KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały do Seminarium dla nauczycieli

Kraków, 29 września 2012

Leszek Pieniążek

Nierówności pomiędzy średnimi są stosunkowo dobrze znanymi narzędziami używanymi w matematyce na zaawansowanym poziomie licealnym. Wydaje się jednak, że standardowe ich zastosowania koncentrują się wyłącznie na nierównościach algebraicznych.

W referacie chciałbym pokazać możliwe zastosowania w problemach analitycznych bezpośrednio związanych z zadaniami geometrycznymi bliskimi rzeczywistym problemom optymalizacyjnym. Zwłaszcza wydaje się to istotne w sytuacji braku w programie szkolnym metod analitycznych znajdowania ekstremów funkcji (pochodna). Okazuje się, że w pewnych sytuacjach możliwe jest efektywne szukanie tychże z wykorzystaniem właśnie nierówności między średnimi. Dodatkowo niektóre z tych problemów są klasycznymi problemami optymalizacyjnymi geometrii, jak poszukiwanie prostokąta o największej powierzchni spośród wszystkich o ustalonym obwodzie.

Często uczniowie nie zauważają istotnej cechy nierówności: warunku, kiedy staje się ona równością. W podanych przykładach będzie on istotny dla uzyskania pożądanego rezultatu, co może pomóc w utrwaleniu tej własności.

1. Nierówności między średnimi i dowody geometryczne

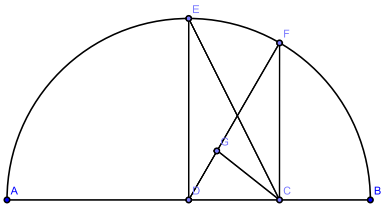
Zajmować będziemy się geometrycznymi zadaniami optymalizacyjnymi, czyli określeniem jaka figura (płaska, przestrzenna) spełniająca pewne założenia maksymalizuje lub minimalizuje pewną wielkość. Narzędziem będą znane nierówność między średnimi:

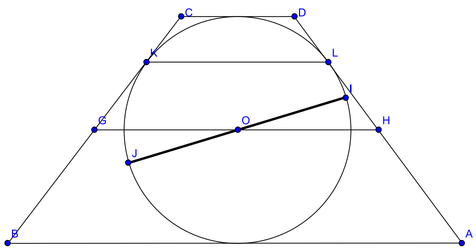
Twierdzenie 1.1. *Niech $n_1, \ldots, n_k > 0$ i $n = n_1 + \ldots + n_k$. Jeśli $a_1 \ldots a_n$ są liczbami dodatnimi, to zachodzą nierówności*

$$\frac{n}{\frac{n_1}{a_1} + \ldots + \frac{n_k}{a_k}} \leqslant (a_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k})^{1/n} \leqslant \frac{n_1 a_1 + \ldots + n_k a_k}{n} \leqslant \sqrt{\frac{n_1 a_1^2 + \ldots + n_k a_k^2}{n}}.$$

Ponadto każda z nierówności staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n$.

Nierówności między dwiema liczbami można uzasadnić geometrycznie korzystając z rysunków:





$AC = a$, $BC = b$,
$CE = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant DE = \frac{a+b}{2} \geqslant CF = \sqrt{ab} \geqslant FG = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

$AB = a$, $CD = b$,
$GH = \frac{a+b}{2} \geqslant IJ = \sqrt{ab} \geqslant KL = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

2. Zastosowanie nierówności między średnimi w zadaniach optymalizacyjnych w geometrii

Zadanie 2.1. *Który z prostokątów o obwodzie $2p$ ma największą powierzchnię?*

Szkic. Rozwiążemy zadanie korzystając z twierdzenia 1.1. Wyrażenie $x(p-x)$ jest iloczynem, a więc bliskie jest średniej geometrycznej i chcemy je szacować z góry (bo szukamy maksimum), a więc przez średnią arytmetyczną. To daje szacowania

$$x(p-x) = (\sqrt{x(p-x)})^2 \leqslant \left(\frac{x + (p-x)}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}.$$

Zauważmy, że nierówność powyżej jest prawdziwa ze względu na monotoniczność funkcji kwadratowej dla dodatnich argumentów oraz równość zachodzi tylko gdy $x = p - x$, a więc gdy oba boki prostokąta są równe. Zatem największe pole ma kwadrat i wynosi ono $\frac{p^2}{4}$

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Zadanie 2.2. *Który z trójkątów równoramiennych o obwodzie* $2p$ *ma największą powierzchnię?*

Szkic. Korzystając ze wzoru Herona dostajemy funkcję opisującą pole w postaci $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}$, gdzie a jest długością podstawy, zaś b ramienia. Znowu korzystamy z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dostając

$$\sqrt{p} = \sqrt{p}(\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-b)})^{3/2} \leqslant \sqrt{p}\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-b)}{3}\right)^{3/2} = \sqrt{p}\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}$$

przy czym równość jest gdy $p-a=p-b$, a więc dla trójkąta równobocznego.

Uwaga. 1. Zadanie wymaga analizy funkcji trzeciego stopnia, co metodami szkoły średniej nie da się zrobić.
2. Osoby nieznające wzoru Herona mogą wyznaczyć zależność pola powierzchni od długości podstawy z twierdzenia Pitagorasa dostając analogiczne wyrażenie do optymalizacji.
3. Zarówno w tym, jak i poprzednim zadaniu widzimy, że po zastosowaniu nierówności dostajemy wyrażenie, które jest stałe w zadaniu. Wykorzystamy tę uwagę w kolejnych problemach.

Dwa kolejne zadania mają praktyczne znaczenie ze względu na minimalizację kosztów produkcji opakowań oraz transportu (waga opakowań).

Zadanie 2.3. *Znaleźć prostopadłościan o zadanej objętości* V *i minimalnym polu powierzchni.*

Szkic. Oznaczając literami a, b, c długości krawędzi szukamy minimalnej wartości wyrażenia $P = 2(ab+bc+ca)$ wiedząc, że $abc = V$.

I sposób. Zauważmy, że $P = 2(\frac{V}{c} + \frac{V}{a} + \frac{V}{b})$. Z nierówności między średnią harmoniczną i geometryczną wnioskujemy, że

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{c \cdot a \cdot b}} = \frac{3}{\sqrt[3]{V}}$$

co daje szacowanie $P \geqslant 6V^{2/3}$ stające się równością dla $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$, a więc dla sześcianu.

II sposób. Szacujemy od dołu sumę w P średnią geometryczną:

$$2(ab+bc+ca) = 6\,\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant 6\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ca} = 6V^{2/3},$$

przy czym równość jest dla $ab = bc = ca$, a więc dla sześcianu.

Zadanie 2.4. *Znaleźć walec o minimalnym polu powierzchni i ustalonej objętości* V.

Szkic. Szukamy minimalnej wartości wyrażenia $2\pi(R^2 + RH)$ przy założeniu $\pi R^2 H = V$. Pierwsze podejście do szacowania sumy $R^2 + RH = 2\,\frac{R^2+RH}{2} \geqslant 2\sqrt{R^3 H}$ nie daje rozwiązania, gdyż wyrażenie R^3H nie jest stałe dla walca. Potrzebujemy aby R występowało w potędze 2 razy większej niż H, jak we wzorze na objętość. Zauważmy jednak, że jeśli w sztuczny sposób zapiszemy $R^2 + RH = 3\,\frac{R^2 + \frac{RH}{2} + \frac{RH}{2}}{3} \geqslant 3\sqrt[3]{R^4H^2/4}$ mamy szacowanie przez wyrażenie stałe, które staje się równością gdy $R^2 = \frac{RH}{2}$, a więc dla $2R = H$. To znaczy, że optymalny walec ma wysokość równą średnicy podstawy.

Uwaga. Rozważając zadania podobne, w których zakładamy, że nie ma wieczka (pojemniki otwarte), lub też z nierówną grubością ścian bocznych oraz wierzchniej i dolnej, dostajemy do optymalizacji wyrażenie postaci $kR^2 + RH$. Powyższe rozumowanie daje rozwiązanie również w tej sytuacji.

Zadanie 2.5. *Znaleźć stożek o minimalnej objętości, w który można wpisać walec o promieniu* r *i wysokości* h.

Szkic. Jeśli oznaczymy przez R i H promień podstawy stożka i jego wysokość, to spełniona jest zależność:

(1) $$\frac{R-r}{h} = \frac{R}{H} \iff \frac{1}{h} = \frac{1}{H} + \frac{r}{h}\frac{1}{R}.$$

Minimalizować będziemy wartość $V = \frac{\pi}{3}R^2H$.

I sposób

Zauważmy, że $\sqrt[3]{(aR)^2(bH)}$ jest średnią geometryczną z wagami 2 i 1 i jest nie mniejsza od średniej harmonicznej $\frac{3}{\frac{2}{aR}+\frac{1}{bH}}$. Prawą stronę równości (1) można zapisać jako $\frac{2}{2\frac{h}{r}R} + \frac{1}{H}$. Zatem z nierówności między średnimi mamy $\sqrt[3]{(2\frac{h}{r}R)^2(H)} \geqslant \frac{3}{\frac{2}{2\frac{h}{r}R}+\frac{1}{H}} = 3h \iff R^2h \geqslant \frac{(3h)^3}{(2\frac{h}{r})^2} = \frac{27hr^2}{4}$, przy czym równość zachodzi gdy $2\frac{h}{r}R = H \iff 2\frac{H}{R} = \frac{h}{r}$, co w połączeniu z (1) daje $H = 3h$ i $R = \frac{3}{2}r$ i szukaną objętość równą $\frac{9}{4}hr^2$.

II sposób

Zapiszmy objętość w postaci $V = \frac{1}{12}\pi r^2 h(\frac{2R}{r}\frac{2R}{r}\frac{H}{h})$. Z nierówności między średnimi geometryczną i harmoniczną dostaniemy $V \geqslant \frac{1}{12}\pi r^2 h\left(\frac{3}{\frac{r}{2R}+\frac{r}{2R}+\frac{h}{H}}\right)^3$ przy czym mianownik ułamka jest równy 1 i reszta rozumowania jak wyżej.