Zależności między promieniami okręgów opisanego i wpisanego oraz obwodem trójkąta

Żywomir Dinew

Wszyscy doskonale znamy warunki na to, aby liczby rzeczywiste dodatnie $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ mogły być długościami boków trójkąta ABC. Są to nierówności

$$a + b > c, b + c > a, c + a > b.$$

Trójkąt jest jednoznacznie wyznaczony nie tylko przez boki. Musimy znać trzy jego parametry np. jeden bok i wielkość dwóch przylegających kątów, dwa boki i kąt pomiędzy nimi, etc. Trzema wielkościami wyznaczającymi jednoznacznie trójkąt są też

$$R - \text{promień okręgu opisanego na trójkącie}$$

$$r - \text{promień okręgu wpisanego w trójkąt}$$

$$p - \text{połowa obwodu trójkąta}, p = \frac{a+b+c}{2}$$

(połowę bierzemy ze względu na proste zapisywanie wzorów np. Herona).

Pytanie: Jakie warunki na R, r i $p \in \mathbb{R}_+$ gwarantują istnienie trójkąta ABC, dla którego p, r i R będą stosownie połową obwodu, promieniem okręgu wpisanego i promieniem okręgu opisanego?

Odpowiedź: Twierdzenie Blundona (1965 Canadian Mathematical Bulletin) R, r i p są jak wyżej. Istnienie trójkąta ABC jest równoważne nierównościom

$$2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr} \leqslant p^2 \leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R^2-2Rr}.$$

Ponadto jedna z równości zachodzi, gdy trójkąt jest równoramienny, a obie równości zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt jest równoboczny.

Poprawność wyrazów

Pewne wątpliwości może budzić, czy wyrażenia w nierównościach są poprawne. Widać, że aby tak było, musi być $R^2 - 2Rr \geqslant 0$.

Twierdzenie (Euler): Odległość miedzy środkiem (O) okręgu opisanego na trójkącie ABC, a środkiem (I) okręgu wpisanego w ten sam trójkąt ABC, wyraża się wzorem

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

Stąd $R^2 - 2Rr \geqslant 0$, a $R^2 - 2Rr = 0$ jest równoważne z tym, że $O \equiv I$, co daje nam, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Dowód twierdzenia Blundona: Zbudujmy wielomian $Q(x)$, trzeciego stopnia o pierwiastkach a, b i c (długościach boków trójkąta ABC). Dostajemy

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - 2px^2 + qx - t$$

$$2p = a+b+c, q = ab+bc+ca, t = abc.$$

Znamy wzory

$$\frac{abc}{4R} = Pole_{\Delta ABC} = pr.$$

Stąd

$$abc = 4Rpr.$$

Jak policzyć $ab+bc+ca$?

$$Q(p) = (p-a)(p-b)(p-c) = p^3 - 2pp^2 + qp - 4Rpr.$$

Stąd

$$p^2r^2 = (Pole_{\Delta ABC})^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) =$$
$$-p^4 + qp^2 - 4Rrp^2,$$

gdzie w drugiej równości wykorzystaliśmy wzór Herona. Stąd

$$q = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

Ostatecznie

$$Q(x) = x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rpr.$$

Ogólna teoria równań trzeciego stopnia. Dla równania

$$sx^3 + mx^2 + nx + t = 0$$

wprowadzamy wyróżnik "Δ",

$$"\Delta" = 18smnt - 4m^3t + m^2n^2 - 4sn^3 - 27s^2t^2.$$

W zależności od znaku "Δźachodzą trzy możliwości

$$"\Delta" > 0, \text{wtedy istnieją trzy różne pierwiastki rzeczywiste,}$$
$$"\Delta" = 0, \text{wtedy istnieje pierwiastek wielokrotny, ale wszystkie pierwiastki są rzeczywiste,}$$
$$"\Delta" < 0, \text{wtedy tylko jeden pierwiastek jest rzeczywisty.}$$

Teoria tego równania rozwinięta została przez del Ferro, Ferrariego i Tartaglię pod koniec średniowiecza.

W naszym przypadku po wyliczeniach dostajemy

$$0 \leqslant (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = "\Delta" = 4r^2\left(4R(R-2r)^3 - (p^2+r^2-10Rr-2R^2)^2\right).$$

Przy okzaji widzimy, że "Δ"$= 0$ jest równoważne temu, że ABC jest równoramienny. Upraszczając powyższą nierówność dostajemy

$$4R(R-2r)^3 \geqslant (p^2+r^2-10Rr-2R^2)^2.$$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Stąd

$$|p^2 + r^2 - 10Rr - 2R^2| \leqslant 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

Rozumowanie w drugą stronę jest podobne i w ten oto sposób udowodniliśmy twierdzenie Blundona.

W praktyce łatwiej się stosuje (i pamięta) nierówności, które są trochę słabsze od nierówności Blundona.

Twierdzenie: Zachodzi

$$16Rr - 5r^2 \leqslant p^2 \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2,$$

gdzie równości zachodzą tylko jednocześnie i tylko w przypadku trójkąta równobocznego.

Dowód: Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta ABC, a przez G punkt przecięcia środkowych (środek ciężkości). znamy wzory

$$0 \leqslant GI^2 = \frac{1}{9}(p^2 - 16Rr + 5r^2)$$

(stąd dostajemy nierówność lewą) oraz

$$o \leqslant IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$$

(stad dostajemy nierówność prawą).

Prawdą jest, że

$$16Rr - 5r^2 \leqslant 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leqslant p^2$$

$$\leqslant 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \leqslant 4R^2 + 4Rr + 3r^2.$$

Zastosowania:

Zastosowania twierdzenia Blundona i słabszej wersji nierówności Blundona znajdujemy w teorii nierówności symetrycznych z trzema niewiadomymi.

Proponujemy następujące 4 zadania:

1. Udowodnić nierówność dla $x, y, z \in R_+$

$$(x+y+z)^3 \geqslant 4(x+y)(y+z)(z+x) - 5xyz.$$

2. Udowodnić nierówność dla $x, y, z \in R_+$

$$27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \geqslant 64xyz(x+y+z)^2.$$

3. Udowodnić nierówność dla $x, y, z \in R_+$

$$\frac{8xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} + 2 \geqslant \frac{3(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2}.$$

4. Udowodnić nierówność dla $x, y, z \in R_+$

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}$$

(Jest to tak zwana " nierówność Irańska").

Szkic dodowu 1.(Pozostałe dowodzi się analogicznie.)

Skoro $x, y, z \geqslant 0$, to kładąc $x+y=a, y+z=b, z+x=c$ dostajemy liczby a, b i c, które są bokami trójkąta. Stąd

$$x+y+z=p$$
$$(x+y)(y+z)(z+x)=abc$$
$$xyz=(p-a)(p-b)(p-c).$$

Nierówność wyjściowa przekształca się do

$$p^3 \geqslant abc-5(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$p^3 \geqslant 16RPole_{\Delta ABC}-5\frac{Pole^2_{\Delta ABC}}{p}$$
$$p^3 \geqslant 16Rpr-5\frac{p^2r^2}{p}.$$

Ostatecznie sprowadziliśmy wyjściową nierówność do nierówności

$$p^2 \geqslant 16Rr-5r^2,$$

co już udowodniliśmy. CBDO.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281