Piotr Niemiec

Skomplikowany świat (po) permutacji

11 czerwca 2011

Streszczenie. Wprowadzenie do teorii grup poprzez omówienie podstawowych wiadomości o grupie permutacji zbioru skończonego. Mnożenie (czyli składanie) permutacji. Rząd i znak permutacji jako przydatne narzędzia do rozwiązywania rozmaitych zadań o wykonalności (i sposobie wykonania) skomplikowanych operacji. Zapis permutacji w postaci rozłącznych cykli jako metoda upraszczająca rachunki. Obliczanie rzędu permutacji, dla której znamy rozkład na rozłączne cykle. Omówienie zagadnień na przykładzie poniższych zadań:

1. Dwóch chłopców, 17-latek i 11-latek, startują w drużynowym konkursie matematycznym. Każdy z nich dostał talię 24 kart. W pojedynczym ruchu każdy z chłopców odlicza (od góry) tyle kart, ile ma lat, po czym pierwszą i ostatnią kartę z talii przekłada do środka, w odliczone miejsce. Ich zadanie to ułożyć karty w obu taliach w taki sposób, w jakim znalazłyby się one po wykonaniu jednego miliona ruchów. Na wykonanie zadania mają 10 minut.

Wskazówka: Kolejne ruchy wykonywane przez chłopców to kolejne potęgi pewnych dwóch konkretnych permutacji (opisujących ruchy wykonywane przez chłopców) zbioru 24-elementowego odpowiadającego talii kart. Tak więc należy obliczyć potęgę dwóch permutacji o wykładniku 10^6. Wystarczy więc rozłożyć obie permutacje na rozłączne cykle, by obliczyć ich rząd, następnie wyliczyć resztę z dzielenia liczby 10^6 przez rzędy obu permutacji i zamiast wykonywać milion ruchów, wykonać ich tylko tyle, ile wynosi owa reszta, lub tyle ruchów "przeciwnych", ile wynosi "dopełnienie" reszty — w zależności od tego, która z tych liczb okaże się mniejsza.

2. Komputerowa wersja poprzedniego zadania — jedno kliknięcie to jeden ruch w obu taliach. Chłopcy mają ułożyć karty w obu taliach w taki sposób, w jakim znalazłyby się one po wykonaniu *n* ruchów, gdzie *n* to wiek jednego z chłopców (do wyboru) razy milion. Na wykonanie zadania mają 10 minut. Czyj wiek powinni wybrać: starszego czy młodszego?

Wskazówka: Tym razem mamy do czynienia z jedną permutacją (zbioru 48-elementowego) opisującą pojedynczy ruch obu chłopców na raz. Rząd takiej permutacji to $17 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 17017$. Reszta z dzielenia liczby $11 \cdot 10^6$ przez 17017 to 7018 [!] (w tej wersji gry nie możemy wykonywać ruchów "przeciwnych"), podczas gdy reszta z dzielenia liczby $17 \cdot 10^6$ przez 17017 to jedynie 17.

3. Stoisz przed wielkim regałem z wieloma skrytkami. W każdej z nich jest sztabka. Wszystkie wyglądają identycznie, ale tylko jedna jest ze złota. I ty nie wiesz która. Wiesz jednak, że jeśli uda ci się zamienić miejscami sztabki z dwóch pierwszych skrytek w taki sposób, że pozostałe zostaną na swoich miejscach, wtedy otworzy się ta skrytka, w której jest prawdziwe złoto. Nie jest to jednak takie proste:
   I. Na początku odblokowana jest tylko pierwsza skrytka. I zawsze, gdy pierwsza skrytka jest odblokowana, pozostałe są zablokowane. I odwrotnie — gdy wszystkie pozostałe są zablokowane, pierwsza ulega odblokowaniu.
   II. Pozostałe skrytki zostaną odblokowane (wszystkie na raz) zawsze i tylko wtedy, gdy wyjmiesz sztabkę z pierwszej skrytki. Wtedy też pierwsza skrytka zostanie zablokowana.
   III. Aby zablokować jedną z pozostałych skrytek, potrzeba i wystarcza zmienić jej zawartość.
   IV. Wszystkie skrytki zostaną bezpowrotnie zablokowane, jeżeli co najmniej dwie skrytki będą puste.
   Jak uważasz, warto próbować zamienić dwie sztabki w dwóch pierwszych skrytkach, czy będzie to tylko strata czasu?…
   Wskazówka: Dokładnie zgłębiając zasady "działania" skrytek, można stwierdzić, że operacje przez nas wykonywane można podzielić na "partie" składające się na pełne cykle (tj. permutacje bez punktów stałych, które są pojedynczymi cyklami). To, do czego zmierzamy, to zamiana zawartości jedynie pierwszych dwóch skrytek miejscami, czyli transpozycja. Tak więc problem polega na rozstrzygnięciu, kiedy pewna transpozycja jest iloczynem pełnych cykli. Okazuje się, że zależy to od liczebności zbioru, który permutujemy: jeśli liczba elementów tego zbioru jest nieparzysta, zadanie jest niewykonalne (bo wtedy pełne cykle mają znak 1, a transpozycja ma znak -1); jeśli zaś owa liczba jest parzysta, wtedy zadanie jest wykonalne, ale nie jest to wcale takie proste…

4. W klasycznej kostce Rubika środkowy klocek przy jednej z krawędzi obrócono o 180 stopni. Czy da się ułożyć taką kostkę Rubika?

Wskazówka: Jeśli wszystkie "ścianki" środkowych klocków przy krawędziach kostki Rubika (jest ich 12) uznamy za zbiór, który permutujemy, każdy obrót ściany kostki jest permutacją tego, zbioru, której znak okazuje się być zawsze równy 1. Natomiast operacja obrócenia jednego klocka (jak w treści zadania) to permutacja nieparzysta (czyli o znaku -1).

5. Tym razem w klasycznej kostce Rubika obrócono jeden z klocków narożnych. Czy używając tych samych argumentów co poprzednio, można rozstrzygnąć, czy taką kostkę da się ułożyć?

Wskazówka: Tym razem sprawa jest o wiele bardziej skomplikowana, gdyż obrót klocka narożnego jest (zawsze) permutacją parzystą (bez względu na to, co uznamy za permutowany zbiór), a więc żaden argument z użyciem samego tylko pojęcia znaku permutacji nie wystarczy, by rozwiązać zadanie. (Mimo to wiadomo, że takiej kostki ułożyć się nie da. Można to stwierdzić, badając tzw. *niezmienniki* specyficzne dla kostki Rubika).