# O równaniach

Dominik Kwietniak

Kraków, 28 kwietnia 2012

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Dominik Kwietniak

# O równaniach

Szkolny program matematyki zawiera niewiele informacji o równaniach wielomianowych postaci $p(x) = 0$. Nieśmiertelne delta równa się be kwadrat minus cztery a ce zdaje się wyczerpywać całą wiedzę przeciętnego ucznia szkoły średniej. Poniżej chciałem omówić parę zagadnień, które mogą stanowić uzupełnienie i rozszerzenie dla szkolnej wiedzy o tych równaniach.

## Starożytni

Następujące zadanie pochodzi od Herona z Aleksandrii.

> Znaleźć bok kwadratu, którego suma pola i obwodu wynosi 896.

Zamiast rozwiązywać to zadanie metodą szkolną posłużymy się metodą dopełnienia do kwadratu, która dla wielu jest bardziej naturalna.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= 896 \qquad\qquad\qquad\qquad / + 4 \\ x^2 + 4x + 4 &= 900 \\ (x+2)^2 &= 30^2 \\ x + 2 &= 30 \\ x &= 28. \end{aligned}$$

Zauważmy, że ponieważ poszukiwaliśmy *długości* boku kwadratu zignorowaliśmy ujemne rozwiązanie równania $(x+2)^2 = 30^2$.

## Tartaglia

Rozwiązując równanie

$$x^3 + ax = b,$$

gdzie $a$ i $b$ są dodatnimi współczynnikami posłużymy się geometryczną metodą pochodzącą od Nicolo Fontany zwanego Tartaglią.

Wyobraźmy sobie sześcian o krawędzi $A$. Z tego sześcianu wycinamy sześcian o krawędzi $B$ mający wspólny róg z pierwszym. Następnie wycinamy możliwie największy sześcian o krawędzi $x$, który ma wspólny wierzchołek z wyjściowym sześcianem a naprzeciwległy jego wierzchołek jest wierzchołkiem wyciętego sześcianu leżącym wewnątrz wyjściowego. To co pozostało z dużego sześcianu możemy teraz podzielić na trzy prostopadłościany o krawędziach $A$, $B$ oraz $x$. Mamy zatem $A^3 = B^3 + x^3 + 3ABx$, czyli

$$x^3 + 3ABx = A^3 - B^3.$$

Ponadto wiemy, że $x = A - B$. Jeżeli przyjmiemy, że $A^3 - B^3 = b$ oraz $3AB = a$, to możemy nasz problem geometryczny uważać za odpowiednik naszego równania algebraicznego. Wystarczy tylko znaleźć $A$ i $B$ mając dane $a$ i $b$ oraz wyznaczyć $x$ z równania $x = A - B$. Ponieważ łatwiej nam będzie najpierw znaleźć $A^3$ i $B^3$, więc oznaczmy $u = A^3$, $v = B^3$. Wówczas

$$uv = \frac{a^3}{27} \quad \text{i} \quad u - v = b,$$

skąd

$$u(u-b) = \frac{a^3}{27}, \quad \text{czyli} \quad u^2 - bu - \frac{a^3}{27} = 0.$$

Ostatnie równanie łatwo rozwiązać. Otrzymamy

$$u = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{q}{2},$$

a zatem

$$v = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{q}{2}.$$

Ostatecznie

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Metoda Tartaglii doskonale ilustruje związek między geometrią a algebrą, co kontrastuje silnie z praktyką szkolną, która zdaje się atomizować i rozdzielać zagadnienia geometryczne od algebraicznych.