KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały do zajęć Młodzieżowych Uniwersytetów Matematycznych

Kraków, wrzesień 2012

Zadania z motywem ślizgania

Tytułowe *Zadania z motywem ślizgania* to zadania o zbliżonej budowie. Zakładamy następującą sytuację: Dana jest linia L i figura F z wyróżnionymi punktami $P \in F \ni X$. Punkt P porusza się po krzywej L i wraz z nim porusza się figura F wykonując przy tym ruch w układzie związanym z punktem P.

Zadanie polega na opisaniu trajektorii (w dawnej terminologii miejsca geometrycznego punktów) zakreślanej przez punkt X.

Generalnie tego rodzaju zadania wymagają przy rozwiązywaniu aparatu matematycznego wykraczającego poza standardowe umiejętności uczniów liceum. Otrzymywane trajektorie mają równania przedstawiające krzywe przestępne, lub jeśli algebraiczne , to stopni wyższych niż drugi. Jednak w pewnych szczególnych przypadkach możliwe są rozwiązania oparte na rozumowaniach klasycznej geometrii elementarnej i celem niniejszego opracowania jest przedstawienie kilku z nich.

Zadanie 1.(Autor: Mikołaj Kopernik)
Po wewnętrznej stronie okręgu o promieniu R toczy się okrąg o promieniu $\frac{R}{2}$. Po jakiej linii porusza się ustalony punkt X mniejszego okręgu.

Odpowiedź: Po średnicy. Rozwiązanie wymaga znajomości definicji miary łukowej kąta i twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym. Kopernik udowodnił to twierdzenie by wykazać, że "kolebanie" może być wynikiem złożenia ruchów po okręgach. Analogiczne zadanie dla toczenia po zewnętrznej stronie prowadzi do krzywych algebraicznych wyższych stopni.

Zadanie 2. (Kijowskie Olimpiady Matematyczne ok. 75 lat temu)
Odcinek AB o stałej długości d "ślizga się" końcami po ramionach kąta prostego o wierzchołku O. Po jakiej linii porusza się środek X tego odcinka.

Odpowiedź: Przykażdym położeniu punktów $A i B$ trójkąt ABO jest trójkątem prostokątnym o stałej przyprostokątnej d i w każdym takim położeniu punkt X

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

jest środkiem koła opisanego na trójkącie ABO. Zatem poszukiwanym miejscem geometrycznym jest łuk okręku o ŕodku O i promieniu $\frac{d}{2}$ zawarty między ramionami danego kąta.

Możliwe są różne warianty tego zadania. Wybierając punkt X poza środkiem otrzymamy elipsę (elipsograf Leonarda da Vinci). Można też kąt prosty zamienić na inny i za punkt X wziąć środek okręgu opisanego na trójkącie ABO.

Zadanie 3. (Zbiory zadań z XIX w.)
Trójkąt prostokątny ABX ślizga się przeciwprostokątną AB po ramionach kąta prostego o wierzchołku O.Po jakiej linii porusza się wierzchołek X kąta prostego.

Odpowiedź: Przypuśćmy, że punkt A porusza się po osi OY a punkt B po osi OX i niech kąt ostry przy wierzchołku trójkąta ABX wynosi β. Wtedy poszukiwanym miejscem geometrycznym jest odcinek CD, gdzie C jest takim położeniem X gdy $A = O$ zaś D jest taki położeniem X , że $OAXB$ jest prostokątem. Rozwiązanie to wynika ze spostrzeżenia, że w każdym położeniu na czworokącie $OAXB$ można opisać okrąg.

Zadanie 4. (Lokalne zawody matematyczne sprzed lat)
Na osi OX wybrano punkt $A(a, 0)$ i $B(b, 0)$ gdzie $0 < a < b$. Punkt $Y(0, y)$ porysza się po osi OY. Przy jakim położeniu punktu Y kąt AYB jest największy.

Odpowiedź: Gdy $y = \sqrt{a \cdot b}$. Jest to typowe zadanie na optymalizację. Standardowe procedury związane z szukaniem ekstremum funkcji wymiernej (nierówność dla średnich, lub pochodne) prowadzą do podanego rozwiązania. Możliwe jest rozumowanie "czysto geometryczne" przez rozważenie okręgu o cięciwie AB stycznego do osi OY.

Edward Tutaj

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281