

Młodziwe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Andrzej Grzesik

Gry (nie)losowe

Artykuł będzie dotyczył gier losowych, czyli takich, gdzie o naszej wygranej decyduje łut szczęścia. Zastanowimy się, czy w pewien sposób jesteśmy poprawić nasze szanse na wygraną. Na tapetę weźmiemy kilka popularnych gier losowych.

1. DUŻY LOTEK

Chyba prawie każdy grał kiedyś w Dużego Lotka. Niemniej i tak, pokrótce, przypomnijmy zasady.

Gracz wybiera 6 liczb spośród 49. Pojedynczy kupon kosztuje 2 zł, z czego 1,60 zł trafia do „Totka”, a 0,40 zł na rozwój kultury fizycznej oraz wspieranie kultury narodowej. Losowanych jest również 6 liczb. Na wygrane przeznaczane jest 51% puli pieniędzy. Z czego 36% rozdzielane jest pomiędzy tych, którzy poprawnie wytypowali 6 liczb, 10% dla tych, którzy trafili 5. Natomiast reszta dzielona jest pomiędzy tych, którzy wytypowali 3 lub 4 liczby, przy czym za trafioną „trójkę” dostaje się 16 zł. Trzeba tu też dodać, że od wygranych powyżej 2280 zł należy uiścić 10% podatku. W przypadku, gdy nikt nie trafił szóstki, to kwota na nią przeznaczona przechodzi na następne losowanie i zwiększa tylko kwotę przeznaczoną za szóstkę.

Przyjrzyjmy się, jakie mamy szanse na wygraną:

liczba trafień	przybliżone prawd. wygranej
6	1 : 13 983 816 \approx 0,0000072%
5	1 : 54 201 \approx 0,0018%
4	1 : 1 032 \approx 0,097%
3	1 : 57 \approx 1,77%
2	1 : 7,5 \approx 13,2%
1	1 : 2,4 \approx 41,3%
0	1 : 2,3 \approx 43,6%

Czyli prawdopodobieństwo trafienia co najmniej trójki wynosi około 1 : 53,7 \approx 1,86%.

Łatwo policzyć, że bez kumulacji wartość oczekiwana wygranej na kuponie wynosi około 0,78 zł. Oznacza to, że realna kwota przeznaczona na wygrane dla graczy to tylko **39%**.

W Dużym Lotku możliwe są też inne rodzaje zakładów: zakłady wielolosowaniowe oraz zakłady systemowe. Niestety kwota, którą płaci się za taki zakład odpowiada liczbie pojedynczych zakładów, na które taki zakład się składa. Zatem w ten sposób nie zwiększymy swojej szansy na wygraną.

Zakładając, że w kolejnych losowaniach bierze udział taka sama liczba ludzi, z każdą kumulacją możemy do wartości oczekiwanej wygranej na kuponie doliczyć dodatkowych około 0,26 zł. Po pięciu kumulacjach oczekiwany zwrot z kuponu wynosi około 2,08 zł. Problem w tym, że od roku 2001 pięciokrotna kumulacja zdarzyła się tylko 5 razy. Natomiast w całej historii Dużego Lotka sześciokrotna kumulacja zdarzyła się tylko dwa razy (oba w 2008 roku), a siedmiokrotna tylko raz (w 2008 roku). Czy to oznacza, że trzeba czekać na wielokrotną kumulację i gra wtedy już się będzie opłacać? Nie do końca...

Korzystając z tej tabeli można policzyć wartość oczekiwaną wygranej na kuponie podzieloną przez cenę kuponu (i uwzględniającą 10% podatek od nagród powyżej 2280 zł), czyli procentową część wpłaconej kwoty przeznaczonej dla graczy. Zostało to przedstawione w poniższej tabeli:

Gra	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
MM	33,2%	40,7%	40,7%	40,4%	41,1%	41,2%	41,2%	41,1%	38,5%	40,0%
MMP	43,0%	42,3%	42,4%	43,4%	43,4%	43,1%	43,5%	43,3%	43,2%	42,0%
Keno	45,2%	45,1%	45,2%	46,6%	46,6%	46,5%	46,5%	46,2%	43,3%	42,9%

Widać, że w najlepszym przypadku, dla gracza zostaje w Multi Multi **41,2%**, w Multi Multi Plus **43,5%**, a w Keno **46,6%**. Czyli, niezależnie od taktyki, średnio ponad połowę wpłaconych pieniędzy przegrywamy...

3. RULETKA

Może w kasynie pójdzie nam lepiej. A jeśli kasyno, to musi być ruletka. W powszechnym użyciu są dwa rodzaje ruletki – amerykańska i europejska. Każde koło ruletki ma liczby od 1 do 36 oraz jedno zero (w ruletce europejskiej) lub dwa zera (w ruletce amerykańskiej). W ruletce można obstawiać następujące sytuacje:

- pojedynczy numer — wygrana 35:1
- dwa numery — 17:1
- trzy numery — 11:1
- cztery numery — 8:1
- sześć numerów — 5:1
- kolumna — 2:1
- tuzin (1–12, 13–24 lub 25–36) — 2:1
- parzyste, nieparzyste — 1:1
- małe (1-18) lub duże (19-36) numery — 1:1
- czerwone, czarne — 1:1

Wygrana postaci $k:1$ oznacza, że stawiając na taki zakład 1 zł, albo ją przegrywamy, albo wyjdziemy k złotych na plus.

Rozkład wypłat za poszczególne wygrane i sposób obstawiania przedstawiony jest na rysunku stołu do europejskiej ruletki.

Zauważmy, że wypłaty są tak skonstruowane, że dla zakładu obejmującego k liczb wypłata wynosi

$$\frac{36}{k} - 1 : 1.$$

Zatem wartość oczekiwana dowolnej gry wynosi w ruletce amerykańskiej

$$\left(\frac{36}{k} - 1\right) \frac{k}{38} - 1 \frac{38 - k}{38} = -\frac{2}{38} \approx -5,3\%,$$

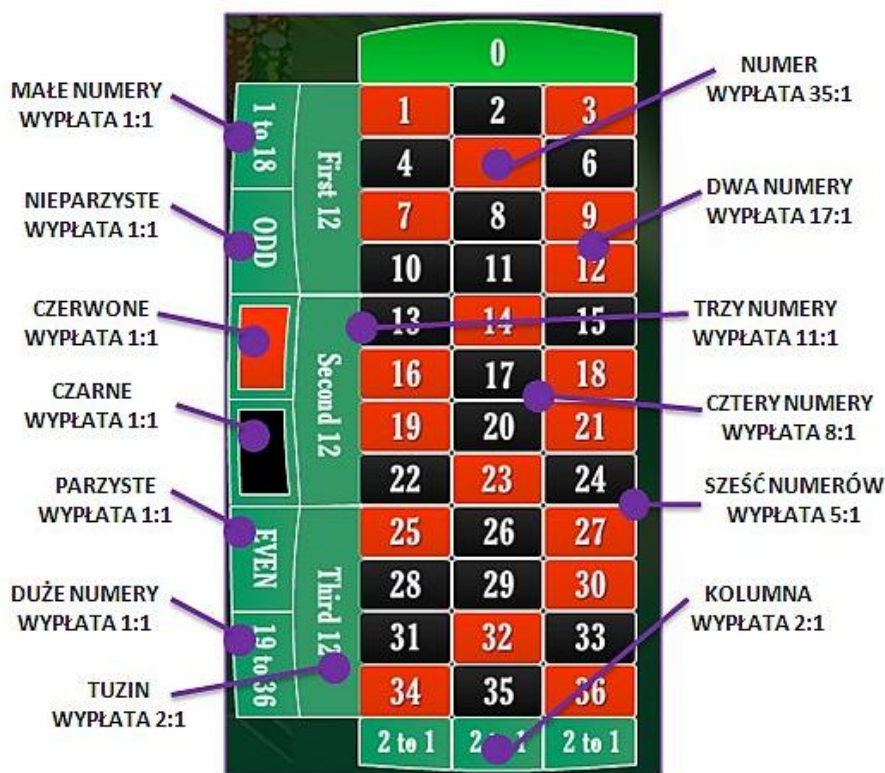
a w europejskiej

$$\left(\frac{36}{k} - 1\right) \frac{k}{37} - 1 \frac{37 - k}{37} = -\frac{1}{37} \approx -2,7\%,$$

razy stawka. Oznacza to, że w ruletce amerykańskiej dla gracza zostaje średnio **94,7%**, a w europejskiej **97,3%** stawki. Ewidentnie jest to dużo więcej niż w „Totolotku”.

Czy da się poprawić ten wynik?

Albert Einstein powiedział kiedyś „nie wygrasz w ruletkę dopóki nie zaczniesz kraść żetonów ze stołu”. Jest to prawdziwe zdanie, gdyż jak wykazaliśmy, wartość oczekiwana każdej gry jest ujemna, więc stosując jakikolwiek system, zawsze będziemy mieć ujemną wartość oczekiwaną wygranej. Tak więc matematyka nam tu nie pomoże. Pozostaje jeszcze np. fizyka. Zauważmy, że przecież ruletka nie jest idealna, mogą się zdarzać pewne odchyły, nierówności koła, itp. Wszystko to wpływa na prawdopodobieństwo wylosowanych liczb i pewne liczby mogą być częściej losowane niż inne. Doświadczalnie



sprawdził to Hiszpan Gonzalo Garcia-Pelayo w latach 90-tych, który modelował tendencje koła ruletki w Casino de Madrit i wraz z członkami rodziny wygrał ponad milion dolarów. Niestety, obecnie wszystkie koła ruletki w kasynach są komputerowo monitorowane i jeśli występują za duże odchylenia od normy, to koło jest zmieniane.

Niemniej, oszukiwać się da dalej. Dwóch Serbów i Węgień w 2004 roku za pomocą komórki ze skanerem laserowym szacowali prędkość kątową poruszania się kulki i w ten sposób przewidywali sektor, w którym kulka się zatrzyma. Zgarnęli 1,3 miliona funtów. Zostali oskarżeni i stanęli przed sądem, ale zostali uniewinnieni, ponieważ wykazano, że ich sprzęt nie wpływał na wyniki. Obecnie, kasyna zakazują używania wszelkiego sprzętu elektronicznego...

W ruletkę można też grać przez internet. Te gry dają nam dodatkową korzyść – internetowe kasyna, by przyciągnąć nowych klientów, oferują wiele bonusów. Standardowo bonus jest procentowy od pierwszej wpłaty, ale dodatkowo ograniczony z góry. Żeby gracze nie rejestrowali się i od razu zabierali pieniądze wraz z bonusem, kasyna zabezpieczają się wymagając pewien obrót – albo samą kwotą bonusową, albo pełną wpłatą wraz bonusem. Przykładowe bonusy:

- CasinoEuro
bonus 50%, maksymalnie 111 EUR, obrót $10 \times (W+B)$,
- EuroGrand
bonus 300%, maksymalnie 300 EUR, obrót $12 \times (W+B)$,
bonus 200%, maksymalnie 600 EUR, obrót $12 \times (W+B)$,
bonus 50%, maksymalnie 1000 EUR, obrót $12 \times (W+B)$,
- Sportingbet Casino
bonus 100%, maksymalnie 150 EUR, obrót $25 \times B$,
- Bwin Casino
bonus 50%, maksymalnie 200 EUR, obrót $40 \times B$.

Poprzez proste przeliczenie, możemy się przekonać, że w ruletce europejskiej

- bonus 50% opłaca się, gdy wymagany jest obrót co najwyżej $12 \times (W+B)$,
- bonus 100% opłaca się, gdy wymagany jest obrót co najwyżej $16 \times (W+B)$.

Natomiast w ruletce amerykańskiej

- bonus 50% opłaca się, gdy wymagany jest obrót co najwyżej $6 \times (W+B)$,
- bonus 100% opłaca się, gdy wymagany jest obrót co najwyżej $9 \times (W+B)$.

Zatem, zgodnie z matematyką, jesteśmy w stanie na tych bonusach zarobić! Niestety ograniczenia górne na wielkość bonusu oraz to, że można go dostać tylko raz (jako nowy klient) powodują, że milionów tak się nie dorobimy.

4. BLACKJACK

Inną popularną grą w kasynach jest Blackjack. Jest to gra karciana, w której trzeba uzyskać jak najwięcej, ale nie więcej niż 21 punktów. Wartości kart:

- karty od 2 do 9 mają wartość równą swojej wartości,
- 10, Walet, Dama i Król mają wartość równą 10 punktów,
- As ma wartość równą 1 lub 11, w zależności, co jest lepsze dla gracza.

Przebieg gry jest następujący. Po postawieniu żetonów na konkretną sumę pieniędzy, rozdawane są po dwie karty. Odkryta jest jedna karta krupiera oraz dwie karty gracza. Następnie gracz może:

- dobrać kartę (*hit*),
- nie dobrać kart (*stand*),
- podwoić stawkę (*double*) – tylko przy dwóch kartach; dostaje się 1 dodatkową kartę,
- rozdziwić (*split*) – tylko gdy obie karty są tej samej wartości; trzeba dołożyć drugą stawkę i można dobrać do obu,
- ubezpieczyć (*insurance*) – tylko gdy kartą krupiera jest As; można postawić dodatkowo połowę stawki, że krupier ma Blackjacka (wygrana płacona w stosunku 2 do 1).

Jeżeli gracz po dobraniu kart ma więcej niż 21 punktów, to przegrywa. Jeżeli ma 21 punktów lub mniej, to krupier odkrywa swoją kartę i dobiera, aż będzie miał co najmniej 17 punktów. Wygrywa ten, który ma sumę punktów bliższą lub równą 21. w przypadku remisu stawki są zwracane. Wygrana płacona jest w stosunku 1:1, natomiast jeśli gracz wygra mając blackjacka to otrzymuje wypłatę w stosunku 3:2.

Przewaga kasyna nad graczem zależy od strategii gracza oraz specyficznych ustaleń gry (np. liczby talii). Przy standardowych ustaleniach, jeśli gracz gra strategią krupiera, to przewaga kasyna wynosi ok. 5,5%. Jeśli gracz gra strategią *never bust*, czyli stopuje, gdy ma co najmniej 12, to przewaga kasyna wynosi tylko ok. 3,9%. Ale, strategię można też opracować dokładniej. Wystarczy policzyć jaka jest wartość oczekiwana gry dla konkretnych odsłoniętych kart gracza oraz karty krupiera. Przeliczając, możemy opracować tabelkę, która będzie obrazować naszą strategię.

Stosując tą strategię jesteśmy w stanie zmniejszyć przewagę kasyna do ok. 0,5%. Oznacza to, że dla gracza pozostaje średnio **99,5%** stawki. To jest jak dotychczas najlepszy wynik, ale czy da się lepiej?

Zauważmy jeszcze jedną rzecz – nie gramy losowymi liczbami, lecz kartami. Jeśli już poszło kilka asów, to szansa, że wyciągniemy teraz kolejnego asa jest mniejsza. Innym słowem – możemy w pewien sposób zliczać karty jakie poszły i w zależności od tego, modyfikować swoją strategię. Jedną z takich metod zliczania jest Metoda Hi-Lo. Polega ona na tym, że w trakcie gry liczymy tzw. *wartość bieżąca*, sumując wartości kart, które już zostały rozdane, przyjmując, że

- karty 2-6 mają wartość +1,
- karty 7-9 mają wartość 0,
- pozostałe karty mają wartość -1.

Korzystając z niej, definiujemy tzw. *wartość prawdziwą*, jako stosunek wartości bieżącej do liczby talii kart pozostałych do rozdania. Przewaga kasyna w zależności od wartości prawdziwej ukazana jest w poniższej tabelce.

Wartość prawdziwa	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Przewaga kasyna	3%	2,5%	2%	1,5%	1%	0,5%	0%	-0,5%	-1%	-1,5%	-2%

Karty gracza	Karta krupiera									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	A
5,6,7,8	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
9	H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
10	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
11	D	D	D	D	D	D	D	D	D	H
12	H	H	S	S	S	H	H	H	H	H
13	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
14	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
15	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
16	S	S	S	S	S	H	H	H	H	H
17+	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A-2	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
A-3	H	H	H	D	D	H	H	H	H	H
A-4	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A-5	H	H	D	D	D	H	H	H	H	H
A-6	H	D	D	D	D	H	H	H	H	H
A-7	S	D	D	D	D	S	H	H	H	H
A-8	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A-9	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
A-A	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
2-2	P	P	P	P	P	P	H	H	H	H
3-3	P	P	P	P	P	P	H	H	H	H
4-4	H	H	H	P	P	H	H	H	H	H
5-5	D	D	D	D	D	D	D	D	H	H
6-6	P	P	P	P	P	H	H	H	H	H
7-7	P	P	P	P	P	P	H	H	H	H
8-8	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
9-9	P	P	P	P	P	S	P	P	S	S
10-10	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S

RYSUNEK 1. Podstawowa strategia gry w Blackjacka; H – hit (dobierz), S – stand (nie dobieraj), D – double (podwój stawkę), P – split (rozdwój karty).

Czyli możemy, w zależności od wartości prawdziwej, modyfikować swoją strategię oraz stosować zróżnicowane budżetowanie (grać o wyższe stawki, gdy wartość prawdziwa jest wysoka). w ten sposób możemy osiągnąć przewagę nad kasynem rzędu 1%! Natomiast stosując techniki liczenia kart wyższego rzędu można osiągnąć nawet 2,5% przewagi nad kasynem. Czyli dla dobrego gracza zostaje średnio **102,5%** wpłaty! Co oznacza, że można się tak wzbogadzać. Byle tylko kasyno nas nie wykryło i nie wyprosiło. . .

5. ZAKŁADY BUKMACHERSKIE

Bardzo popularną grą hazardową są też zakłady bukmacherskie. Tu, w przeciwieństwie do innych gier, nie jest tak łatwo oszacować prawdopodobieństwo konkretnego wyniku. Każda firma oferująca zakłady ma swoich ekspertów i inaczej je szacuje. Po obliczeniu tego prawdopodobieństwa bukmacher ustala wysokości wygranych, ale tak, by wartość oczekiwana pojedynczego zakładu była ujemna. Tą wartość zwykło się nazywać marżą bukmachera. Łatwo obliczyć, jaka ona jest, przyglądając się poszczególnym zakładom. Poniżej, w tabelce, przedstawiono zakład kto będzie wyżej w GP Belgii (Kubica – Heidfeld) u trzech różnych bukmacherów.

Bukmacher	1	2
bwin	1,60	2,25
Globet	1,75	2,00
PinnacleSports	1,70	2,25

Oznaczając kursy przez k_1 i k_2 , dostajemy, że prawdopodobieństwo poszczególnych wygranych jest równe $\frac{k_2}{k_1+k_2}$ i $\frac{k_1}{k_1+k_2}$. Skąd obliczamy, że dla gracza idzie średnio

$$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

postawionej stawki, czyli w tym przypadku odpowiednio 93,5%, 93,3% oraz 96,8%.

Zazwyczaj na internetowych zakładach bukmacherskich dla graczy idzie średnio około **90% – 98%**. W zależności od bukmachera, ta wartość może być bardzo zmienna.

Bukmacher	Średnia marża
PinnacleSports	2,0%
Bookmaker.com	5,3%
Bet365	5,5%
Unibet	5,8%
Centrebet	5,8%
Expekt	6,1%
Betsson	6,3%

TABLICA 1. Internetowi bukmacherzy z najniższą marżą i obsługą PLN.

Bukmacher	Średnia marża
Betclick	10,1%
Bet-At-Home	7,9%
Bwin	7,1%
Interwetten	9,3%

TABLICA 2. Marża u innych popularnych bukmacherów.

Istnieją różne systemy zawierania zakładów bukmacherskich. Najpopularniejsze to

- zakłady pojedyncze,
- zakłady akumulowane,
- progresja,
- supertyp,
- surebet,
- surebet+

Pokrótkie wyjaśnimy każdy z nich.

Zakłady pojedyncze to najzwyczajniejsze typowanie pojedynczego wyniku. Zakłady akumulowane polegają na typowaniu wielu wyników (np. meczów z całej kolejki ligowej). Stawka za wygraną się mnoży, co oznacza, że możliwe pieniądze do wygrania rosną wykładniczo. Problem w tym, że prawdopodobieństwo wygrania wszystkich zakładów (tylko wtedy wypłacana jest wygrana) także się mnoży. Zatem realnego zysku z tego nie ma. Natomiast jest strata, gdyż marża również się mnoży. Innym słowem, na takim zakładzie najbardziej i tak zarabia bukmacher.

Progresja to sposób typowania całkowicie sprzeczny z matematyką. Polega na tym, że obstawiamy dość mało prawdopodobny wynik pewnej drużyny (np. remis). Jeśli przegramy, to w następnym meczu obstawiamy znów remis, ale za 2 razy większą stawkę. Przeciwnie w końcu musi zremisować, a wtedy nasz realny zysk, nawet po odjęciu przegranych wcześniej pieniędzy, będzie dodatni. Błąd polega na tym, że wyniki kolejnych meczy drużyny to zdarzenia niezależne, więc to, że jakaś drużyna długo nie remisowała, nie oznacza, że teraz zremisuje. Progresja przestała być popularna w USA w zeszłym roku, kiedy jedna z drużyn ligi hokejowej nie zremisowała ponad 30 meczy z rzędu doprowadzając wielu graczy do ruiny.

Aby zrozumieć na czym polega surebet, przyjrzyjmy się kursom na mecz Wisła Kraków – Jagiellonia Białystok.

Zobaczmy, co się stanie, jeśli mając 1000 zł postawimy
 668,21 zł na Wisłę w Expekt,
 217,90 zł na remis w Mybet,
 113,90 zł na Jagiellonię w WilliamHill.

W każdym przypadku zgarniamy 1002,31 zł, czyli zarabiamy 2,31 zł.

W ogólności, można przeliczyć, że wygrywamy

$$\frac{k_1 k_2 k_3}{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_1}$$

Bukmacher	1	X	2
Bet-At-Home	1,35	4,25	8,50
SportingBet	1,40	4,00	7,50
Unibet	1,40	4,00	8,00
Ladbrokes	1,40	3,75	7,50
Bet365	1,33	4,33	8,00
bwin	1,35	4,25	7,80
Expekt	1,50	3,90	8,25
Doxxbet	1,50	4,00	7,43
Mybet	1,35	4,60	7,50
Interwetten	1,35	3,70	7,50
10Bet	1,40	4,18	8,12
Centrebet	1,38	4,20	8,00
betsafe	1,40	4,25	8,40
WilliamHill	1,25	4,00	8,80
betcris	1,33	4,15	7,40

TABLICA 3. Kursy na mecz Wisła Kraków – Jagiellonia Białystok

razy stawka obstawiając odpowiednio

$$\frac{k_2k_3}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}, \quad \frac{k_1k_3}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{k_2k_3}{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}.$$

Czyli jeśli uda nam się znaleźć taki zakład, w którym ta wartość (biorąc najlepsze kursy u różnych bukmacherów) będzie większa niż 1, to zarabiamy!

System surebet+ różni się od powyższego tylko tym, że czasami możemy zgarnąć stawkę u kilku bukmacherów na raz. Jako przykład weźmy mecz piłki ręcznej Polska – Wielka Brytania i następujące zakłady:

Kurs w Pinnacle: Polska wygra więcej niż 12,5 golami — 1,92.

Kurs w Ladbrokes: Wielka Brytania przegra mniej niż 13,5 golami — 2,12.

Mamy surebet wielkości 0,75%. Ale jak Polska wygra dokładnie 13 golami, to podwajamy swoją stawkę!

Oczywiście, przy zakładach bukmacherskich, tak jak przy ruletce, wiele internetowych serwisów daje nam na starcie bonusy. Częstym dodatkowym ograniczeniem jest wymóg zawierania zakładów o odpowiednio wysokich kursach. Przykładowe bonusy:

- Jetbull – bonus 100%, max. 400 zł, obrót $5 \times B$, 1 kurs co najmniej 1,8;
- Expect – bonus 100%, max. 150 zł, obrót $3 \times (W+B)$, kursy co najmniej 1,5;
- Bet365 – bonus 100%, max. 200 zł, obrót $3 \times (W+B)$, kursy co najmniej 1,5;
- Ladbrokes – bonus 100%, max. 150 zł, na 1 zakład;
- Betway – bonus 100%, max. 200 zł, na 1 zakład;
- Betsafe – bonus 100%, max. 100 zł, obrót $3 \times (W+B)$, kursy co najmniej 1,5;
- Betsson – bonus 100%, max. 111 zł, obrót $6 \times (W+B)$;
- PinnacleSports – bonus 10%, max. 500\$, obrót $3 \times (W+B)$.

Przy czym tutaj, jeśli stosujemy strategię surebetu, to bonus w całości nam się zwraca! Innym słowem, możemy sobie długo pograć i potem wszystko wypłacić z nawiązką. Sprawdzone w praktyce.

Problem jest tylko taki, że znajdowanie i obstawianie surebetów zabiera tyle czasu, że zazwyczaj bardziej opłacalne jest pójście do „normalnej” pracy. :-)