Od Euklidesa do Galois:

o tym, co da się rozwiązać i o tym, co da się skonstruować

Jakub Byszewski

8 października 2011

Równanie $x^3 = 3x + 4$

Rozwiążemy równanie $x^3 = 3x + 4$.

Równanie $x^3 = 3x + 4$

Rozwiążemy równanie $x^3 = 3x + 4$.
Podstawmy w naszym równaniu

$$x = u + v.$$

Równanie $x^3 = 3x + 4$

Rozwiążemy równanie $x^3 = 3x + 4$.
Podstawmy w naszym równaniu

$$x = u + v.$$

Otrzymujemy

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 3(u + v) + 4.$$

Rozwiążemy równanie $x^3 = 3x + 4$.
Podstawmy w naszym równaniu

$$x = u + v.$$

Otrzymujemy

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 3(u + v) + 4.$$

Aby równanie to było spełnione wystarczy, że:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 4, \\ 3uv = 3. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyliczamy $v = 1/u$.

Równanie $x^3 = 3x + 4$

Rozwiążemy równanie $x^3 = 3x + 4$.
Podstawmy w naszym równaniu

$$x = u + v.$$

Otrzymujemy

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 3(u + v) + 4.$$

Aby równanie to było spełnione wystarczy, że:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 4, \\ 3uv = 3. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyliczamy $v = 1/u$. Postawiając do pierwszego równania dostajemy równanie

$$(u^3)^2 - 4u^3 + 1 = 0.$$

Równanie $x^3 = 3x + 4$

Rozwiążemy równanie $x^3 = 3x + 4$.
Podstawmy w naszym równaniu

$$x = u + v.$$

Otrzymujemy

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 3(u + v) + 4.$$

Aby równanie to było spełnione wystarczy, że:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 4, \\ 3uv = 3. \end{cases}$$

Z drugiego równania wyliczamy $v = 1/u$. Postawiając do pierwszego równania dostajemy równanie

$$(u^3)^2 - 4u^3 + 1 = 0.$$

Dostajemy stąd

$$u = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$$

i zatem

$$v = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}.$$

Ostatecznie

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}.$$

Liczby algebraiczne

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1.

$$3,$$

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1},$$

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1}, \sqrt[3]{2},$$

Liczby algebraiczne

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1}, \sqrt[3]{2},$$

2. $$\frac{2+\sqrt{7}}{13},$$

Liczby algebraiczne

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1}, \sqrt[3]{2},$$
2. $$\frac{2+\sqrt{7}}{13},$$
3. $$\frac{\frac{2}{3}+\sqrt[7]{23}}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[11]{2}},$$

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1}, \sqrt[3]{2},$$
2. $$\frac{2+\sqrt{7}}{13},$$
3. $$\frac{\frac{2}{3}+\sqrt[7]{23}}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[11]{2}},$$
4. $$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1}, \sqrt[3]{2},$$
2. $$\frac{2+\sqrt{7}}{13},$$
3. $$\frac{\frac{2}{3}+\sqrt[7]{23}}{\sqrt[5]{3}+\sqrt[11]{2}},$$
4. $$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$
5. $$\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Liczby algebraiczne

Definicja: Liczba algebraiczna to liczba zespolona $z \in \mathbf{C}$ spełniająca równanie postaci:

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. $$3, i = \sqrt{-1}, \sqrt[3]{2},$$
2. $$\frac{2+\sqrt{7}}{13},$$
3. $$\frac{\frac{2}{3} + \sqrt[7]{23}}{\sqrt[5]{3} + \sqrt[11]{2}},$$
4. $$e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$
5. $$\cos\frac{2\pi}{n}.$$

Liczby algebraiczne tworzą ciało.

Ciała liczbowe

Definicja: Ciałem liczb zespolonych nazywamy dowolny podzbiór $K \subset \mathbf{C}$ zawierający liczby wymierne i zamknięty ze względu na działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Definicja: Ciałem liczb zespolonych nazywamy dowolny podzbiór $K \subset \mathbf{C}$ zawierający liczby wymierne i zamknięty ze względu na działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Przykłady:

1. Liczby wymierne $\mathbf{Q}$ tworzą ciało,

Definicja: Ciałem liczb zespolonych nazywamy dowolny podzbiór $K \subset \mathbf{C}$ zawierający liczby wymierne i zamknięty ze względu na działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Przykłady:

1. Liczby wymierne $\mathbf{Q}$ tworzą ciało,
2. Liczby postaci
$$a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,

Definicja: Ciałem liczb zespolonych nazywamy dowolny podzbiór $K \subset \mathbf{C}$ zawierający liczby wymierne i zamknięty ze względu na działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Przykłady:

1. Liczby wymierne $\mathbf{Q}$ tworzą ciało,
2. Liczby postaci
$$a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,
3. Liczby postaci
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, \quad a, b, c \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$,

Definicja: Ciałem liczb zespolonych nazywamy dowolny podzbiór $K \subset \mathbf{C}$ zawierający liczby wymierne i zamknięty ze względu na działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Przykłady:

1. Liczby wymierne $\mathbf{Q}$ tworzą ciało,
2. Liczby postaci
$$a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,
3. Liczby postaci
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, \quad a, b, c \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$,

Definicja: Ciało generowane przez liczby algebraiczne $z_1, z_2, \ldots, z_n$ to najmniejsze ciało $K \subseteq \mathbf{C}$ zawierające $z_1, \ldots, z_n$. Oznaczamy je $\mathbf{Q}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Składa się ono z liczb, które można otrzymać z liczb $z_1, \ldots, z_n$ przez działania algebraiczne.

Definicja: Ciałem liczb zespolonych nazywamy dowolny podzbiór $K \subset \mathbf{C}$ zawierający liczby wymierne i zamknięty ze względu na działania algebraiczne: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie.

Przykłady:

1. Liczby wymierne $\mathbf{Q}$ tworzą ciało,
2. Liczby postaci
$$a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$,
3. Liczby postaci
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, \quad a, b, c \in \mathbf{Q}$$
tworzą ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$,

Definicja: Ciało generowane przez liczby algebraiczne $z_1, z_2, \ldots, z_n$ to najmniejsze ciało $K \subseteq \mathbf{C}$ zawierające $z_1, \ldots, z_n$. Oznaczamy je $\mathbf{Q}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Składa się ono z liczb, które można otrzymać z liczb $z_1, \ldots, z_n$ przez działania algebraiczne.

Definicja: Ciało liczbowe to ciało generowane przez skończenie wiele liczb algebraicznych.

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Q}\,.$$

2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\sqrt{3} + e\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + f\sqrt[3]{4}\sqrt{3}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Q}\,.$$
2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\sqrt{3} + e\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + f\sqrt[3]{4}\sqrt{3}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}\,.$$
3. (*Ciało cyklotomiczne*) Ciało $\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ składa się z elementów postaci
$$a_0 + a_1 e^{\frac{2\pi i}{n}} + a_2 e^{\frac{4\pi i}{n}} + \ldots + a_{n-1} e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Q}\,.$$

2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\sqrt{3} + e\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + f\sqrt[3]{4}\sqrt{3}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}\,.$$

3. (*Ciało cyklotomiczne*) Ciało $\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ składa się z elementów postaci

$$a_0 + a_1 e^{\frac{2\pi i}{n}} + a_2 e^{\frac{4\pi i}{n}} + \ldots + a_{n-1} e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

4. Ciało $\mathbf{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})$ składa się z elementów postaci

$$a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{n} + a_2 \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + a_{n-1} \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Ciała liczbowe

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Q}\,.$$
2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$ składa się z elementów postaci
$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\sqrt{3} + e\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + f\sqrt[3]{4}\sqrt{3}, \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}\,.$$
3. (*Ciało cyklotomiczne*) Ciało $\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ składa się z elementów postaci
$$a_0 + a_1 e^{\frac{2\pi i}{n}} + a_2 e^{\frac{4\pi i}{n}} + \ldots + a_{n-1} e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$
4. Ciało $\mathbf{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$ składa się z elementów postaci
$$a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi}{n} + a_2 \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + a_{n-1} \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}, \quad a_i \in \mathbf{Q}\,.$$

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Definicja: Ciało liczbowe nazywamy ciałem Galois, jeśli wraz z każdą liczbą algebraiczną zawiera wszystkie liczby algebraiczne z nią sprzężone.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Definicja: Ciało liczbowe nazywamy ciałem Galois, jeśli wraz z każdą liczbą algebraiczną zawiera wszystkie liczby algebraiczne z nią sprzężone.

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ jest Galois; wraz z $\sqrt{2}$ zawiera także $-\sqrt{2}$.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Definicja: Ciało liczbowe nazywamy ciałem Galois, jeśli wraz z każdą liczbą algebraiczną zawiera wszystkie liczby algebraiczne z nią sprzężone.

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ jest Galois; wraz z $\sqrt{2}$ zawiera także $-\sqrt{2}$.
2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest Galois; zawiera $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ale także wszytkie liczby z nią sprzężone: $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Definicja: Ciało liczbowe nazywamy ciałem Galois, jeśli wraz z każdą liczbą algebraiczną zawiera wszystkie liczby algebraiczne z nią sprzężone.

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ jest Galois; wraz z $\sqrt{2}$ zawiera także $-\sqrt{2}$.
2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest Galois; zawiera $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ale także wszytkie liczby z nią sprzężone: $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
3. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ nie jest Galois; liczbą sprzężoną z $\sqrt[3]{2}$ jest $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})$, nie leży jednak ona w naszym ciele.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Definicja: Ciało liczbowe nazywamy ciałem Galois, jeśli wraz z każdą liczbą algebraiczną zawiera wszystkie liczby algebraiczne z nią sprzężone.

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ jest Galois; wraz z $\sqrt{2}$ zawiera także $-\sqrt{2}$.
2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest Galois; zawiera $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, ale także wszytkie liczby z nią sprzężone: $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$.
3. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ nie jest Galois; liczbą sprzężoną z $\sqrt[3]{2}$ jest $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})$, nie leży jednak ona w naszym ciele.
4. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}}) = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ jest Galois.

Liczby sprzężone

Definicja: Liczby algebraiczne nazywamy sprzężonymi, jeśli spełniają one to samo równanie minimalnego stopnia:

Przykład:

1. Liczby $\sqrt{2}$ oraz $-\sqrt{2}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^2 = 2$.
2. Liczby $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ oraz $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.
3. Liczby $\sqrt[3]{2}$ oraz $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}}$ są sprzężone; spełniają one to samo równanie $x^3 = 2$.
4. Liczby $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ oraz $e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.
5. Liczby $\cos\frac{2\pi}{n}$ oraz $\cos\frac{2k\pi}{n}$ są sprzężone dla k względnie pierwszego z n.

Definicja: Ciało liczbowe nazywamy ciałem Galois, jeśli wraz z każdą liczbą algebraiczną zawiera wszystkie liczby algebraiczne z nią sprzężone.

Przykłady:

1. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ jest Galois; wraz z $\sqrt{2}$ zawiera także $-\sqrt{2}$.
2. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ jest Galois; zawiera $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, ale także wszytkie liczby z nią sprzężone: $\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ oraz $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$.
3. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ nie jest Galois; liczbą sprzężoną z $\sqrt[3]{2}$ jest $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi i}{3}} = \sqrt[3]{2}(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2})$, nie leży jednak ona w naszym ciele.
4. Ciało $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}}) = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ jest Galois.
5. Ciało cyklotomiczne $\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ jest Galois.

Automorfizmy

Definicja: Automorfizmem ciała liczbowego K nazywamy odwzorowanie $\sigma\colon K \longrightarrow K$, które jest przemienne z dodawaniem i mnożeniem i spełnia własność $\sigma(1) = 1$.

Automorfizmy

Definicja: Automorfizmem ciała liczbowego K nazywamy odwzorowanie $\sigma\colon K \to K$, które jest przemienne z dodawaniem i mnożeniem i spełnia własność $\sigma(1) = 1$.

Przykłady:

1. Odwzorowanie identycznościowe jest automorfizmem dowolnego ciała K

Automorfizmy

Definicja: Automorfizmem ciała liczbowego K nazywamy odwzorowanie $\sigma\colon K \to K$, które jest przemienne z dodawaniem i mnożeniem i spełnia własność $\sigma(1) = 1$.

Przykłady:

1. Odwzorowanie identycznościowe jest automorfizmem dowolnego ciała K.
2. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

Automorfizmy

Definicja: Automorfizmem ciała liczbowego K nazywamy odwzorowanie $\sigma\colon K \to K$, które jest przemienne z dodawaniem i mnożeniem i spełnia własność $\sigma(1) = 1$.

Przykłady:

1. Odwzorowanie identycznościowe jest automorfizmem dowolnego ciała K.
2. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
3. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Automorfizmy

Definicja: Automorfizmem ciała liczbowego K nazywamy odwzorowanie $\sigma\colon K \to K$, które jest przemienne z dodawaniem i mnożeniem i spełnia własność $\sigma(1) = 1$.

Przykłady:

1. Odwzorowanie identycznościowe jest automorfizmem dowolnego ciała K.
2. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
3. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.Inne automorfizmy to
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$
oraz
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}.$$

Automorfizmy

Definicja: Automorfizmem ciała liczbowego K nazywamy odwzorowanie $\sigma\colon K \to K$, które jest przemienne z dodawaniem i mnożeniem i spełnia własność $\sigma(1) = 1$.

Przykłady:

1. Odwzorowanie identycznościowe jest automorfizmem dowolnego ciała K.
2. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.
3. Odwzorowanie
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$
jest automorfizmem ciała $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.Inne automorfizmy to
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$$
oraz
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mapsto a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}.$$
4. Automorfizmy ciała cyklotomicznego $\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ mają postać
$$\sigma_k\colon e^{\frac{2\pi i}{n}} \mapsto e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$
dla dowolnego k względnie pierwszego z n.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.
2. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma cztery elementy.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.
2. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma cztery elementy.
3. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})) \simeq S_3$ ma sześć elementów.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.
2. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma cztery elementy.
3. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})) \simeq S_3$ ma sześć elementów.
4. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ ma $\varphi(n)$ elementów, gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą liczb całkowitych $1 \leqslant k \leqslant n$ względnie pierwszych z n.

Grupy Galois

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.
2. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma cztery elementy.
3. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})) \simeq S_3$ ma sześć elementów.
4. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ ma $\varphi(n)$ elementów, gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą liczb całkowitych $1 \leqslant k \leqslant n$ względnie pierwszych z n.
5. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ ma $\varphi(n)/2$ elementów, $n \geqslant 3$.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.
2. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma cztery elementy.
3. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})) \simeq S_3$ ma sześć elementów.
4. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ ma $\varphi(n)$ elementów, gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą liczb całkowitych $1 \leqslant k \leqslant n$ względnie pierwszych z n.
5. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ ma $\varphi(n)/2$ elementów, $n \geqslant 3$.
6. Niech ζ będzie rozwiązaniem równania $z^5 = z + 1$, K - najmniejszym ciałem Galois zawierającym ζ. Wówczas $\mathrm{Gal}(K) \simeq S_5$ ma 120 elementów.

Definicja: Grupą Galois ciała Galois K nazywamy zbiór wszystkich automorfizmów tego ciała wraz z działaniem składania.

1. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma dwa elementy.
2. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})) \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ma cztery elementy.
3. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})) \simeq S_3$ ma sześć elementów.
4. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(e^{\frac{2\pi i}{n}})) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ ma $\varphi(n)$ elementów, gdzie $\varphi(n)$ jest liczbą liczb całkowitych $1 \leqslant k \leqslant n$ względnie pierwszych z n.
5. Grupa Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\cos(\frac{2\pi}{n}))) \simeq (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*/\{\pm 1\}$ ma $\varphi(n)/2$ elementów, $n \geqslant 3$.
6. Niech ζ będzie rozwiązaniem równania $z^5 = z + 1$, K - najmniejszym ciałem Galois zawierającym ζ. Wówczas $\mathrm{Gal}(K) \simeq S_5$ ma 120 elementów.