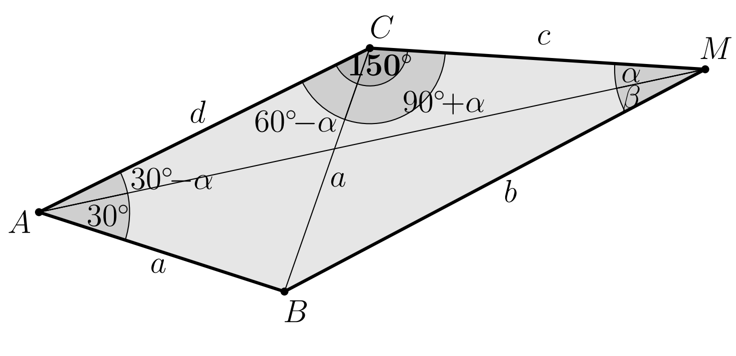
Wykazaliśmy zatem, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x oraz z zachodzi

$$f(x,z) = x - z.$$

W szczególności $f(2012, 2011) = 2012 \star 2011 = 2012 - 2011 = 1$.

4. *O czworokącie wypukłym $ABMC$ wiadomo, że $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$ oraz $|AB| = |BC|$. Udowodnić, że odcinek AM leży na dwusiecznej $\angle BMC$.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Johnny'ego B. Goode'a).



Z twierdzenia sinusów dla ΔABM:

$$\frac{\sin 30^\circ}{b} = \frac{\sin\beta}{a},$$

a zatem

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta}{\sin 30^\circ}. \tag{2.7}$$

Z twierdzenia sinusów dla ΔCMB:

$$\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{b}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{a},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90^\circ+\alpha)}. \tag{2.8}$$

Przyrównując (2.7) i (2.8), otrzymujemy:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(90^\circ+\alpha)}$$
$$\frac{\sin\beta}{\frac{1}{2}}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}$$
$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$$
$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha.$$

Z warunków zadania $\alpha<30^\circ$, bo $\alpha+\angle MAC+\angle ACM=180^\circ$. Podobnie rozpatrując trójkąt BCM o kątach $\alpha+\beta$, $90^\circ+\alpha$ oraz $\angle CBM$ widzimy, że także $\beta<90^\circ$. W przedziale $[0,90^\circ)$ tangens jest funkcją różnowartościową, zatem $\alpha=\beta$.

5. *Dla danej liczby rzeczywistej x przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową, a przez $[x]$ – część całkowitą x. Dla danych liczb rzeczywistych a oraz b niech $p_n=[2\{an+b\}]$.*
   a) Czy dla dowolnego czteroelementowego ciągu ω o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ można znaleźć takie liczby a i b, że ω będzie podciągiem ciągu $p_0,p_1,p_2,\ldots$?
   b) Czy dla dowolnego pięcioelementowego ciągu ω o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ można znaleźć takie liczby a i b, że ω będzie podciągiem ciągu $p_0,p_1,p_2,\ldots$?

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Gajocha).
Udowodnimy następujący

Lemat. *Niech $\overline{a}=1-a$ dla $a\in\{0,1\}$. Jeżeli $q_n=[2\{an+b+\frac{1}{2}\}]$, to $q_n=\overline{p_n}$ dla wszystkich n.*

Dowód. Zauważmy, że

$$p_n=0\iff\{an+b\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\iff\{an+b+1/2\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)\iff q_n=1=\overline{p_n}.$$

Zatem mamy także $p_n=1\iff q_n=0=\overline{p_n}$. □

Z lematu otrzymujemy, że jeżeli ciąg $\omega=\omega_1\ldots\omega_n$ o wyrazach ze zbioru $\{0,1\}$ jest podciągiem ciągu $p_0,p_1,p_2,\ldots$ dla pewnych liczb a i b, to ciąg $\overline{\omega}=\overline{\omega_1}\ldots\overline{\omega_n}$ jest podciągiem ciągu $p_0,p_1,p_2,\ldots$ dla liczb a i $b+\frac{1}{2}$.

Na mocy powyższej obserwacji wystarczy zatem pokazać, że wszystkie ciągi czteroelementowe zawierające co najwyżej dwie jedynki są podciągami ciągu p_0, p_1, p_2,... dla pewnych liczb rzeczywistych a i b.

Rozpatrzmy zatem następujące wartości liczb a i b:

1. $a = 0$, $b = 0$: Wówczas
$$p_0, p_1, p_2, \ldots = 0, 0, 0, 0, 0, \ldots = 0^\infty.$$
Zatem ciąg 0000 pojawia się jako podciąg.
2. $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$: Wówczas
$$p_0, p_1, p_2, \ldots = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots = (01)^\infty.$$
Zatem ciągi 0101 oraz 1010 pojawiają się jako podciągi.
3. $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{4}{5}$: Wówczas
$$p_0, p_1, p_2, \ldots = 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots = 1(00011)^\infty.$$
Zatem ciągi 1000, 0011, 0110, 1100 oraz 0001 pojawiają się jako podciągi.
4. $a = \frac{3}{10}$, $b = \frac{17}{20}$: Wówczas
$$p_0, p_1, p_2, \ldots = 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots = 1(00011)^\infty.$$
Zatem ciągi 0010, 0100, oraz 1001 pojawiają się jako podciągi.

Wykazaliśmy, że wszystkie ciągi czteroelementowe, w których 1 występuje co najwyżej dwa razy są podciągami ciągu p_n dla odpowiednio dobranych a i b. Na mocy udowodnionego wyżej lematu wnioskujemy, że liczby a i b można dobrać dla wszystkich ciągów czteroelementowych.

Od redakcji: Pomimo niekompletności końcowej części rozwiązania rozumowanie zostało zamieszczone ze względu na ciekawą ideę. Koniec rozwiązania, to odpowiedź firmowa.

Udowodnimy, że przy powyższych zasadach nie otrzymamy nigdy ciągu 00010. Utożsamimy najpierw odcinek $[0, 1)$ z okręgiem o obwodzie 1 na płaszczyźnie oraz będziemy uważali dwie liczby rzeczywistej o równych częściach ułamkowych za punkty na okręgu. Zgodnie z tym utożsamieniem $x_n = \{an + b\}$ jest punktem na okręgu, który powstaje przez n-krotny obrót punktu $\{b\}$ o kąt $2\pi a$ odwrotnie do ruchu wskazówek zegara. Wówczas $p_n = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_n leży na dolnym półokręgu $[{}^1\!/\!{}_2, 1)$. Jeżeli $\{a\} = {}^1\!/\!{}_2$, to ciąg p_n jest równy $(01)^\infty$ lub $(10)^\infty$ i nie pojawi się w nim podciąg 00010. Przyjmijmy zatem, że $\{a\} \neq {}^1\!/\!{}_2$ i rozpatrzmy trzy kolejne punkty x_n, x_{n+1}, x_{n+2} wyznaczone przez naszą procedurę na okręgu. Punkty x_n i x_{n+2} podzielą okrąg na dwa odcinki: krótszy i dłuższy, bo założyliśmy, że $\{a\} \neq {}^1\!/\!{}_2$. Wówczas mamy dwie możliwości: punkt x_{n+1} może leżeć na dłuższym lub na krótszym łuku okręgu. Co więcej, jeżeli dla pewnego n zachodzi któryś z powyższych przypadków, to dla wszystkich n zaobserwujemy identyczne położenie trzech kolejnych punktów, bo nasze odwzorowanie obraca sztywno całą konfigurację. Zatem w przypadku pierwszym nigdy nie otrzymamy ciągu 000, a w drugim przypadku ciągu 010.

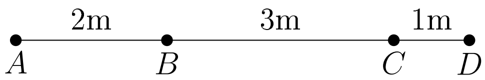
Rozdział 3

Rytro

Seria pierwsza

1. *Czy możliwe jest ustawienie czterech piłkarzy na boisku tak, aby odległości pomiędzy nimi wynosiły 1, 2, 3, 4, 5 oraz 6 metrów?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy wielu autorów).
Takie ustawienie jest możliwe. Aby to wykazać wystarczy ustawić piłkarzy w punktach A, B, C, D leżących na jednej prostej, gdzie $|AB| = 2$ metry, $|BC| = 3$ metry oraz $|CD| = 1$ metr.



2. *Wśród mieszkańców pewnej wyspy* $2/3$ *mężczyzn oraz* $3/5$ *kobiet jest w monogamicznych i różnopłciowych związkach małżeńskich. Jaki procent populacji tych wyspiarzy pozostaje w związku małżeńskim?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Krzysztofa Borowika).
Niech x oznacza liczbę mężczyzn a y liczbę kobiet zamieszkujących wyspę. Skoro wszystkie związki są monogamiczne i różnoplciowe, to liczba kobiet pozostających w związku małżeńskim jest równa liczbie liczbie mężczyzn, zatem

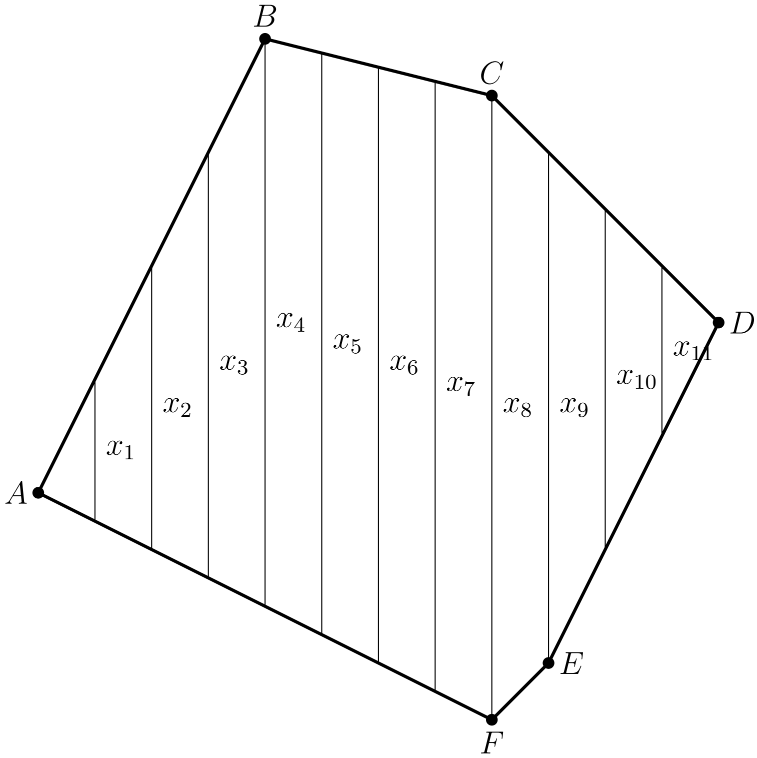
$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{5}y.$$

Zatem $x = \frac{9}{10}y$. Całkowita populacja wyspy wynosi $x + y$, zaś liczba mieszkańców wyspy nie będących stanu wolnego to $\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y$. Odsetek wyspiarzy pozostających w związku małżeńskim wynosi więc:

$$\frac{\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y}{x + y} \cdot 100\% = \frac{2\frac{3}{5}y}{\frac{19}{10}y} \cdot 100\% = \frac{12}{19} \cdot 100\% \approx 63,2\%.$$

3. *Na papierze w kratkę narysowano wypukły wielokąt w ten sposób, że wszystkie jego wierzchołki leżą na przecięciach linii i żadna z krawędzi nie leży na jednej linii. Pokazać, że suma długości linii pionowych zawartych w tym wielokącie jest równa sumie długości linii poziomych zawartych w tym wielokącie.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Aleksandry Józefaciuk).
Narysujmy na płaszczyźnie taki wielokąt wypukły, że wszystkie jego wierzchołki leżą w punktach kratowych i żadna z krawędzi nie leży na jednej z linii wyznaczającej punkty kratowe.



Oznaczmy długości odcinków linii pionowych zawartych we wnętrzu wielokąta przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (patrz rysunek). Podzielą one nasz wielokąt na $n-1$ trapezów i dwa trójkąty (dzięki założeniu, że żaden bok nie leży na takiej linii). Pole P tego wielokąta jest sumą pól tych trapezów i trójkątów:

$$P = \frac{1}{2}x_1 \cdot 1 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1}) \cdot 1\right) + \frac{1}{2}x_n \cdot 1 = \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Podzielmy teraz nasz wielokąt liniami poziomymi. Oznaczmy długości odcinków linii poziomych zawartych we wnętrzu wielokąta przez $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Podobnie jak poprzednio mamy:

$$P = \frac{1}{2}y_1 \cdot 1 + \left(\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1}) \cdot 1\right) + \frac{1}{2}y_m \cdot 1 = \sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Otrzymaliśmy

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = P = \sum_{j=1}^{m} y_j,$$

czyli suma długości linii pionowych zawartych w tym wielokącie jest równa sumie długości linii poziomych zawartych w tym wielokącie.

4. *Znaleźć przykład wielomianu P stopnia 2013 spełniającego dla wszystkich liczb rzeczywistych x tożsamość*

$$P(x) + P(1-x) = 1.$$

Rozwiązanie (na podstawie pracy Macieja Wachulca).
Niech $Q(x) = P(x) - 1/2$. Wówczas wielomian Q spełnia dla wszystkich liczb rzeczywistych x równanie
$$Q(x) = -Q(1-x) \tag{3.1}$$
wtedy i tylko wtedy, gdy P spełnia dla wszystkich liczb rzeczywistych x równanie
$$P(x) + P(1-x) = 1.$$
Zdefiniujmy nowy wielomian R wzorem
$$R(y) = Q(y + {}^1\!/\!_2).$$
Wstawiając $x = y + 1/2$ do równania (3.1) otrzymujemy $Q(y + 1/2) = -Q(y - 1/2)$, zatem rownanie (3.1) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby rzeczywistej y zachodzi
$$R(y) = Q(y + {}^1\!/\!_2) = -Q(1 - (y + {}^1\!/\!_2)) = -Q((-y) + {}^1\!/\!_2) = -R(y). \tag{3.2}$$
Ostatnie równanie zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy R jest wielomianem nieparzystym. Zauważmy jeszcze, że wielomiany P, Q oraz R są zawsze tego samego stopnia. Zatem wystarczy wziąć wielomian $R(y) = y^{2013}$, aby spełnione było równanie (3.2). Wówczas wielomian
$$Q(x) = (x - 1/2)^{2013}$$
spełnia równanie (3.1). Zatem $P(x) = (x-1/2)^{2013} + 1/2$ spełnia warunki podane w zadaniu, co łatwo też sprawdzić bezpośrednio
$$\begin{aligned} P(x) + P(1-x) &= ((x - 1/2)^{2013} + 1/2) + ((1-x) - 1/2)^{2013} + 1/2 \\ &= (x - 1/2)^{2013} - (x - 1/2)^{2013} + 1 = 1. \end{aligned}$$

5. *Pełną talię 52 kart ułożono w rzędzie na stole. Pewna liczba z tych kart jest obrócona koszulką do góry. Gracz w każdym ruchu odwraca na drugą stronę pewną liczbę sąsiadujących kart z których pierwsza i ostatnia musi być koszulką do góry (uwaga! taki blok może składać się z jednej karty) i układa je w odwrotnej kolejności (tzn. ostatnia karta staje się pierwszą itd.). Pokazać, że bez względu na to jak będzie grał w pewnym momencie wszystkie karty będą odsłonięte (odwrócone koszulką do dołu).*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Mateusza Bąkały).
Udowodnimy, że twierdzenie z tezy zadania zachodzi dla talii złożonej z n kart (n dowolne). Dowód przeprowadzimy indukcyjnie. Twierdzimy, że dla każdego n istnieje taka liczba $k(n)$, że po najdalej $k(n)$ ruchach wszystkie karty będą odsłonięte koszulką do dołu.

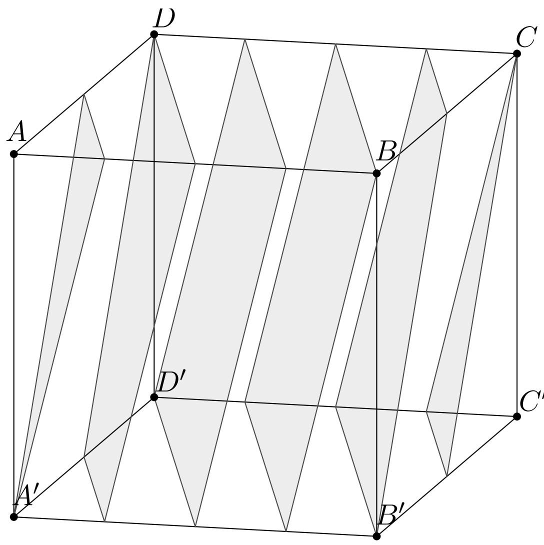
Dla $n = 1$ mamy jedną kartę i teza jest oczywista, bo po najdalej jednym posunięciu karta ta będzie odsłonięta.

Załóżmy, że $n \geqslant 1$ i teza została udowodniona dla talii złożonej z n kart. Rozpatrzmy dowolnie ułożenie $n+1$ kart. Zauważmy, że jeżeli ostatnia karta jest w pewnym momencie gry odsłonięta, to pozostanie odsłonięta przez całą rozgrywkę, bo nigdy nie znajdzie się ona pomiędzy dwiema kartami zasłoniętymi. Zatem od momentu odsłonięcia ostatniej karty rozgrywka dotyczy tylko pierwszych n kart i na mocy założenia indukcyjnego zakończy się po $k(n)$ ruchach. Jeżeli ostatnia karta jest na początku gry zasłonięta, to na mocy założenia indukcyjnego graczy może jej nie odsłaniać przez co najwyżej $k(n)$ tur (tyle ruchów można wykonać używając tylko n pierwszych kart). Zatem w skończonej liczbie kroków gracz musi odsłonić ostatnią kartę a wtedy gra także zakończy się po skończonej liczbie tur.

Seria druga

1. *Czy z każdej z danych ośmiu równoodległych płaszczyzn w przestrzeni można wybrać po jednym punkcie w ten sposób, że tworzą one wierzchołki sześcianu?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Rafała Masełka).
Można tak zrobić:



Rysunek przedstawia części wspólne sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ z ośmioma równoodległymi płaszczyznami. Każdy z wierzchołków sześcianu leży na innej płaszczyźnie.

2. *Liczby od* 1 *do* 2013 *wypisano w rzędzie. Czy można dopisać pod spodem kolejny wiersz złożony z tych samych liczb, ale ustawionych w takiej kolejności, że suma liczb w każdej kolumnie jest kwadratem?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Karoliny Jedziniak).

1	2		195	196	197		2013
		…				…	
195	194		1	2013	2012		196
sumy w kolumnach: $196 = 14^2$				sumy: $2209 = 47^2$			

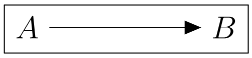
Odpowiedź: Można.

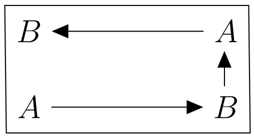
3. *W rogu szachownicy m na n ustawiono wieżę. Dwaj gracze na zmianę przesuwają ją po szachownicy zgodnie z regułami gry w szachy, ale wieża nie może zatrzymać się ani przejść nad polem na którym stała lub przechodziła przez nie wcześniej. Przegrywa gracz, który nie może już wykonać ruchu. Który z graczy może zapewnić sobie zwycięstwo i jak wygląda jego strategia?*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Grzegorza Gajocha).
Mamy szachownicę $n \times m$ pól. Bez straty ogólności załóżmy, że n to liczba kolumn, $n \geqslant m$ (szachownicę można obracać) oraz, że wieża na początku stoi w lewym dolnym rogu.

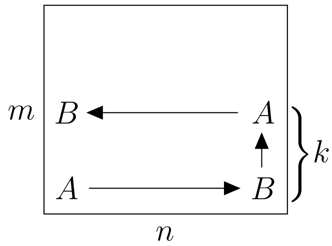
Załóżmy, że A porusza się zawsze w poziomie na drugi koniec dozwolonego obszaru szachownicy. Pokażę, że jest to strategia wygrywająca.

Przykłady dla $m = 1, 2$. Litery A, B oznaczają miejsca, skąd gracze wykonują swoje ruchy, strzałki – posunięcia graczy, A gra zgodnie ze strategią, B wykonuje jedyne możliwe ruchy.





Udowodnię teraz krok indukcyjny.



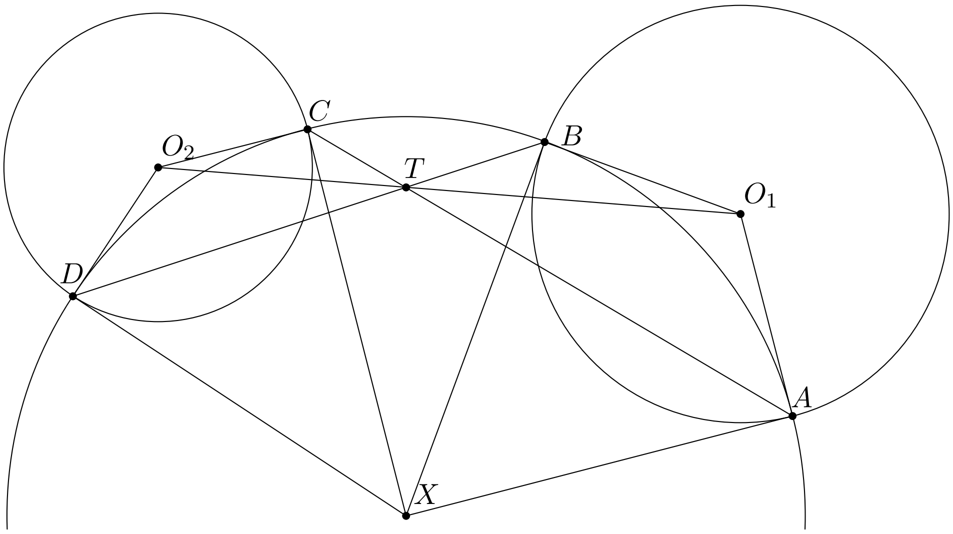
Zakładam, że dla każdej takiej sytuacji na planszach mniejszych A wygrywa. Gdy A ruszy się do końca, B musi ruszyć się w pionie – załóżmy o k pól. Następnie A rusza się w drugą stronę, B wybiera, czy ruszyć się w górę, czy w dół. W obu przypadkach doprowadzi do prostokąta mniejszego. Korzystając z założenia indukcyjnego, gracz A może wygrać na tym mniejszym prostokącie.

Przypadek, w którym $n = m$ oraz B rusza się najdalej, jak to możliwe, doprowadzi do wygranej A. Natomiast jeśli B wykona ruch krótszy, sprowadza grę do przypadku istotnie prostokątnego.

4. *Punkt X leży na zewnątrz rozłącznych okręgów o_1 i o_2 a odcinki styczne poprowadzone z x do o_1 i o_2 są równej długości. Pokazać, że przecięcie przekątnych czworokąta o wierzchołkach w punktach styczności tych stycznych pokrywa się z punktem przecięcia takich prostych stycznych do obu okręgów, że okręgi o_1 i o_2 leżą po różnych stronach tych prostych.*

Rozwiązanie (na podstawie pracy Macieja Wachulca).
Niech O_1, O_2 będą odpowiednio środkami o_1, o_2. Z podanej w zadaniu definicji X wynika, że X leży na osi potęgowej o_1, o_2 oraz że jest środkiem okręgu opisanego na punktach wyciętych w o_1, o_2 przez poprowadzone z X styczne. Niech owe wycięte punkty to A, B, C, D. Zaś ω to okrąg (X, A) (*tj. okrąg o środku w X i przechodzący przez A*).

$O_1A \perp XA$, ponieważ XA jest styczną. Zatem O_1A jest również styczną względem ω. Analogicznie XB. Wobec tego prosta AB jest biegunową O_1 względem ω. Analogicznie CD jest biegunową O_2 względem ω.



Niech $T = AB \cap CD$. Z tw. La Hire prosta O_1O_2 jest biegunową T względem ω. Z lematu w pracy Dominika Burka (`http://students.mimuw.edu.pl/~tc319421/dwustosunek.pdf`, *Dwustosunek i biegunowe*) wiemy jednak, że punkt przecięcia przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg leży na biegunowych punktów przecięć przedłużeń boków. Wobec tego punkt $Y = AC \cap BD$ leży na O_1O_2 niezależnie od położenia X.

Część III

Mecze matematyczne

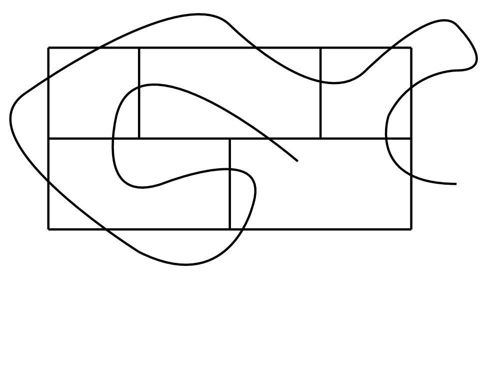
Zadania na mecz matematyczny w Rumii

Licytacja

1. Sześciościany. Dwa wielościany nazwiemy *łudząco podobnymi*, jeśli można znaleźć taką odpowiedniość pomiędzy ich ścianami, wierzchołkami i krawędziami, że odpowiednie ściany mają taką samą liczbę krawędzi oraz spotykają się w obu bryłach w odpowiednich wierzchołkach i krawędziach. Ile można znaleźć różnych sześciościanów, które nie są parami łudząco podobne?
2. Podziały trójkąta. Wskazać największą możliwą taką liczbę n, że każdy trójkąt ostrokątny można podzielić na n sposobów odcinkami na trzy figury mające osie symetrii.
3. Testowanie jajka. Wyhodowano zmodyfikowaną genetycznie kurę, która znosi superwytrzymałe jajka. Dwa takie jajka zostaną użyte do testu, który ma służyć znalezieniu najwyższego piętra pewnego stupiętrowego wieżowca (piętra są w nim ponumerowane od 1 do 100), z którego można zrzucić jajko i ono się nie rozbije. Zakładamy, że jajko zrzucone z bezpiecznego piętra nigdy się nie rozbije, ale zrzucone z dowolnego piętra powyżej najwyższego bezpiecznego piętra rozbije się zawsze. Niestety w skutek awarii wind każde jajko trzeba przed każdym rzutem wnosić po schodach. Znaleźć algorytm, który pozwoli wyznaczyć piętro, z którego można bezpiecznie zrzucić jajko przy pomocy jak najmniejszej liczby testowych rzutów.
4. Pirackie złoto. Załoga pirackiego statku zdobyła kufer złotych monet. Na statku służyło stu piratów $P_1, \ldots, P_{100}$ i mieli oni ściśle określoną hierarchię: pirat P_i miał wyższą rangę od pirata P_j wtedy i tylko wtedy, gdy $i > j$. Najwyższy rangą pirat spośród żyjących jest zwany kapitanem. Piraci będą dzielić złoto przy pomocy następującego algorytmu. Kapitan proponuje podział złota wskazując ile monet otrzyma każdy z kamratów. Propozycja ta jest następnie poddana głosowaniu, w którym udział biorą wszyscy piraci (włącznie z proponującym podział). Każdy pirat głosuje za lub przeciw projektem podziału. Jeżeli propozycja zostanie przyjęta (uzyska połowę lub więcej głosów), to złoto jest dzielone. Jeżeli większość głosujących jest niezadowolona ze swojego udziału w łupie, to zabiją kapitana i powołają nowego, który zaproponuje nowy podział łupów. Zakładamy, że piraci są chciwi, tchórzliwi i nieufni, ale są inteligentni, tzn. ze strachu przed starszymi rangą nie będą między sobą spiskować, zawsze zagłosują za propozycją, która daje im największą możliwą do uzyskania przy danej randze liczbę monet. Jaka jest najmniejsza liczba monet w kufrze, aby kapitan przeżył pierwsze głosowanie i jaką propozycję powinien on złożyć swoim kamratom?
5. Zepsuty zamek szyfrowy. Zamek szyfrowy otwiera kombinacja trzech cyfr z zakresu od 1 do 8. Niestety w skutek awarii zamek odblokuje się, jeżeli zostaną poprawnie wprowadzone dwie z trzech cyfr (np. 1♢3, 14♢, ♢43, gdzie ♢ oznacza dowolną cyfrę otwiera zamek jeżeli kombinacja otwierająca zamek to 143). Jak wiele prób wprowadzenia trzycyfrowych kombinacji trzeba wykonać, aby otworzyć ten zamek? Znaleźć jak najmniejszą liczbę prób.

Regularne zadania

1. Skierowanie grafu. Udowodnić, że krawędzie dowolnego grafu nieskierowanego można zorientować tak, aby dla wszystkich wierzchołków grafu liczba krawędzi wychodzących z danego wierzchołka różniła się od liczby krawędzi dochodzących do tego wierzchołka o ± 1.
2. Suma $2^i 3^j$. Udowodnić, że każdą liczbę naturalną n można przedstawić w postaci sumy takich liczb postacji $2^i 3^j$, że żadna z nich nie jest dzielnikiem którejś z pozostałych.
3. Sąsiedzi w macierzy. Udowodnić, że przy dowolnym rozmieszczeniu liczb od 1 do n^2 w kwadratowej tablicy $n \times n$ istnieją takie dwa pola sąsiadujące w pionie lub w poziomie, że wpisane w nie liczby różnią się o co najmniej n.
4. Okrągły Stół króla Artura. Prawo do zasiadania przy Okrągłym Stole ma $n > 2$ rycerzy. Każdy z nich ma co najmniej $n/2$ przyjaciół wśród pozostałych rycerzy. Pozostali rycerze są jego wrogami. Udowodnić, że rycerzy można usadzić przy Okrągłym Stole tak, aby żaden z nich nie siedział obok swojego wroga. Relacje wrogości i przyjaźni są symetryczne i dopełniają się: albo dani dwaj różni rycerze są przyjaciółmi, albo są wrogami.
5. Pająki i mrówka. Wzdłuż krawędzi sześcianu wędrują trzy pająki polujące na mrówkę. Mrówka jest trzy razy szybsza od każdego z pająków. Jeżeli pająk i mrówka spotkają się, to mrówka zostaje zjedzona. Czy mrówka ma szanse przeżycia jeżeli wiadomo, że pająki będą ze sobą współpracowały?
6. Kolorowy sześcian. Ściany 27 jednostkowych sześcianów pomalowany przy użyciu trzech kolorów w ten sposób, że dla każdego koloru jest możliwe ułożenie z tych sześcianów sześcianu $3 \times 3 \times 3$, którego wszystkie widoczne ściany są w wybranym kolorze. Znaleźć liczbę sześcianów, których ściany pokolorowano używając wszystkich kolorów.
7. Ciąg. Znaleźć wszystkie ciągi liczb rzeczywistych $a_0, a_1, a_2, \ldots$ spełniające dla $i \geqslant j \geqslant 0$ równości $a_i a_j = a_{i+j} + a_{i-j}$ oraz $a_i = a_{i+12}$ i takie, że $a_0 > a_1 > a_2 > 0$.
8. Spacer. Udowodnić, że nie można znaleźć krzywej zamkniętej przecinającej każdy z 16 odcinków na rysunku dokładnie jeden raz. Czy można to zrobić jeżeli założymy, że rysunek został wykonany na powierzchni sfery lub na powierzchni torusa zamiast na płaszczyźnie?



Zadania na mecz w Rytrze

Licytacja

1. Jaka jest największa liczba koników szachowych, które mogą być umieszczone na szachownicy 5×5 w ten sposób, że każdy atakuje dokładnie dwa spośród pozostałych?
2. Na płaszczyźnie umieszczamy kolejno punkty (jeden po drugim) tak, aby żadne trzy z nich nie leżały na jednej prostej i po dodaniu każdego punktu narysowana figura miała oś symetrii. Jaka jest największa możliwa liczba punktów, które można w ten sposób umieścić na płaszczyźnie?
3. Adam i Bernard grają w następującą grę: Adam wybiera dwucyfrową liczbę naturalną, a Bernard próbuje ją odgadnąć. Próbę uważamy za udaną jeśli Bernard poda liczbę, której co najwyżej jedna z cyfr różni się o co najwyżej jeden od odpowiadającej jej cyfry w liczbie Adama. Jaka jest najmniejsza liczba prób jakiej potrzebuje Bernard aby zagwarantować sobie, że co najmniej jedna z nich będzie udana?
4. Jaka jest największa liczba takich trójmianów kwadratowych mających dwa różne pierwiastki rzeczywiste, że suma dowolnych dwóch z nich jest wielomianem stopnia dwa o jednym (podwójnym) miejscu zerowym?

Regularne zadania

1. Trzy stosy liczą sobie odpowiednio: 51, 49 i 5 kamieni. Dwa stosy mogą zostać połączone lub jeden stos zbudowany z parzystej liczby kamieni może zostać podzielony na pół na dwa. Czy możemy otrzymać w ten sposób 105 stosów po jednym kamieniu?
2. Punkt A leży wewnątrz danego okręgu O. Znaleźć wszystkie możliwe położenia takiego punktu C, że istnieją takie punkty B i D na okręgu O, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.
3. Dany jest wielomian $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Rozwiązać równanie
$$f^{2013}(x) = 0.$$
4. Z pełnej talii kart wybrano siedem i pokazano je Adamowi, Bernardowi i Jackowi. Następnie karty te potasowano i rozdano po trzy Adamowi i Bernardowi. Adam i Bernard mają za zadanie przekazać sobie nawzajem informacje o kartach, które mają na ręce. Czy mogą to zrobić tak, aby wiedzieli wszystko o kartach jakie ma ten drugi a Jacek nie poznał żadnej z ich kart. Żaden z nich nie zna siódmej karty. Jacek słyszy co mówią Adam i Bernard. Adam i Bernard nie mają także możliwości ustalenia żadnych szyfrów ani kodów.
5. Jaką największą wartość największego wspólnego dzielnika liczb $n + 2013m$ oraz $m + 2013n$ można osiągnąć jeżeli m i n są względnie pierwsze?
6. Ewa ma trzy patyczki. Jeżeli nie da się z nich skonstruować trójkąta, to najdłuższy z nich zostaje skrócony o sumę długości dwóch pozostałych. Czy możliwe jest, aby operację tę Ewa powtarzała w nieskończoność i na każdym etapie miała trzy patyki o niezerowej długości?
7. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x i y spełniające równanie $x^4 - 2y^2 = 1$.
8. W rzędzie danych jest n lamp. Niektóre z nich świecą się. Co minutę wszystkie zaświecone lampy gasną a każda zgaszona lampa sąsiadująca z dokładnie

jedną lampą dotychczas włączoną zapala się. Dla jakich n możliwy jest taki początkowy układ zapalonych lamp, który nigdy nie zgaśnie?

9. Czy istnieje taka 2013-cyfrowa liczba naturalna w której zapisie dziesiętnym nie występuje cyfra 0, że po powiększeniu jej o iloczyn jej cyfr otrzymamy liczbę o tym samym iloczynie cyfr?
10. Podstawy trapezu mają długości całkowite i różne. Pokazać, że trapez ten można podzielić na trójkąty przystające.
11. W trójkącie ABC środkowa BM ma długość równą bokowi AC. Punkty D i E znajdują się, odpowiednio, na przedłużeniach odcinków BA oraz AC i spełniają równości

$$|AD| = |AB| \qquad \text{oraz} \qquad |CE| = |CM|.$$

Pokazać, że proste DM i BE są prostopadłe.

O projekcie

Nazwa Projektu: „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne”

Projekt współfinansowany z środków Unii Europejskiej w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki
Priorytet: III – Wysoka jakość systemu oświaty
Działanie: 3.3. Poprawa jakości kształcenia
Poddziałanie: 3.3.4. Modernizacja treści i metod kształcenia

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim i Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Czas trwania projektu: od 2009.12.31 – 2013.09.30

Projekt „Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne” jest adresowany do młodzieży uczącej się w szkołach ponadgimnazjalnych (Liceum Ogólnokształcące, Liceum Profilowe, Technikum) zlokalizowanych na terenie województw podkarpackiego, małopolskiego i lubelskiego.

Uzasadnienie:
Projekt powstał w odpowiedzi na istnienie następujących problemów:
1. Obniżający się poziom wiedzy i umiejętności uczniów z matematyki, którego główną przyczyną jest zmniejszenie liczby godzin z matematyki w cyklu kształcenia.
2. Znikoma liczba szkolnych kółek zajęć wyrównawczych matematyki.
3. Niewielkie wsparcie merytoryczne dla uczniów uzdolnionych matematycznie, wynikające m.in. z zaniku kontaktu nauczycieli i uczniów z ośrodkami akademickimi.
4. Zanik kółek zainteresowań z matematyki.

Główne założenie projektu:
Podniesienie kompetencji matematycznych 6100 uczniów rozpoczynających naukę w klasie I w roku szkolnym 2010/11 w szkołach ponadgimnazjalnych w województwie podkarpackim, małopolskim i lubelskim w okresie 09.2010–08.2013.

Cele szczegółowe:
1. Zwiększenie poziomu wiedzy i umiejętności z matematyki 3900 uczniów posiadających luki kompetencyjne w tym zakresie.
2. Reaktywowanie lub wzmacnianie około 99 szkolnych kółek zajęć wyrównawczych.
3. Rozszerzenie poziomu wiedzy i umiejętności z matematyki minimum 2200 uczniów uzdolnionych matematycznie.
4. Reaktywowanie lub wzmocnienie około 78 szkolnych kółek zainteresowań we współpracy ze szkołami wyższymi realizującymi projekt.

Grupa docelowa:

Grupę docelową stanowić będą uczniowie rozpoczynający naukę w kl. I w szkołach ponadgimnazjalnych (Liceum Ogólnokształcące, Liceum Profilowe, Technikum) w roku szkolnym 2010/11 zlokalizowanych na terenach woj. podkarpackiego, małopolskiego i lubelskiego. Wsparciem objętych zostanie około 6750 uczniów pochodzących z 177 szkół, którzy będą mieli możliwość podniesienia poziomu wiedzy z matematyki (dla uczniów słabych), jak również rozszerzenia wiedzy z zakresu matematyki (dla uczniów zdolnych). W każdym z trzech województw zostanie wybranych po 30 szkół do zajęć wyrównawczych i po 30 szkół do zajęć rozszerzających z zakresu matematyki. Dana szkoła może otrzymać wsparcie zarówno w zakresie zajęć wyrównawczych jak i rozszerzających. W zależności od potrzeb w szkole utworzonych zostanie od 2 do 4 grup 15 osobowych do zajęć wyrównawczych lub 2 grupy 15 osobowe do zajęć rozszerzających. Łączna liczba grup będzie wynosiła 450.

Uczniowie zakwalifikowani do udziału w projekcie uczestniczyć będą w nim przez 3 lata szkolne (od klasy pierwszej do klasy trzeciej).

Bibliografia

[1] *Moscow Mathematical Olympiads, 1993–1999.* Translation of the 2006 Russian original. Translated by Vladimir Dubrovsky and Dmitry Leites. Edited by Roman Fedorov, Alexei Belov, Alexander Kovaldzhi and Ivan Yashchenko; translation edited by Silvio Levy. MSRI Mathematical Circles Library, 4. Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. x+220 pp. ISBN: 978-0-8218-5363-4

[2] *Moscow Mathematical Olympiads, 2000–2005.* Partial translation of the 2006 Russian original. Translated by Vladimir Dubrovsky. Edited by Roman Fedorov, Alexei Belov, Alexander Kovaldzhi and Ivan Yashchenko; translation edited by Silvio Levy. MSRI Mathematical Circles Library, 7. Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, CA; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. viii+176 pp. ISBN: 978-0-8218-6906-2

Spis treści