Kryptologia (nie)stosowana
Materiały z zajęć Młodzieżowych Uniwersytetów Matematycznych

Kraków, 29 września 2012

Słowa *kryptografia* i *kryptologia* często używane są zamiennie, a tak naprawdę ich znaczenia są różne (jak *geografia* i *geologia*, czy *topografia* i *topologia*). Formalnie kryptologia to nauka o przekazywaniu informacji w sposób zabezpieczony przed niepowołanym dostępem. Dzielimy ją na kryptografię (naukę o układaniu systemów kryptograficznych) oraz kryptoanalizę (naukę o ich łamaniu). Jak wskazuje tytuł artykułu – tym także się zajmiemy.

1. Z życia wzięte...

Kryptografia jest stosowana już od wielu wieków, między innymi Juliusz Cezar szyfrował wiadomości militarne. Niebagatelną rolę w dziejach historii odegrała też kryptoanaliza. Historię złamania szyfru Enigmy przez polskich matematyków zna chyba każdy, więc może przytoczę inny przykład: podczas I wojny światowej Zimmermann wysłał telegram do Meksyku, w którym Niemcy proponowali sojusz w przypadku, gdyby Stany Zjednoczone włączyły się do wojny. Telegram rozszyfrowano i jego treść tak Amerykanów zdenerwowała, że... włączyli się do wojny.

Ale też i w życiu codziennym przydaje się kryptografia. Zaświadcza o tym między innymi... *Kamasutra*, czyli indyjska księga o sztuce miłości. Pozycja numer 45 w spisie 64 sztuk, których poznanie zaleca się kobietom, to *mlecchita-vikalpa*, czyli sztuka posługiwania się tajnym pismem. Według *Kamasutry* umiejętność ta przydaje się na równi z innymi, takimi jak gotowanie, śpiewanie czy haftowanie.

2. Szyfry monoalfabetyczne

Tyle słowem wstępu – przejdźmy do konkretów, czyli szyfrów. Historycznie najstarsze, ale też i najprostsze, są tzw. **szyfry monoalfabetyczne**. Polegają na tym, że szyfrując, każdą literę tekstu jawnego zastępujemy w sposób jednoznaczny jedną literą, co więcej – za każdym razem w taki sam sposób. Tzn. litera `A` jest zawsze szyfrowana tak samo, niezależnie od jej pozycji w tekście czy liter poprzedzających. Takim szyfrem jest np. tzw. **szyfr Cezara** (tak, to ten używany przez Juliusza Cezara), w którym:

$$\texttt{A} \to \texttt{D}, \quad \texttt{B} \to \texttt{E}, \quad \texttt{C} \to \texttt{F}, \quad \ldots, \quad \texttt{Z} \to \texttt{C}.$$

Widać regułę? Szyfr ten spełniał swoją rolę, ponieważ zdecydowana większość ludzi nie znała alfabetu.

Inne przykłady takich szyfrów to **ROT-13**:

$$\texttt{A} \to \texttt{N}, \quad \texttt{B} \to \texttt{O}, \quad \texttt{C} \to \texttt{P}, \quad \ldots, \quad \texttt{Z} \to \texttt{M}$$

oraz **AtBash**:

$$\texttt{A} \to \texttt{Z}, \quad \texttt{B} \to \texttt{Y}, \quad \texttt{C} \to \texttt{X}, \quad \ldots, \quad \texttt{M} \to \texttt{N}.$$

Ich zaletą było to, że deszyfrowało się tak samo jak szyfrowało, więc było 2 razy mniej do zapamiętania. :-)

Jak złamać taki kod?

Najczęstsza i zarazem najefektywniejsza metoda to **analiza częstości występowania liter** w szyfrogramie. Metoda korzysta z tego, że litery w tekście występują z różną częstością. W języku polskim wygląda to następująco:

8,78%	E
8,65%	I
8,61%	A
7,34%	O
5,67%	Z
5,60%	N
4,30%	T
4,25%	W

4,17%	S
3,85%	Y
3,82%	C
3,72%	R
3,35%	M
3,33%	D
2,95%	K
2,81%	J

2,74%	P
2,19%	L
2,05%	U
1,49%	B
1,40%	Ę
1,40%	G
1,36%	Ł
1,24%	Ż

1,11%	Ą
0,93%	H
0,84%	Ś
0,79%	Ó
0,56%	Ć
0,36%	F
0,12%	Ń
0,06%	Ź

Natomiast w języku angielskim:

11.16%	E
8.50%	A
7.58%	R
7.55%	I
7.16%	O
6.95%	T
6.66%	N

5.74%	S
5.45%	L
4.54%	C
3.63%	U
3.39%	D
3.17%	P
3.01%	M

3.00%	H
2.47%	G
2.07%	B
1.81%	F
1.78%	Y
1.29%	W

1.10%	K
1.00%	V
0.29%	X
0.27%	Z
0.20%	J
0.19%	Q

W praktyce — mamy zaszyfrowany tekst, np.

`PXPXKXENVDRUXVTNLXHYMXGMAXYKXJNXGVRFXMAHWGXXWLEHGZXKVBIAXKMXQM`

i sądzimy, że jest to tekst w języku angielskim zakodowany przez pewne przesunięcie w alfabecie. Szukamy więc najczęściej występującej litery – w tym przypadku jest to `X` – i zakładamy, że zastosowano przesunięcie `E` $\to$ `X`. Zatem przyjmując do deszyfracji przesunięcie o 7 (by `X` przeszedł w `E`), dostajemy:

`WEWERELUCKYBECAUSEOFTENTHEFREQUENCYMETHODNEEDSLONGERCIPHERTEXT`.

3. Szyfry polialfabetyczne

Za łatwo poszło. Trudniejszym kodowaniem jest **szyfr polialfabetyczny**. Polega on na tym, że, tak jak wcześniej, jednej literze odpowiada jedna litera, ale tym razem nie zawsze ta sama – jest ona zależna od pozycji litery w tekście. Przykładem jest szyfr Vigenère'a, w którym najpierw wybieramy słowo-klucz, np. `MUM`, a następnie szyfrujemy robiąc cykliczne przesunięcie w alfabecie, ale o tyle, ile nam wskazuje słowo-klucz. W przypadku klucza `MUM` przesuwamy pierwszą literę o 17 (bo `M` jest 17 literą w alfabecie), drugą o 27 (bo `U` jest 27), trzecią o 17 (`M` jest 17), a dalej cyklicznie, czyli czwartą o 17, piątą o 27, itd. W ten sposób słowo

`KRAKÓW`

zakodujemy przez

`ŻNNŻŁJ`.

A jak złamać ten kod?

Ewidentnie jest on trudniejszy do złamania. Niemniej, zauważmy, że jedynym problemem jest odkrycie długości klucza. Znając ją, możemy stosować poprzednią metodę dla liter położonych w odległościach będących wielokrotnościami długości klucza. A jak znaleźć długość klucza? Na to mamy aż 3 metody.

Pierwsza (tzw. **metoda Kasiskiego**) polega na szukaniu w zakodowanym tekście powtarzających się ciągów znaków. Przykładowo, w języku angielskim bardzo często występuje trójka `the`, więc poszukajmy jej w kodzie. Załóżmy, że w anglojęzycznym tekście zakodowanym znaleźliśmy 8 wystąpień trójki `mum`, a odstępy między nimi wynoszą odpowiednio 24, 32, 20, 56, 37, 43 i 92. Możemy zauważyć, że większość z nich podzielna jest przez 4 – zatem możemy przyjąć, że długość klucza wynosi 2 lub 4. Wartości 37 i 43 mogły być związane z przypadkowym zaszyfrowaniem innego tekstu z innymi przesunięciami i w ten sposób otrzymaliśmy jedną „fałszywą" trójkę `mum`.

Druga metoda (tzw. **indeks koincydencji**) opiera się na tym, że im tekst jest dłuższy, tym częstość występowania liter jest bliższa losowej. To odchylenie od rozkładu równomiernego możemy odczytać ze wzoru:

$$IC = \frac{\sum_{a\in\mathcal{A}} F_a(F_a-1)}{N(N-1)},$$

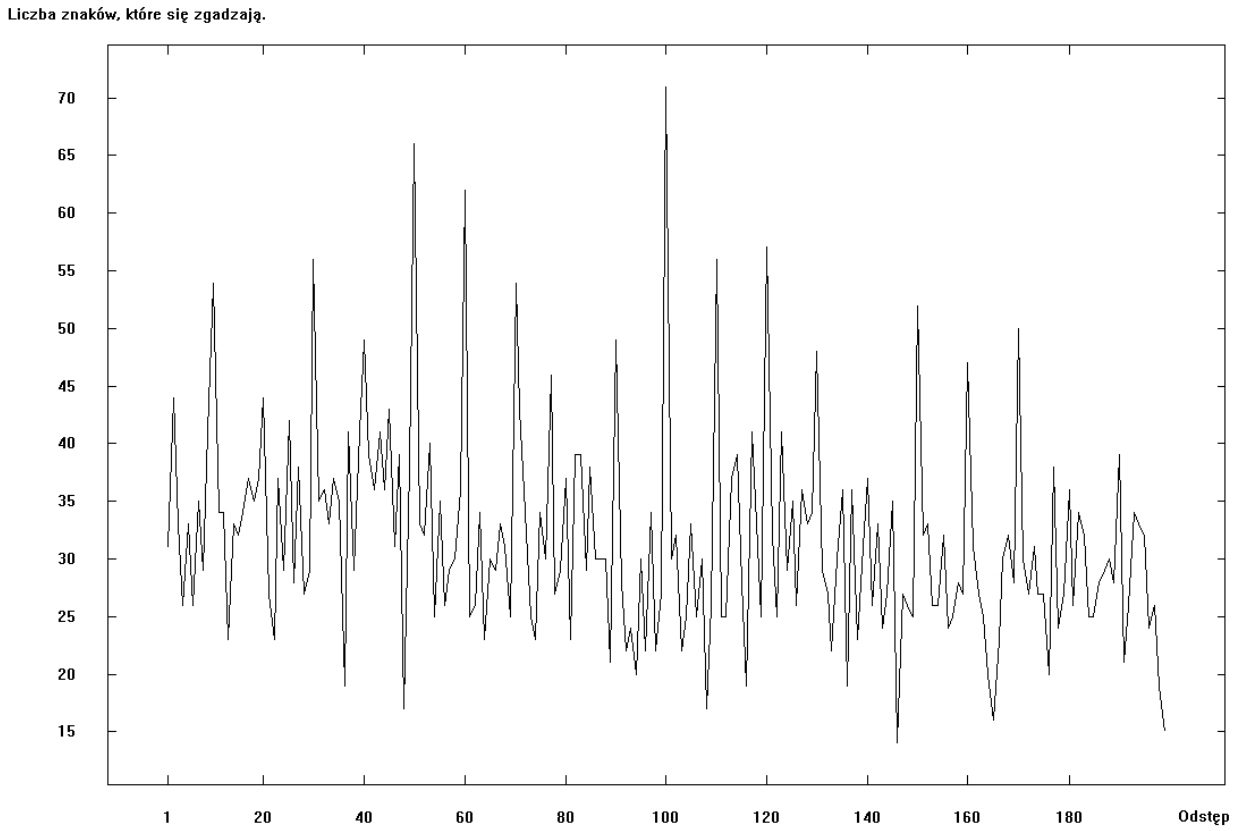
gdzie F_a – liczba wystąpień litery a z alfabetu $\mathcal{A}$ w tekście o długości N. Doświadczalnie sprawdzono, jak kształtuje się długość klucza w zależności od IC, dzięki czemu możemy ją odczytać (z pewnym błędem) z tabelki:

długość klucza	IC
1	0,066
2	0,052
3	0,047
4	0,045
5	0,044
10	0,041
bardzo duża	0,038

Trzecia metoda – **autokorelacja** – polega na tym, że przesuwamy tekst zaszyfrowany względem siebie i zliczamy pokrywające się znaki. Okazuje się, że jeśli przesuniemy o długość klucza (lub jego wielokrotność), to pokrywających się znaków jest dużo więcej. Na Rysunku 1 znajduje się wykres przedstawiający liczbę pokrywających się znaków w zależności od przesunięcia tekstu względem siebie. Jaka jest długość klucza?

4. Szyfry poligramowe

Jak widać, taki szyfr też da się łatwo złamać. Kolejnym utrudnieniem jest szyfrowanie po kilka znaków, a nie – jak wcześniej – po jednym. Takie szyfry nazywamy **szyframi poligramowymi**. Ich przewaga polega na tym, że dana litera jest szyfrowana w różny sposób (zależny od sąsiednich liter). Przykładem takiego systemu jest tzw. **szyfr Playfair**. Aby szyfrować, najpierw należy ustalić klucz (np. `SZKOŁA MATEMATYKI POGLĄDOWEJ`), usunąć z niego powtarzające się litery, uzupełnić brakującymi literami alfabetu i całość ustawić w kwadrat 5×5. W alfabecie łacińskim jest 26 liter, dlatego dwie się utożsamia (zazwyczaj `I` z `J`). W naszym przykładzie dostajemy:



RYSUNEK 1. Ilustracja metody autokorelacji. Jaka jest długość klucza?

S	Z	K	O	L
A	M	T	E	Y
I	P	G	D	W
B	C	F	H	N
Q	R	U	V	X

Szyfrowanie polega na zamianie dwóch liter w dwie nowe (w przypadku, gdy mamy nieparzystą liczbę liter, dopisujemy ustaloną literę np. `X`) w następujący sposób:

- Jeśli litery, które chcemy zakodować, znajdują się w różnych wierszach i kolumnach, to zastępowane są znakami znajdującymi się na drugiej przekątnej, stworzonego przez te znaki prostokąta.

S	Z	K	O	L
A	M	T	E	Y
I	P	G	D	W
B	C	F	H	N
Q	R	U	V	X

  Szyfrując litery `EB` otrzymamy `AH`. Ważna jest kolejność podawania liter do szyfrowania – szyfrując `BE` otrzymamy `HA`.

- Jeżeli szyfrowane znaki znajdują się w jednej kolumnie (lub wierszu) macierzy szyfrowania, wówczas zastępowane są znakami następującymi po nich w tej kolumnie (wierszu).

S	Z	K	O	L
A	M	T	E	Y
I	P	G	D	W
B	C	F	H	N
Q	R	U	V	X

Szyfrując litery MY otrzymamy TA. Podobnie, szyfrując AS dostaniemy IA.

Innym sposobem szyfrowania poligramowego jest zastosowanie **macierzy szyfrującej**. Aby kodować tą metodą, najpierw cały tekst zapisujemy w macierzy $2 \times n$, gdzie każdą literę zastępujemy liczbą oznaczającą jej pozycję w alfabecie (A $\to$ 0, B $\to$ 1, C $\to$ 2, …, Z $\to$ 25). Przykładowo:

$$\texttt{MATEMATYKA} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 12 & 19 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 24 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kodowanie polega na mnożeniu modulo 26 odwracalnej macierzy 2×2 przez macierz reprezentującą tekst. Niech macierzą-kluczem będzie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$. Jest odwracalna (wyznacznik niezerowy i względnie pierwszy z 26). Słowo MATEMATYKA zakodowane tą macierzą, to

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 19 & 12 & 19 & 10 \\ 0 & 4 & 0 & 24 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 24 & 24 & 6 & 20 \\ 22 & 9 & 22 & 13 & 18 \end{pmatrix} = \texttt{YWYJYWGNUS}.$$

Dekodowanie odbywa się przez mnożenie macierzy odwrotnej do klucza $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$ przez macierz zakodowanego tekstu.

5. Kryptografia z kluczem publicznym

Wszystkie dotychczas zaprezentowane metody kodowania miały dużą wadę – znając sposób szyfrowania, od razu znało się zposób deszyfrowania. Gdyby takie coś obowiązywało np. w banku, to mielibyśmy spory problem. Ponadto, by móc kodować wiadomości, musimy wcześniej ustalić w bezpieczny sposób klucz, co też nie zawsze jest możliwe. Rozwiązaniem tego problemu jest kryptografia z kluczem publicznym oparta na funkcjach jednokierunkowych.

Definicja 5.1. *Funkcja jednokierunkowa* jest to funkcja wzajemnie jednoznaczna $f : X \to Y$ taka, że dla danego $x \in X$ łatwo jest policzyć $f(x)$, ale wyliczenie $f^{-1}(y)$ dla przypadkowo wybranego y jest bardzo trudne.

W kryptografii używane są funkcje, które pozostają jednokierunkowe pod warunkiem, że pewna informacja (klucz prywatny) jest utrzymana w tajemnicy. Oznacza to, że każdy może przesłać zaszyfrowaną wiadomość do danego użytkownika korzystając z publicznego klucza (funkcji szyfrującej). Nie ma potrzeby żadnego tajnego porozumiewania się między nadawcą i odbiorcą.

Przykładem funkcji jednokierunkowej jest potęgowanie w ciele $\mathbb{Z}_p^*$. Odwrócenie tej funkcji to tzw. problem logarytmu dyskretnego:

Definicja 5.2. *Problemem logarytmu dyskretnego* w ciele $\mathbb{Z}_p^*$ przy podstawie $g \in \mathbb{Z}_p^*$ nazywamy zadanie wyznaczenia dla danego $y \in \mathbb{Z}_p^*$ takiej liczby naturalnej x, że $y = g^x \pmod p$.

Nie znamy jeszcze metod pozwalających szybko rozwiązywać ten problem.

6. Kryptosystem RSA

Szyfr RSA jest najczęściej używanym obecnie kryptosystemem. Wprawdzie artykuł miał być o kryptologii niestosowanej, ale o szyfrze RSA też warto wspomnieć.

Pierwsza osoba (nazwijmy ją Apolonią) wybiera dwie dość duże liczby pierwsze p i q tak, żeby ich iloczyn równy n był większy od długości szyfrowanego tekstu. Ponadto wybiera losowy wykładnik e, który jest względnie pierwszy zarówno z $p-1$, jak i z $q-1$. Kluczem publicznym Apolonii będzie para (n,e).

Natomiast jej kluczem prywatnym niech będzie dowolna liczba d, dla której jednocześnie

$$de \equiv 1 \pmod{p-1} \quad \text{oraz} \quad de \equiv 1 \pmod{q-1}.$$

Taką liczbę Apolonia może łatwo wyliczyć korzystając z algorytmu Euklidesa dla e i NWW$(p-1, q-1)$.

Gdy drugi użytkownik (nazwijmy go Boguś) pragnie przesłać Apolonii wiadomość w, wysyła jej $s \equiv w^e \pmod{n}$.

Aby odszyfrować wiadomość, Apolonia oblicza resztę z dzielenia s^d przez n, ponieważ

$$s^d \equiv w^{de} \equiv w \pmod{n}.$$

Co powstrzymuje nieuprawnioną osobę (niech to będzie Czesiek) od rozszyfrowania wiadomości?

Znając n i e (klucz publiczny Apolonii) oraz przechwytując wiadomość zaszyfrowaną Czesiek nie jest w stanie odwrócić operacji $w \to w^e \pmod{n}$ bez znajomości klucza deszyfrującego d.

Wydaje się, że nie ma innej metody na znalezienie wykładnika deszyfrującego niż odnalezienie wpierw liczb p i q. Piszemy „wydaje się", gdyż to stwierdzenie nie jest udowodnione. Możemy jedynie powiedzieć, że złamanie szyfru RSA jest prawdopodobnie tak trudne jak rozkład n na czynniki pierwsze.

7. System „Polly Cracker"

Przejdźmy teraz do metod, które jeszcze nie weszły do powszechnego użycia. Bardzo ciekawy schemat kryptosystemu z kluczem publicznym (zwany **systemem „Polly Cracker"**) został opisany przez Fellowsa.

Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem skończonym i niech $T = \{t_i\}_{i=1}^n$ będzie zbiorem zmiennych. Kluczem prywatnym Apolonii jest losowy wektor $y \in \mathbb{F}^n$, a jej klucz publiczny stanowi pewien podzbiór $B = \{q_j\}$ zbioru wielomianów $\mathbb{F}[T]$ o tej własności, że

$$q_j(y) = 0 \text{ dla wszystkich } j.$$

Chcąc wysłać wiadomość w, Boguś generuje element

$$p = \sum h_j q_j,$$

będący kombinacją liniową elementów z B i wysyła Apolonii wielomian

$$c = p + w.$$

Apolonia, otrzymawszy szyfrogram w postaci wielomianu c, deszyfruje wiadomość w przez wyliczenie wartości tego wielomianu w punkcie y, tzn.

$$c(y) = p(y) + w = w.$$

Aby taki system dorze funkcjonował, znalezienie zera zbioru wielomianów musi być bardzo trudne (NP-trudne).

Zobaczmy na przykładzie, jak to funkcjonuje.

Zbudujemy system kryptograficzny korzystający z tego, że problem trójkolorowania grafu jest NP-trudny.

Kluczem publicznym niech będzie dowolny graf $G = (V, E)$, zbiór zmiennych $\{t_{v,i} \ : \ v \in V, \ 1 \leq i \leq 3\}$ i baza wielomianów $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, gdzie

$$\begin{aligned} B_1 &= \{t_{v,1} + t_{v,2} + t_{v,3} - 1 \ : \ v \in V\}; \\ B_2 &= \{t_{v,i} t_{v,j} \ : \ v \in V, \ 1 \leq i, j \leq 3\}; \\ B_3 &= \{t_{u,i} t_{v,i} \ : \ uv \in E, \ 1 \leq i \leq 3\}. \end{aligned}$$

Kluczem prywatnym jest właściwe trójkolorowanie grafu G, tzn. odwzorowanie $v \mapsto i_v \in \{1, 2, 3\}$ określone na wierzchołkach $v \in V$ takie, że jeśli $uv \in E$, to $i_u \neq i_v$.

Zauważmy, że jeśli znamy klucz prywatny, to możemy otrzymać punkt zerowy wszystkich wielomianów z B przyjmując $t_{v,i}$ równe 1, gdy wierzchołek v ma kolor i oraz 0 w przeciwnym przypadku. Łatwo też zauważyć, że aby znaleźć wspólne miejsce zerowe tej grupy wielomianów, to trzeba znaleźć właściwe trójkolorowanie grafu.

Od razu nasuwa się pytanie – czy inne problemy NP-trudne też można do tego użyć? Okazuje się, że tak – nawet wszystkie:

Twierdzenie 7.1 (Fellows, Koblitz). *Dowolnego problemu $\mathcal{P}$ klasy* NP *można użyć do konstruowania kryptosystemu analogicznego do poprzedniego, tzn. dla każdego przypadku problemu $\mathcal{P}$ można skonstruować zbiór B (o rozmiarze wielomianowym), że znajomość zera zbioru B jest wielomianowo równoważna znajomości rozwiązania tego problemu.*

8. Kryptosystemy eliptyczne

W ostatnich latach bujny rozwój przeżywa też **kryptografia na krzywych eliptycznych**. Prawdopodobnie zacznie być szerzej stosowana, więc warto ją tu zaprezentować.

Definicja 8.1. *Krzywą eliptyczną* E nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy gładką krzywą zadaną równaniem postaci

$$Y^2 + a_1 XY + a_3 Y = X^3 + a_2 X^2 + a_4 X + a_6, \quad a_i \in \mathbb{F}.$$

Jeśli $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2, 3$, to poprzez liniową zamianę zmiennych równanie krzywej eliptycznej można sprowadzić do postaci

$$Y^2 = X^3 + aX + b, \quad a, b \in \mathbb{F}.$$

Przez E oznaczmy zbiór złożony z punktów $(x, y) \in \mathbb{F}^2$, których współrzędne spełniają to równanie, oraz punktu „w nieskończoności” oznaczanego przez O.

Punktem przeciwnym do punktu $P = (x, y)$ leżącego na krzywej eliptycznej nazywamy punkt $-P = (x, -y)$, który także należy do tej krzywej eliptycznej.

Natomiast sumę punktów P i Q leżących na krzywej eliptycznej E definiujemy następująco:

- Jeśli $Q = O$, to $P + Q = P$;
- Jeśli P i Q mają takie same współrzędne x, to $P + Q = O$;

- Jeśli P i Q mają różne współrzędne x, to prosta przechodząca przez te punkty przecina krzywą E w jeszcze jednym, jedynym punkcie R i wówczas przyjmujemy $P + Q = -R$;
- Jeśli $P = Q$, to prowadzimy styczną w tym punkcie do krzywej E, przecina ona krzywą w jeszcze jednym punkcie R, wtedy przyjmujemy $P + Q = -R$.

Można to streścić w jednym zdaniu:

Suma trzech punktów leżących na jednej prostej wynosi 0.

Taka definicja sumy zadaje na zbiorze punktów krzywej eliptycznej strukturę grupy abelowej. Mamy tu też analogon problemu logarytmu dyskretnego:

Definicja 8.2. *Problem logarytmu dyskretnego* na E o podstawie $Q \in E$ jest problemem znalezienia dla danego $P \in E$ liczby całkowitej n, dla której $P = nQ$, o ile taka liczba istnieje.

Korzystając z tego, że na krzywej eliptycznej jeszcze trudniej o jego rozwiązanie, możemy stworzyć system kryptograficzny. Weźmy krzywą eliptyczną E nad ciałem skończonym i ustalmy na niej punkt Q.

Wymiana kluczy:
Apolonia wybiera losową liczbę k_A, wylicza punkt k_AQ i wysyła Bogusiowi. Boguś analogicznie: wybiera losową liczbę k_B, wylicza k_BQ i wysyła Apolonii. Wspólnym kluczem jest $P = k_Ak_BQ$. Apolonia i Boguś mogą go wyznaczyć mnożąc swoją sekretną liczbę przez otrzymaną od drugiej osoby.

Podsłuchujący Czesiek musi wyznaczyć $P = k_Ak_BQ$ znając tylko Q, k_AQ i k_BQ – czego nie może zrobić bez znajomości k_A i k_B.

Przesyłanie informacji:
Jeśli Boguś chce wysłać Apolonii wiadomość $M \in E$, to wybiera losową liczbę l i wysyła parę punktów $(lQ, M + lk_AQ)$.

Aby odszyfrować wiadomość, Apolonia wymnaża pierwszy punkt przez swoją tajną liczbę k_A i odejmuje wynik od drugiego punktu:

$$M + lk_AQ - k_A \cdot lQ = M.$$

Czesiek, aby przeczytać wiadomość, nadal musi rozwiązać problem logarytmu dyskretnego…

Andrzej Grzesik